

ad ogni modo $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71$.

Possiamo verificare che

4 casi: $X = 2, 3, 4, 5$

$$P_n(3.5 - 1.71\sqrt{2} \leq X \leq 3.5 + 1.71\sqrt{2}) = \\ = P_n(1.08 \leq X \leq 5.92) = \frac{4}{6} \gg \frac{1}{2}$$

fine l.32

Esercizio Si lanciano tre monete indipendenti ed egue.

Consideriamo le seguenti variabili aleatorie

X = numero di teste fra le prime due monete

Y = numero di teste fra le seconde due monete

Trovare la legge e calcolare la media di $X, Y, X+Y$ e $X \cdot Y$.

Soluzione Nel nostro spazio di probabilità, ci sono 8 casi equiprobabili: $\Omega = \{ccc, tcc, ctc, ttc, cct, tct, ctt, ttt\}$.

Ciascuno di questi casi ha probabilità $\frac{1}{8}$. Studiamo i valori delle variabili aleatorie richieste in ciascun caso

	ccc	tcc	ctc	ttc	cct	tct	ctt	ttt
X	0	1	1	2	0	1	1	2
Y	0	0	1	1	1	1	2	2
$X+Y$	0	1	2	3	1	2	3	4
$X \cdot Y$	0	0	1	2	0	1	2	4

Le leggi richieste sono quindi

a	0	1	2
$P_X(a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

a	0	1	2
$P_Y(a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

a	0	1	2	3	4
$P_{X+Y}(a)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

due casi: ccc cct
quattro casi: ctc tcc ctt tct
due casi: ttc ttt

a	0	1	2	4
$P_{X \cdot Y}(a)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Ora è facile calcolare le medie

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$E(X+Y) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 2$$

$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$$

Osservazioni sull'esercizio

- Le due variabili aleatorie X e Y hanno la stessa legge. Questo non stupisce perché entrambe rappresentano il totale di teste su due lanci indipendenti. Due variabili aleatorie che abbiano la stessa legge si dicono isonyme. È importante notare che, sebbene X e Y siano isonyme, esse non sono la stessa variabile aleatoria — non sono, cioè, identiche, quindi intercambiabili fra loro — per esempio $X+Y$ e $X+X$ non sono la stessa cosa.
- Variabili aleatorie isonyme hanno, ovviamente, lo stesso valore atteso, la stessa varianza e la stessa deviazione standard.
- Non bisogna confondere la variabile aleatoria $X+Y$ con il totale di teste delle tre monete. Per esempio, nel caso TTT, $X+Y$ vale 4, mentre il totale di teste 3.
- $E(X) = E(Y) = 1$, come è ragionevole trattandosi del numero medio di teste su due lanci che fanno testa al 50%.
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ questo è un fatto generale.
- $E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$.

Proprietà di valore atteso, varianza e deviazione standard

Indicando con X e Y variabili aleatorie, e con c una costante

$$E(c) = c \quad E(c \cdot X) = c \cdot E(X) \quad E(X+Y) = E(X) + E(Y)$$

$$\text{Var}(c) = 0 \quad \text{Var}(c \cdot X) = c^2 \text{Var}(X) \quad \text{Var}(c+X) = \text{Var}(X)$$

$$\underbrace{\sigma(c) = 0}_{\blacktriangle} \quad \underbrace{\sigma(c \cdot X) = c \cdot \sigma(X)}_{\blacksquare} \quad \underbrace{\sigma(c+X) = \sigma(X)}_{\bullet}$$

▲ $E(c) = c$ dice che se abbiamo una variabile aleatoria che, in realtà, è una costante $\longrightarrow$ assume lo stesso valore, c , in tutti i casi $\longrightarrow$ il valore atteso di questa variabile è, ovviamente, proprio c . Nel linguaggio comune, diremmo che una simile variabile non è aleatoria per niente, ma, come in matematica accettiamo che zero sia una quantità, essenzialmente, perché fa comodo, per la stessa ragione dobbiamo ammettere variabili aleatorie che sono costanti.

■ Queste formule si riferiscono a una variabile aleatoria X scalata del fattore moltiplicativo c . È intuitivo che la media e la deviazione standard $\longrightarrow$ la dispersione di X attorno alla media $\longrightarrow$ scalano come X .

Mentre $\text{Var}(_) = (\sigma(_))^2$ scala col quadrato di X .

Per meglio capire queste formule è opportuno ricordare

che $E(X)$ e $\sigma(X)$ hanno le dimensioni di X mentre

$\text{Var}(X)$ ha le dimensioni di X^2 .

