

Esercizio (di introduzione al concetto di variabile aleatoria)

Si lanciano tre dadi indipendenti, qual è la probabilità che la somma dei primi due non superi il terzo?

In teoria, potremmo affrontare questo esercizio elencando tutti gli elementi dello spazio di probabilità Ω , che, in questo contesto, contiene tutte le possibili combinazioni di tre risultati fra 1 e 6 — per esempio le combinazioni 111, 112, 113, 114, 115, 116, etc. Quante combinazioni ci sono? Il primo dado può cadere su sei facce diverse. Per ciascuna di queste, ci sono sei possibili risultati del secondo dado; abbiamo quindi $6 \cdot 6$ combinazioni dei primi due risultati. Infine, ciascuna di queste può essere completata dal terzo risultato in sei maniere diverse: totale $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ combinazioni. (In generale, con n dadi, sarebbero state 6^n .) Questo numero di casi è forse gestibile, se non c'è altra scelta, però, potendo, conviene cercare una via più spiccia.

Idea chiave: chiamiamo S la somma dei risultati dei primi due dadi e dividiamo i casi a seconda dei possibili valori di S — vedremo poi che gli oggetti come S si chiamano "variabili aleatorie" e quello che stiamo facendo è studiare la "legge" della variabile aleatoria S .

La somma S vale al minimo 2 (caso $\square\square$) e al massimo 12 (caso $\blacksquare\blacksquare$): con che probabilità assume ciascuno dei valori fra 2 e 12?

$$Pr(S=2) = \frac{1}{36} \quad S=2 \Leftrightarrow \text{i due dadi sono } \square\square$$

un caso su 36 equiprobabili

$$Pr(S=3) = \frac{2}{36} \quad S=3 \Leftrightarrow \text{i dadi sono } \square\square \text{ o } \square\blacksquare$$

due casi su 36 equiprobabili

$$Pr(S=4) = \frac{3}{36} \quad \text{casi } \square\square, \blacksquare\square, \square\blacksquare$$

$$Pr(S=5) = \frac{4}{36} \quad \text{casi } \square\blacksquare, \blacksquare\blacksquare, \square\square, \blacksquare\blacksquare$$

$$Pr(S=6) = \frac{5}{36} \quad \text{casi } \square\blacksquare, \blacksquare\blacksquare, \square\square, \blacksquare\blacksquare, \square\blacksquare$$

Potremmo proseguire calcolando le probabilità degli eventi $S=7, 8, 9$, etc. però ricordiamo che stiamo cercando la probabilità dell'evento

$E = "S \text{ non supera il terzo dado}"$

Se $S \geq 7$, allora è gioco forza che S superi il valore del terzo dado, per cui, in questo caso, E non si può verificare — vedremo infatti che, nel calcolo, le probabilità di $S=7, \dots$ non ci serviranno.

Chiamiamo, ora, C il risultato del terzo dado (questa C è una nuova variabile aleatoria). L'evento richiesto può essere scritto nella forma

$$E = "S \text{ non supera } C"$$

$$= "C=2 \text{ e } S \leq 2 \text{ oppure } C=3 \text{ e } S \leq 3 \text{ oppure } C=4 \text{ e } S \leq 4 \text{ oppure } C=5 \text{ e } S \leq 5 \text{ oppure } C=6 \text{ e } S \leq 6"$$

$$= "C=2 \text{ e } S \leq 2" \cup "C=3 \text{ e } S \leq 3" \cup "C=4 \text{ e } S \leq 4" \cup "C=5 \text{ e } S \leq 5" \cup "C=6 \text{ e } S \leq 6"$$

$$= (\{C=2\} \cap \{S \leq 2\}) \cup (\{C=3\} \cap \{S \leq 3\}) \cup (\{C=4\} \cap \{S \leq 4\}) \cup (\{C=5\} \cap \{S \leq 5\}) \cup (\{C=6\} \cap \{S \leq 6\})$$

