

Università di Pisa
Corso di Matematica per CTF
a.a. 2020-21

docente: Marcello Mamino

e-mail: marcello.mamino@dm.unipi.it

sito: <https://ciivil.li/ctf20>

↳ raggiungibile anche sul Moodle di Farmacia

testo consigliato: V. Villani G. Gentili

"Matematica per comprendere
e interpretare fenomeni
delle scienze della vita"

Programma del corso

- Matematica di base {
 - Numeri e notazioni numeriche
 - Algebra elementare
 - Teoria degli errori

- Funzioni e grafici {
 - Funzioni di uso frequente
 - Uso di grafici e tabelle
 - Grafici di vario tipo

- Elementi di analisi {
 - Derivate
 - Equazioni differenziali
 - Integrali definiti

- T. della probabilità {
 - Linguaggio insiemistico
 - Probabilità discreta
 - Variabili aleatorie

Indice

Matematica di base

I numeri	7
Insiemi $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{R}$	10
Eq. alg. elementare	11
Proporzioni e percentuali	23
Esercizi	26
Notazioni numeriche	33
Operazioni in not. sci.	36
Evitare gli errori	38
Unità di misura SI	41
Equivalenze	43
Op. fra grandezze fisiche	45
Cifre significative	46
Arrotondamenti	53
Teoria degli errori	56
Errore assoluto	57
Propagazione degli errori	59
Errori in + e -	65
Errore relativo	65
Errori in $\cdot$ e $/$	66
Esercizi	69

Il simbolo di sommatoria	74
Errori negli esperimenti	75
Errori nei conti	80
<u>Funzioni e grafici</u>	
Concetto di funzione	82
Rappresentazioni di f.	84
Grafici cartesiani	86
Esercizi	91
Funzioni polinomiali	97
Funzioni quadratiche	102
Funzioni lineari	102
Funzioni esponenziali	104
Calcolare 10^x	107
Il numero e	108
Logaritmi	111
Cambiamento di base	114
Crescita esponenziali	116
Esercizi	121
Grafico del logaritmo	125
I limiti	126
Limiti per $x \rightarrow x_0^+$	127

Limiti per $x \rightarrow x_0^-$	123	Esercizi	178
Limiti per $x \rightarrow x_0$	130	<u>Elementi di analisi</u>	
Esercizi	132	Il rapporto incrementale	192
Limiti a $+\infty$	133	La derivata	193
Limiti a $-\infty$	134	Regole di derivazione	194
Continuità	135	Esempi di derivate	195
Limiti di polinomi	136	Grafici e derivate	200
Limiti di esp. e log.	138	Massimi e minimi	205
Funzioni trigonometriche	139	Max/min in $[a, b]$	206
Formule trigonometriche	142	Max/min in generale	208
Funzioni trig. inverse	143	Notazioni per le derivate	210
Funzioni periodiche	146	Esercizi	212
Funzioni limitate	147	Punti stazionari	231
Soluzione numerica di eq.	148	Equazioni differenziali	232
Scale logaritmiche	155	Integrali indefiniti	233
Grafici logaritmici	160	Regole di integrazione	234
G. semi-log $\rightarrow$ espressione	162	Int. per sostituzione	236
Grafici logaritmici	165	Int. per parti	239
Grafico log $\rightarrow$ espressione	166	Eq. diff. lin. del I ord.	243
Altri grafici	167	Eq. diff. lin. del II ord.	246
Esercizi	168	Eq. diff. a variabili sep.	249
Interpolazione lineare	176	Integrali definiti	251

Integrazione numerica	253	Il trucco del complementare	283
Esercizi	259	Esercizi	284
<u>Teoria della probabilità</u>		Le variabili aleatorie	296
Definizioni	263	Legge di una v.a.	297
Operazioni insiemistiche	265	Valore atteso di una v.a.	298
Formule elementari	269	Varianza e dev. standard	300
Probabilità condizionata	273	Proprietà di E , Var , σ	304
Eventi indipendenti	275	V.a. indipendenti	305
Algebra degli insiemi	281	Esercizi	306

Indice degli esercizi d'esame risolti

31. I. 2019 - A	170	23. V. 2019 - B	178
31. I. 2019 - B	207	17. IX. 2019 - A 1, 2	28
31. I. 2019 - C 1, 2	188	15. IV. 2020 - C	69
19. II. 2019 - A	184	28. V. 2020 - B	168
2. V. 2019 - A	260	28. V. 2020 - C	71
2. V. 2019 - B	310	24. VI. 2020 - B	169
2. V. 2019 - C 1	190	24. VI. 2020 - C	124
23. V. 2019 - A 3	284		

Nota: tutte le soluzioni degli esami dell'a.a. 2019-20 sono, inoltre, disponibili sul sito del corso.