- Abbiamo già notato che $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ risolvendo l'esercizio. Non vale però una formula simile per varianza e deviazione standard. Basta pensare ad una qualsiasi variabile aleatoria X e a $Y = -X$. Qualunque sia $\text{Var}(X)$, abbiamo $\text{Var}(Y) = \text{Var}(-1 \cdot X) = (-1)^2 \cdot \text{Var}(X) = \text{Var}(X)$, però $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X-X) = \text{Var}(0) = 0$. Per varianza e deviazione standard abbiamo solo $\text{Var}(c+X) = \text{Var}(X)$ e $\sigma(c+X) = \sigma(X)$, che dicono che traslare una variabile aleatoria di una costante non cambia la sua dispersione.

Variabili aleatorie indipendenti

Le variabili aleatorie X e Y si dicono **indipendenti** se, presi comunque due insiemi di numeri A e B , gli eventi $\{X \in A\}$ e $\{Y \in B\}$ sono indipendenti.

La definizione formale di variabili indipendenti è un po' scomoda. Essa dice che X e Y sono indipendenti se, in qualunque modo uno prenda un evento che dipende solo da X e uno che dipende solo da Y , ottiene sempre due eventi indipendenti. Per verificare l'indipendenza di due variabili aleatorie sarebbe quindi necessario verificare l'indipendenza di una grandissima quantità di eventi.

In pratica, quindi, assumiamo l'indipendenza di variabili aleatorie realizzate da processi scorrelati: lancio

di due dati, due monete, etc.

Fatto Se X e Y sono indipendenti

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Esercizio Si lanciano 10^6 monete indipendenti. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero totale di teste.

Calcolare $E(X)$ e $\sigma(X)$.

Va da sé che non c'è modo di elencare i 2^{10^6} elementi dello spazio di probabilità, dobbiamo quindi cavarcela sfruttando le proprietà di $E(-)$ e $\sigma(-)$.

Idea chiave: consideriamo 10^6 variabili aleatorie $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10^6}$, una per ogni moneta, definite da

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima moneta fa testa} \\ 0 & \text{se la } i\text{-esima moneta fa croce} \end{cases}$$

Chiaramente, siccome X è il numero totale di teste

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{10^6}$$

Le variabili X_1, X_2 , etc. sono tutte isonome — valgono 0 con probabilità $\frac{1}{2}$ o 1 con probabilità $\frac{1}{2}$. Quindi:

$$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_{10^6}) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E(X)} = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10^6}) = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{10^6 \text{ addendi}} = \boxed{500\,000}$$

Le variabili X_1, X_2 , etc. sono altresì indipendenti: questo ci permette di calcolare la varianza di X .

$$\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \dots = E(X_i^2) - [E(X_i)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_{10^6}) = \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}_{10^6 \text{ addendi}} = 250\,000$$

↑
sfruttando l'indipendenza

Di conseguenza $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 500$

Nota: il numero di teste atteso su un milione di lanci è ovviamente 500 000, ma la deviazione standard solo 500 — un millesimo della media. Questo illustra la legge dei grandi numeri: che il risultato di un gran numero di esperimenti si avvicina al valore atteso al crescere del numero degli esperimenti.

Esercizio Una moneta truccata fa testa con probabilità $\frac{2}{3}$ e croce con probabilità $\frac{1}{3}$. Consideriamo la variabile aleatoria

$$X = \begin{cases} 12 & \text{se la moneta fa testa} \\ 9 & \text{se la moneta fa croce} \end{cases}$$

Calcolare $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Soluzione (metodo 1)

$$E(X) = 12 \cdot \frac{2}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3} = 11$$

$$E(X^2) = 12^2 \cdot \frac{2}{3} + 9^2 \cdot \frac{1}{3} = 123$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2$$

Soluzione (metodo 2)

Definiamo una nuova variabile aleatoria

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se la moneta fa testa} \\ 0 & \text{se la moneta fa croce} \end{cases}$$

Chiaramente $X = 9 + 3Y$ — infatti se la moneta fa testa $Y = 1$ e $X = 12$: $12 = 9 + 3 \cdot 1$; se fa croce $Y = 0$ e $X = 9$: $9 = 9 + 3 \cdot 0$. Calcoliamo $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$.

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(Y^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Abbiamo quindi

$$E(X) = E(9 + 3Y) = 9 + 3E(Y) = 9 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 11$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(9 + 3Y) = 3^2 \cdot \text{Var}(Y) = 9 \cdot \frac{2}{9} = 2$$

Esercizio. Consideriamo un'estrazione casuale che può sortire due risultati: A con probabilità α , e B con probabilità $1-\alpha$.