Le **unioni** sono chiaramente fra eventi incompatibili, perché gli eventi $\{C=2\}$, $\{C=3\}$, etc. sono incompatibili, inoltre le **intersezioni** sono fra eventi indipendenti; perché C dipende solo dal terzo dado, mentre S dipende solo dai primi due. Di conseguenza

$$\begin{aligned} Pr(E) = & Pr(C=2) \cdot Pr(S \leq 2) + Pr(C=3) \cdot Pr(S \leq 3) + \\ & Pr(C=4) \cdot Pr(S \leq 4) + Pr(C=5) \cdot Pr(S \leq 5) + \\ & Pr(C=6) \cdot Pr(S \leq 6) \end{aligned}$$

Per fare questo calcolo ci servono, innanzitutto, le probabilità degli eventi $C=2, 3$, etc., che sono immediatamente note ricordando che C è il risultato del lancio di un dado:

$$Pr(C=1) = Pr(C=2) = Pr(C=3) = \dots = Pr(C=6) = \frac{1}{6}$$

Per quanto riguarda $S \leq 2, 3, \text{etc.}$ abbiamo:

$$\{S \leq 2\} = \{S = 2\}$$

$$\{S \leq 3\} = \{S = 2\} \cup \{S = 3\}$$

$$\{S \leq 4\} = \{S = 2\} \cup \{S = 3\} \cup \{S = 4\}$$

$$\{S \leq 5\} = \{S = 2\} \cup \{S = 3\} \cup \{S = 4\} \cup \{S = 5\}$$

$$\{S \leq 6\} = \{S = 2\} \cup \{S = 3\} \cup \{S = 4\} \cup \{S = 5\} \cup \{S = 6\}$$

Gli eventi uniti sono chiaramente incompatibili, quindi:

$$P_n(S \leq 2) = P_n(S = 2) = \frac{1}{36}$$

$$P_n(S \leq 3) = P_n(S = 2) + P_n(S = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P_n(S \leq 4) = \dots = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$$

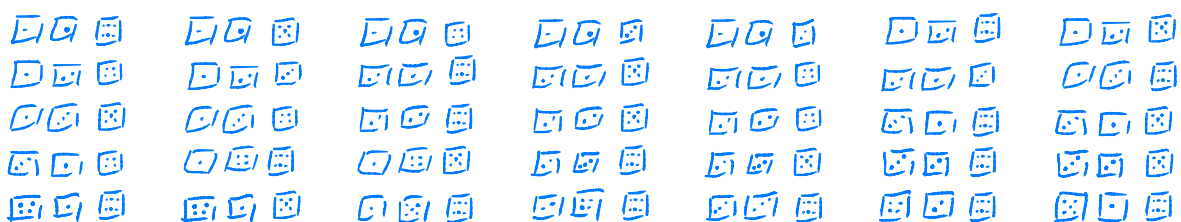
$$P_n(S \leq 5) = \dots = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$P_n(S \leq 6) = \dots = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$$

Per cui, in definitiva

$$P_n(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{36} = \frac{35}{216}$$

Nota: effettivamente i casi sono 35, ma elencarli è scomodo:



Le variabili aleatorie

Supponiamo dato uno spazio di probabilità Ω (cioè l'insieme degli eventi elementari con le loro probabilità) chiamiamo **variabile aleatoria** semplicemente una funzione da Ω a $\mathbb{R}$.

Eg: Lancio di un dado. Lo spazio di probabilità è

$$\Omega = \{ \square, \square, \square, \square, \square, \square \} \text{ con } p(\square) = p(\square) = \dots = \frac{1}{6}$$

Potremmo considerare, per esempio, la variabile aleatoria X che rappresenta il risultato del dado, per cui:
 $X(\square) = 1 \quad X(\square) = 2 \quad X(\square) = 3 \quad \text{etc.}$

↳ Nota: solitamente indicheremo le variabili aleatorie con lettere maiuscole dell'alfabeto latino, ma non c'è alcun obbligo di seguire questa convenzione.