Gioco: questa cosa è un numero?

Regole: x è un numero se:

- ha senso confrontare x con altri numeri
- ha senso dire " x metri" e " x grammi"
- x è una quantità limitata e definita esattamente.

- 27 SI
 - ~~XXVII~~ SI
 - $27.00 \cdot 10^0$ SI
- } sono lo stesso numero!

$$27 = \del{XXVII} = 27.00 \cdot 10^0$$

Intermezzo: il simbolo =

$\heartsuit = \spadesuit$ equivale a " $\heartsuit$ e $\spadesuit$ sono la stessa cosa"

ESEMPI

- Uguglianze numeriche

$$7 = 7 \quad 7 + 2 = 9 \quad 9 = 7 + 2 \quad 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

l'uguale  non ha una "direzione" 

- Uguglianze algebriche — quando scriviamo:

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

intendiamo dire: "qualunque sia il valore numerico di x , il risultato dell'operazione $(x+1)^2$ e quello dell'operazione $x^2 + 2x + 1$ coincidono".

• Equazioni — "Risolvi l'equazione $x^2 - x = 2$!"
 significa: "È un dato di fatto che il risultato di $x^2 - x$ e 2 sono la stessa cosa. Sapendo questo, fai il lavoro del detective, e scopri x !"

In questo caso l'equazione ha due soluzioni, -1 e 2, infatti:

$$\underline{(-1)}^2 - \underline{(-1)} = 2$$

-1 al posto di x

$$\underline{2}^2 - \underline{2} = 2$$

2 al posto di x

mentre qualunque altro numero, messo al posto di x , produrrebbe un risultato diverso da 2. Quindi, dire "le soluzioni sono -1 e 2" significa dire "i sospetti che corrispondono all'identikit $x^2 - x = 2$ sono -1 e 2". Se, per esempio, x rappresenta una quantità fisica, la sola equazione $x^2 - x = 2$ non ci permette di capire esattamente quale sia questa quantità. Ci permette di dire, però, che o è 2 o è -1, ed escludere ogni altro caso.

• $\sqrt{7}$ SI

• $1 \pm \sqrt{2}$ NO è $\{1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}\} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$
 insieme di due numeri ↑

nota: gli insiemi sono disordinati

$$\{a, b, c, d\} = \{b, d, a, c\} = \{c, b, d, a\} = \text{etc.}$$

• 050 2212175 **NO** $\stackrel{?}{=} 502212175$

telefono del rettore dell'università | Un numero di telefono è una sequenza di cifre, e non rappresenta una quantità (terza regola del gioco). Per esempio aggiungere o togliere zeri all'inizio invaliderebbe un numero di telefono.

• $7+15=22$ **NO** è l'affermazione " $7+15$ fa 22"

• 2.54 cm **NO** è una lunghezza, la combinazione del numero 2.54 e l'unità di misura cm. Per esempio la medesima lunghezza può essere espressa da altre combinazioni: $2.54 \text{ cm} = 1 \text{ in.}$ ← "inch" ossia "pollice".

• ∞ **NO** non è una quantità limitata

• x tale che $x+2=-x$ **SI** $\xrightarrow{2x=-2 \Rightarrow x=-1}$ è il numero -1

• x tale che $x^2=2$ **NO** potrebbe essere $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$

• x tale che $\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-2}$ **NO** non c'è nessun valore di x che va bene. Infatti, se ci fosse, potremmo eseguire i passaggi a sinistra e raggiungere una conclusione falsa.

inverti ad ambo i membri $\rightarrow \cancel{x+2} = \cancel{x-2}$
 sottraigo x ad ambo i membri $\rightarrow +2 = -2$
FALSO

Insiemi di numeri di uso comune

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

- numeri "naturali" o "interi non-negativi"

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

- numeri interi (tod. Zahlen, numeri)

$$\mathbb{Q} = \{\dots, -\frac{10}{3}, -2, -\frac{1}{7}, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{5}, 54, \dots\}$$

- numeri razionali

$$\mathbb{R} = \{\dots, -\frac{10}{3}, -\sqrt{2}, -1, 0, \pi, \pi^\pi, \dots\}$$

- numeri reali

Il simbolo $\in$ si legge "appartiene" e denota il fatto che l'oggetto a sinistra è un membro dell'insieme a destra. Per esempio:

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \quad \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{Z} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{N}$$

$$-2 \in \mathbb{R} \quad -2 \in \mathbb{Q} \quad -2 \in \mathbb{Z} \quad -2 \notin \mathbb{N}$$

Il simbolo $\subseteq$ si legge "è sottoinsieme di" e denota il fatto che tutti i membri dell'insieme a sinistra sono altresì membri dell'insieme a destra.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

fine l. 1

Esercizi di algebra elementare

E5 - risolvi l'equazione:

$$(x+1)^4 = (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x$$

Dobbiamo, intanto, semplificare l'equazione. Il metodo meno sofisticato è, chiaramente, sviluppare le potenze:

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

$$(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$$

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

Non è necessario ricordare a memoria queste formule, perché, all'occorrenza, si possono ricavare iterando calcoli più semplici. Per esempio:

$$(x+1)^4 = ((x+1)^2)^2 = (x^2 + 2x + 1)^2 = \dots$$

Tornando, però, all'esercizio originale, proviamo a svolgere i calcoli in una maniera diversa.

Sfruttiamo la formula $\square^2 - \Delta^2 = (\square + \Delta)(\square - \Delta)$

$$(x+1)^4 = (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x$$

$$(x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2 = 4(x^3-3x^2+3x-1) + 12x$$

$$(2x^2+2x+2) \cdot 2x = 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 + 12x$$

$$\cancel{4x^3} + \cancel{4x^2} + \cancel{4x} = \cancel{4x^3} - \overset{3}{\cancel{12x^2}} + \overset{6}{\cancel{24x}} - \overset{1}{\cancel{4}}$$

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

Abbiamo quindi le soluzioni $\frac{5 \pm \sqrt{9}}{8}$, ossia $x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{4}$.

Nota importante

A questo punto è fondamentale controllare la correttezza della soluzione. Un risultato sbagliato non vale niente, anzi, reca un danno se costituisce la base di calcoli successivi. Questa verifica non deve essere fatta per esteso: apparirebbe goffa e ridondante. Tuttavia, non farla significa esporre al rischio di vedere il proprio lavoro distrutto da un errore di calcolo, ed è un rischio stupido.

A scopo didattico, facciamo una verifica per iscritto. Nella pratica, poi, uno fa questi calcoli mentalmente o in brutta copia. Abbiamo trovato le soluzioni 1 e $\frac{1}{4}$. Ci accontenteremo di controllare il valore 1, ragionando che difficilmente un errore di calcolo può sovvertire una soluzione sola.

$$(x+1)^4 = (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x$$

$$\underbrace{(1+1)^4}_{16} = \underbrace{(1^2+1)^2}_4 + \underbrace{4(1-1)^3}_0 + \underbrace{12 \cdot 1}_{12} \quad \underline{OK}$$

Es - semplifica l'espressione:

$$(a+b-c) \cdot (a-b+c) + (b+c)^2$$

Anche in qui possiamo sviluppare i prodotti:

$$(a+b-c) \cdot (a-b+c) = a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ac} + \cancel{ab} - b^2 + bc - \cancel{ac} + bc - c^2 \\ = a^2 - b^2 - c^2 + 2bc$$

$$(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc$$

$$(a+b-c) \cdot (a-b+c) + (b+c)^2 = a^2 - \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + 2bc + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + 2bc \\ = \boxed{a^2 + 4bc}$$

Oppure possiamo cercare di essere creativi usando la formula $\square^2 - \Delta^2 = (\square + \Delta)(\square - \Delta)$

$$(a+b-c) \cdot (a-b+c) + (b+c)^2 = \\ \underbrace{(a+(b-c)) \cdot (a-(b+c))}_{\downarrow} + (b+c)^2 = \\ \underbrace{a^2 - (b-c)^2 + (b+c)^2}_{\downarrow} = \\ a^2 + \underbrace{[(b+c) + (b-c)] \cdot [(b+c) - (b-c)]}_{\substack{2b \quad 2c}} = \\ \boxed{a^2 + 4bc}$$

Comunque si proceda, in questo calcolo è facile sbagliare, ottenendo, per errore, $a^2 + 2bc$, o $+5bc$, etc. Anche qui, in brutta copia, dobbiamo fare una verifica. Basterà sostituire alcuni valori numerici alle variabili. Per esempio:

$$a=b=c=1 \quad (1+1-1) \cdot (1-1+1) + (1+1)^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \quad \text{OK}$$

$$a=b=1, c=0 \quad (1+1-0) \cdot (1-1+0) + (1+0)^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 0 \quad \text{OK}$$