1. Calcola, in funzione di α , la probabilità che, ripetendo tre volte indipendenti l'estrazione, vengano in totale due A e una B .

2. Per quale valore di α la probabilità che vengano due A e una B è più grande possibile?

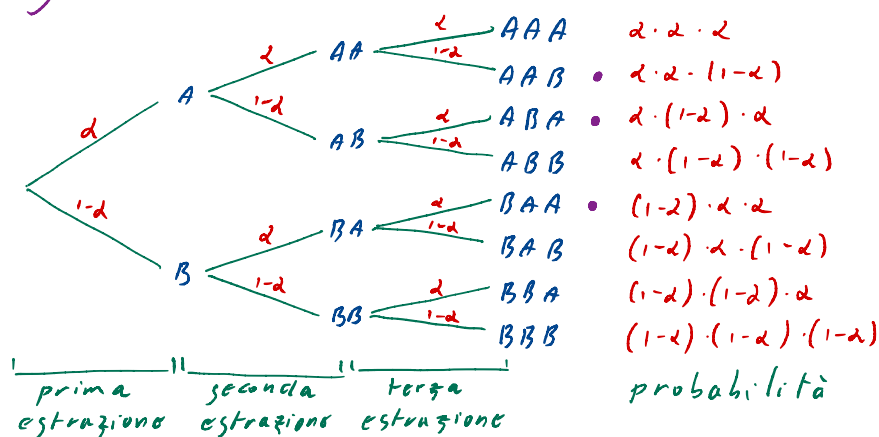
Soluzione

1. Ci sono otto possibili sequenze di tre risultati: l'evento E richiesto è che la sequenza sia AAB o ABA o BAA . La probabilità di ciascuna di queste sequenze è $\alpha \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)$.

$$\text{Quindi } \boxed{\Pr(E) = 3 \alpha^2 (1-\alpha)}$$

Nota. Abbiamo già visto diversi modi per enumerare tutte

le possibilità. Un altro modo è tracciare il grafo ad albero delle scelte.



In questo diagramma, la probabilità della combinazione al termine di ogni ramo è il prodotto delle probabilità lungo il ramo.

Come si vede, i tre casi favorevoli hanno, ciascuno, probabilità $p^2 \cdot (1-p)$.

2. Per dato del problema, sia p che $1-p$ sono probabilità, quindi i valori ammissibili di p sono i numeri fra 0 e 1. Infatti $0 \leq p \leq 1$ poiché p è una probabilità, e $0 \leq 1-p \leq 1$ poiché $1-p$ è una probabilità. Scindendo quest'ultima nelle due disuguaglianze $0 \leq 1-p$ e $1-p \leq 1$, ed esplicitando p , dalla prima otteniamo $p \leq 1$ e dalla seconda $p \geq 0$, quindi, di nuovo $0 \leq p \leq 1$. Dobbiamo quindi trovare p fra 0 e 1 in cui la funzione $f(p) = 3p^2(1-p)$ è massima. La derivata $f'(p) = 6p - 3p^2$ si annulla in $p=0$ e $p=\frac{2}{3}$, dobbiamo quindi confrontare i punti $p=0, \frac{2}{3}, 1$ (estremi del dominio e punti stazionari). Vediamo che $f(0)=0$,

$f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$, $f(1) = 0$. Quindi la probabilità cercata è massima per $\alpha = \frac{2}{3}$ (e, in questo caso, vale $\frac{4}{9}$).

Nota: concorda con quello che si può intuire che, volendo massimizzare la probabilità di ottenere esattamente due A su tre estrazioni, conviene che la probabilità della A sia $\frac{2}{3}$.

ESERCIZIO B dall'esame del 2.V.2019

Dieci persone, sei donne e quattro uomini, partecipano a quattro lotterie diverse (stocasticamente indipendenti), ciascuna delle quali assegna un premio, con probabilità uniforme, a una delle dieci persone.

- B.1 – Quale è la probabilità che tutti i premi vadano alle donne? E la probabilità che nessuno dei premi vada ad una donna?
- B.2 – Considera la variabile aleatoria X che rappresenta il numero di premi che vanno, in totale, alle donne. Determina la legge (detta anche distribuzione) di questa variabile aleatoria, e rappresentala mediante un istogramma.
- B.3 – Calcola valore atteso e varianza della variabile aleatoria X .