Eg: Estrazione di una carta da un mazzo di 40 carte

$$\Omega = \{ 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, \dots, 7\clubsuit, J\clubsuit, Q\clubsuit, K\clubsuit, A\clubsuit, 2\diamond, \dots, A\diamond, 2\heartsuit, \dots, 2\spadesuit \}$$

$$p(2\clubsuit) = p(3\clubsuit) = \dots = \frac{1}{40}$$

Per esempio possiamo considerare la variabile aleatoria X che associa ad ogni carta il suo punteggio a briscola

$$X(2\clubsuit) = X(4\clubsuit) = \dots = X(7\clubsuit) = X(2\diamond) = \dots = X(7\diamond) = X(2\heartsuit) = \dots = X(2\spadesuit) = \dots = 0$$

$$X(J\clubsuit) = X(J\diamond) = X(J\heartsuit) = X(J\spadesuit) = 2 \quad X(Q\clubsuit) = \dots = X(Q\spadesuit) = 3$$

$$X(K\clubsuit) = \dots = 4 \quad X(3\clubsuit) = \dots = 10 \quad X(A\clubsuit) = \dots = 11$$

Definizione: la **legge** p_X della variabile aleatoria X è la funzione che associa ad ogni possibile valore di X la sua probabilità.

Eg. (dado)

Facendo riferimento all'esempio del dado di prima abbiamo

a	1	2	3	4	5	6
$p_X(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

← possibili valori di X
 $X =$ risultato del lancio
↑
probabilità di ciascun valore

Siccome $p(\square) = p(\square) = \dots = \frac{1}{6}$, vediamo che

$$p_X(1) = P_X(X=1) = p(\square) = \frac{1}{6}$$

$$p_X(2) = P_X(X=2) = p(\square) = \frac{1}{6} \quad \text{etc.}$$

Eg. (briscola)

La legge della variabile aleatoria X che rappresenta il punteggio di una carta scelta a caso è:

a	0	2	3	4	10	11
$p_X(a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

← Nota: la somma di queste probabilità è sempre 1

$p_X(0) = \frac{1}{2}$ Perché ci sono 20 carte che valgono 0 su 40 (il 2, 4, 5, 6 e 7 di ogni seme): $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

$p_X(2) = \frac{1}{10}$ Perché ci sono 4 carte che valgono 2 su 40 (i quattro 3): $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$.

$p_X(3) = p_X(4) = p_X(10) = p_X(11) = \frac{1}{10}$ Allo stesso modo.

Definizione: il valore atteso (detto anche media o speranza) di una variabile aleatoria X è la quantità

$$E(X) = \sum_a a \cdot p_X(a)$$

→ $\sum$ somma al variare di a fra i possibili valori assunti da X

Es (dato)

$$E(X) = 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) + 4 \cdot p_X(4) + 5 \cdot p_X(5) + 6 \cdot p_X(6)$$

$$= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5$$

Nota: 3.5 coincide con la media aritmetica delle sei facce del dado $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}$. Questo avviene perché i sei risultati 1, 2, ..., 6 sono equiprobabili.

E₅ (bricola)

$$E(X) = 0 \cdot p_X(0) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) + 4 \cdot p_X(4) + 10 \cdot p_X(10) + 11 \cdot p_X(11)$$

$$= 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 10 \cdot \frac{1}{10} + 11 \cdot \frac{1}{10} = 3$$

Nota: detto informalmente, ci sono 120 punti in totale nel mazzo, e 40 carte, quindi ogni carta vale, in media $\frac{120}{40} = 3$ punti.

Esercizio Nella situazione del dado, calcolare $E(X^2)$.

[illegible]

Vediamo che la legge di X^2 (la funzione che associa i possibili valori di X^2 alle loro probabilità) è data dalla prima e la terza riga della tabella

a	1	4	9	16	25	36	← possibili valori di X^2
$P_{X^2}(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	← rispettive probabilità

Quindi

$$\boxed{E(X^2)} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{91}{6}}$$

Esercizio Nella situazione del dado, calcolare $E(6X - X^2)$

Questo esercizio aggiunge una piccola complicazione.

$6a - a^2$	5	8	9	8	5	0	← possibili valori di $6X - X^2$
a	1	2	3	4	5	6	← possibili valori di X
$P_X(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

In questo caso, il medesimo valore della variabile aleatoria $6X - X^2$ può corrispondere a più di un valore della variabile aleatoria X . Vediamo che le probabilità si sommano.

$$6X - X^2 = 0 \Leftrightarrow X = 6 \text{ quindi } Pr(6X - X^2 = 0) = Pr(X = 6) = \frac{1}{6}$$

$$6X - X^2 = 5 \Leftrightarrow X = 1 \text{ o } X = 5 \text{ quindi}$$

$$Pr(6X - X^2 = 5) = Pr(\{X = 1\} \cup \{X = 5\}) = Pr(X = 1) + Pr(X = 5) =$$

Gli eventi $\{X = 1\}$ e $\{X = 5\}$ sono incompatibili perché X non può valere 1 e 5 allo stesso tempo