E5 - semplifica
$$\frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{x^2 - 3x - 18}$$

Notiamo, intanto, che è possibile trarre a fattor comune una x dal numeratore, ottenendo

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{x^2 - 3x - 18} = \frac{x(x^2 + 10x + 21)}{x^2 - 3x - 18}$$

Ora, per investigare la possibilità di semplificare la frazione, occorre fattorizzare i polinomi di secondo grado $x^2 + 10x + 21$ e $x^2 - 3x - 18$. C'è più di un approccio che possiamo seguire.

Fatto: consideriamo il polinomio $ax^2 + bx + c$. Sia $\Delta = b^2 - 4ac$ il discriminante dell'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$. Allora sono possibili tre casi

- Se $\Delta < 0$, allora $ax^2 + bx + c$ non si fattorizza.
- Se $\Delta = 0$, allora l'equazione $ax^2 + bx + c = 0$ ha una sola soluzione, e, detta x_0 questa soluzione

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$$

- Se $\Delta > 0$, l'equazione ha due soluzioni x_1, x_2 e

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Applicando questo fatto a $x^2 + 10x + 21$, otteniamo $\Delta = 16$, quindi $x_{1,2} = -5 \pm 2$, e $x^2 + 10x + 21 = (x + 7)(x + 3)$.

Procedendo allo stesso modo per il denominatore

$$\frac{x(x^2 + 10x + 21)}{x^2 - 3x - 18} = \frac{x(x+7)\cancel{(x+3)}}{(x-6)\cancel{(x+3)}} = \boxed{\frac{x(x+7)}{x-6}}$$

L'esercizio è concluso, ma notiamo che l'ultima uguaglianza non è tecnicamente corretta, perché, per $x = -3$, l'espressione a sinistra si riduce a $\frac{0}{0}$ che non ha senso, mentre a destra abbiamo $\frac{-12}{-9}$. Nell'uguaglianza

$$\frac{x(x+7)(x+3)}{(x-6)(x+3)} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

Non è, quindi, vero che il membro di destra ed il membro di sinistra rappresentano la stessa cosa qualunque sia il valore assegnato ad x . Questo accade, in realtà, per ogni valore di x eccetto -3 , per cui, se vogliamo essere molto scrupolosi, dobbiamo aggiungere alla nostra soluzione le parole "per $x \neq -3$ ". Nel nostro corso, possiamo fare a meno di questo sussiego, basterà avere presente che stiamo perpetrando un piccolo abuso del simbolo $=$.

È possibile risolvere il medesimo esercizio in maniera diversa. Per esempio, possiamo usare:

Teorema (di Ruffini) — Un polinomio $p(x)$ si fattorizza nella forma $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ se e solo se $p(x_0) = 0$.

In pratica, se abbiamo una soluzione x_0 della equazione $p(x)=0$, allora la regola di Ruffini ci assicura che possiamo scrivere

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (\text{un polinomio opportuno})$$

Una volta scoperta, o indovinata, la soluzione x_0 , il polinomio opportuno si può costruire semplicemente per aggiustamenti successivi.

Esempio: $p(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6$ $x_0 = 1$

Vediamo subito che $p(x_0) = 1 + 1 - 3 + 7 - 6 = 0$. Scriviamo:

$$x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 = (x - 1) \cdot (\quad ? \quad)$$

siccome vogliamo ottenere $x^5 + \dots$ nella parentesi dovremo scrivere un x^4

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x - 1) \cdot (x^4 + \dots \quad ? \quad) \\ &= x^5 - x^4 + \dots \end{aligned}$$

ora, il termine di quarto grado a destra ci viene $-x^4$, ma noi volevamo ottenere $+x^4$, dobbiamo quindi correggere aggiungendo $+2x^3$ nella parentesi

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x - 1) \cdot (x^4 + 2x^3 + \dots \quad ? \quad) \\ &= x^5 + x^4 - 2x^3 + \dots \end{aligned}$$

ora i monomi x^5 e x^4 sono giusti, ma al grado tre, a sinistra non c'è alcun monomio, mentre, a destra, ci viene $-2x^3$, dobbiamo quindi aggiungere

nella parentesi $+2x^2$ per cancellarlo

$$\begin{aligned}x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x-1) \cdot (x^4 + 2x^3 + 2x^2 + \dots ?) \\ &= x^5 + x^4 - 2x^2 + \dots\end{aligned}$$

Adesso bisogna aggiungere l'addendo di secondo grado. Procedendo così, alla fine, arriviamo a

$$\begin{aligned}x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x-1) \cdot (x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 6) \\ &= x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 \quad \underline{\text{ok}}\end{aligned}$$

Come si vede, alla fine, l'uguaglianza è soddisfatta.