B.1 Chiamando D_1, D_2, D_3 e D_4 gli eventi che una donna vinca rispettivamente la prima, seconda, terza e quarta lotteria, abbiamo

$$Pr(D_1) = Pr(D_2) = Pr(D_3) = Pr(D_4) = \frac{6}{10}$$

Ci è chiesto di trovare la probabilità dell'evento

$D =$ "tutti i premi vanno alle donne"

$=$ "una donna vince la prima lotteria e
una donna vince la seconda lotteria e etc."

$$= D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$$

Siccome le lotterie sono indipendenti

$$\boxed{Pr(D)} = Pr(D_1) \cdot Pr(D_2) \cdot Pr(D_3) \cdot Pr(D_4) = \left(\frac{6}{10}\right)^4 = \boxed{\frac{1296}{10000}}$$

Per l'evento

ND = "nessuno dei premi va ad una donna"

basta osservare che

ND = "tutti i premi vanno agli uomini"

Ragionando, quindi, come prima, siccome la probabilità che ciascun premio vada ad un uomo è $\frac{4}{10}$

$$\boxed{Pr(ND)} = \dots = \left(\frac{4}{10}\right)^4 = \boxed{\frac{256}{10000}}$$

Attenzione. L'evento ND "nessuno dei premi va ad una donna" NON è il complementare dell'evento D "tutti i premi vanno alle donne". Il complementare dell'evento D è, invece, "almeno un premio non va ad una donna".

B.2 Il metodo più scolastico consiste nell'enumerazione dei sedici casi possibili; per esempio col metodo dell'albero. Indicando con D o U il genere del vincitore di ognuna delle quattro lotterie, e ricordando che, in ogni lotteria, vince una donna con probabilità $\frac{3}{5}$ e un uomo con probabilità $\frac{2}{5}$, abbiamo il seguente elenco dei casi.

- $X = 4$ $DDDD$ $Pr(X=4) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0.1296$
- $X = 3$ $DDDD$
 $DDVD$
 $DDVD$
 $DDVD$
 $DDVD$ $Pr(X=3) = 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = 0.3456$
- $X = 2$ $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$ $Pr(X=2) = 6 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.3456$
- $X = 1$ $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$ $Pr(X=1) = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.1536$
- $X = 0$ $VVVV$ $Pr(X=0) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0.0256$

Abbiamo, di conseguenza, la legge

x	0	1	2	3	4
$P_X(x)$	0.0256	0.1536	0.3456	0.3456	0.1296

Suggerimento: conviene sempre verificare che la somma di questi numeri faccia 1. Se non è esattamente così, c'è un errore.

La legge di X è rappresentata dall'istogramma

qui a lato. Nota. L'esercizio chiedeva di tracciare

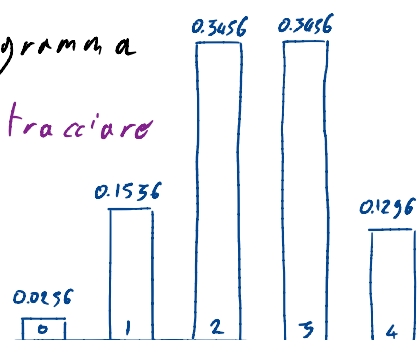
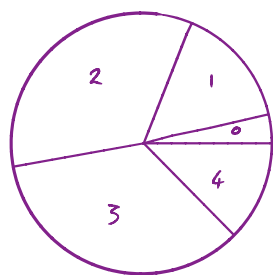
un istogramma, però, siccome la legge di

una variabile aleatoria è un

modo di suddividere la probabilità totale 1 fra

i possibili valori della variabile, anche la richie-

sta di un diagramma a torta avrebbe avuto senso.



B.3 Valore atteso e varianza di X si possono calcolare direttamente facendo uso della legge trovata al punto precedente. Questo metodo è valido. Noi, però, ne seguiamo un altro, simile a quello usato nell'esercizio delle 10⁶ monete.

Definiamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3 e X_4 con

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esima lotteria è vinta da una donna} \\ 0 & \text{se l'i-esima lotteria è vinta da un uomo} \end{cases}$$

Chiaramente $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Le variabili X_i sono indipendenti e isonome con

$$Pr(X_i = 1) = \frac{3}{5} \quad Pr(X_i = 0) = \frac{2}{5}$$

Quindi

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$E(X_i^2) = 1^2 \cdot \frac{3}{5} + 0^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{6}{25}$$

Di conseguenza

$$\boxed{E(X)} = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \boxed{2.4}$$

$$\boxed{Var(X)} = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots = \frac{6}{25} \cdot 4 = \boxed{0.96}$$

Sfruttando l'indipendenza delle lotterie

Qui finisce il nostro corso

Buona fortuna!