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

$$6X - X^2 = 8 \Leftrightarrow X = 2 \text{ o } X = 4 \text{ quindi } Pr(6X - X^2 = 8) = \frac{\text{come prima}}{2} = \frac{2}{6}$$

$$6X - X^2 = 9 \Leftrightarrow X = 3 \text{ quindi } Pr(6X - X^2 = 9) = \dots = \frac{1}{6}$$

$$\text{Riassumendo } Pr(6X - X^2 = 0) = \frac{1}{6} \quad Pr(6X - X^2 = 5) = \frac{2}{6}$$

$$Pr(6X - X^2 = 8) = \frac{2}{6} \quad Pr(6X - X^2 = 9) = \frac{1}{6}$$

Quindi la legge di $6X - X^2$ è rappresentata dalla tabella

a	0	5	8	9	← possibili valori di $6X - X^2$
$P_{6X - X^2}(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	← rispettive probabilità

$$\text{E abbiamo } \boxed{E(6X - X^2)} = 0 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{6} + 8 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{35}{6}}$$

Osservazione Il primo esercizio mostra che, in generale, $E(X^2)$ non coincide con $(E(X))^2$ — la media dei quadrati non è il quadrato della media. Vale, anzi, il risultato più forte che $E(X^2) \geq (E(X))^2$ e i due numeri sono uguali solo se X è una costante.

Questo giustifica l'idea intuitiva che la differenza fra $E(X^2)$ e $(E(X))^2$ misura quanto la variabile aleatoria X è dispersa intorno al suo valore medio — per esempio, se X è costante, allora non assume valori affatto dispersi, infatti, in questo caso, $E(X^2) - (E(X))^2 = 0$.

Definizione

identità algebrica: sempre vera

La quantità $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$

è detta **varianza** della variabile aleatoria X . La quantità

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ è detta **deviazione standard** di X .

Nota: $\text{Var}(X)$ e $\sigma(X)$ contengono la medesima informazione: si ottengono l'una dall'altra con una radice quadrata o un quadrato. Se X ha delle dimensioni fisiche, per esempio X è una lunghezza, un tempo, una temperatura, allora $\text{Var}(X)$ ha le dimensioni del quadrato di X , mentre $\sigma(X)$ ha le stesse dimensioni di X .

$$[\text{Var}(X)] = [X^2] \quad [\sigma(X)] = [X]$$

Per cui, in particolare, ha senso sommare X e $\sigma(X)$.

Fatto: "È molto probabile che la differenza fra X e la sua media $E(X)$ sia dell'ordine di $\sigma(X)$ ". Formalmente,

per esempio

$$\Pr(E(X) - \sqrt{2} \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \sqrt{2} \sigma(X)) \geq \frac{1}{2}$$

È, più in generale

$$\Pr(E(X) - \frac{1}{\sqrt{1-p}} \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \frac{1}{\sqrt{1-p}} \sigma(X)) \geq p$$

Eg. (dado)

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \overset{\text{calcolati in precedenza}}{\downarrow} \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Usando, invece $E((X - E(X))^2) = E((X - 3.5)^2)$ otteniamo

$(a - 3.5)^2$	6.25	2.25	0.25	0.25	2.25	6.25
a	1	2	3	4	5	6
$P_X(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\frac{35}{12}$$

$$E((X - 3.5)^2) = 6.25 \cdot \frac{1}{6} + 2.25 \cdot \frac{1}{6} + 0.25 \cdot \frac{1}{6} + 0.25 \cdot \frac{1}{6} + 2.25 \cdot \frac{1}{6} + 6.25 \cdot \frac{1}{6} = \frac{35}{12}$$

ad ogni modo $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71$.

Possiamo verificare che

4 casi: $X = 2, 3, 4, 5$

$$P_n(3.5 - 1.71\sqrt{2} \leq X \leq 3.5 + 1.71\sqrt{2}) =$$

$$= P_n(1.08 \leq X \leq 5.92) = \frac{4}{6} \geq \frac{1}{2}$$

fine l.32