Per tornare all'esercizio, per esempio, una volta fattorizzato il numeratore come $(x+7)(x+3)$, sappiamo che questi sono gli unici fattori che possiamo aver speranza di semplificare. Quindi, usando il teorema di Ruffini, possiamo verificare se questi fattori siano divisori del denominatore, controllando se il denominatore si annulla in -7 o -3 . Se sì, determiniamo la scomposizione come nell'esempio.

Ci sono ancora altre tecniche, che non sempre si insegnano nelle scuole. Per esempio l'algoritmo di Euclide è un modo diretto per scoprire se c'è e qual è il fattore che può essere semplificato. Esso si basa sull'idea seguente, ma, in generale, i passaggi sono più complicati.

Idem: se possiamo fare la semplificazione

$$\frac{\text{numeratore}}{\text{denominatore}} = \frac{\cancel{A} \cdot B}{\cancel{A} \cdot C} = \frac{B}{C}$$

allora

$$\text{numeratore} - \text{denominatore} = AB - AC = A \cdot (B - C)$$

$$\text{II} \\ (x^3 + 10x + 21) - (x^2 - 3x - 18) = 13x + 39 = 13 \overbrace{(x+3)}^{\ddot{}}$$

Non è richiesto di conoscere tutti i modi di venire a capo di questi calcoli: basta saper trovare la soluzione in qualche modo. Ripetiamo ancora una volta — quando si è trovata la soluzione

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{x^2 - 3x - 18} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

è consigliabile fare, in brutta copia, qualche verifica numerica.

E₅ - risolvi l'equazione: $\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3x^2+4x+1}$

In questa equazione sono presenti dei denominatori, bisognerà quindi gestire il fatto che i due membri dell'equazione non sono definiti (vale a dire non hanno senso, non sono numeri) quando un denominatore si annulla. Provvisoriamente, ignoriamo

questa difficoltà, e procediamo a risolvere la equazione come se fosse ben definita per ogni valore della x . Potremmo avere la tentazione di portare tutte le frazioni allo stesso membro

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x^2+4x+1} = 0$$

e poi ridurle a comun denominatore, però il calcolo si prospetta complicato. Forse, conviene separare le due frazioni più semplici dalla terza

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3x^2+4x+1}$$

$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{3x^2+4x+1}$$

$$x^2+x = 3x^2+4x+1$$

$$2x^2+3x+1 = 0 \rightarrow x = \begin{matrix} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{matrix}$$

eseguendo la medesima operazione su cose uguali si ottengono cose uguali: invertiamo ambo i membri

Ora abbiamo ottenuto le soluzioni: $-\frac{1}{2}$ e -1 , però dobbiamo assicurarci che l'equazione sia ben definita per questi valori di x . Possiamo procedere sostituendo i valori -1 e $-\frac{1}{2}$ nei denominatori, così scopriamo che $x+1$ si annulla in $x=-1$, mentre nessuno dei denominatori si annulla in $x=-\frac{1}{2}$, quindi $\boxed{x=-\frac{1}{2}}$ è l'unica soluzione accettabile. In alternativa, possiamo risolvere le equazioni: $x=0$, $x+1=0$, $3x^2+4x+1=0$, quindi

escluderemo quelle fra -1 e $-\frac{1}{2}$ che sono anche soluzioni di una di queste equazioni. fino l. 2

Eg- Risolvi la seguente disequazione

$$\frac{1}{x+1} \leq 2x+3$$

Un modo di procedere è portare tutti i termini della disequazione al primo membro e poi ridurre a comun denominatore

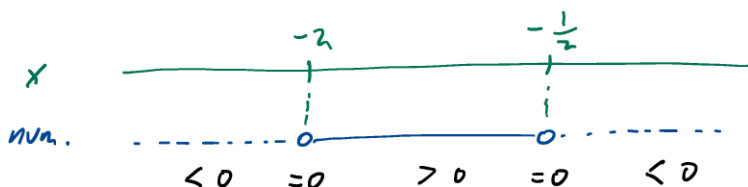
$$\frac{1}{x+1} - 2x - 3 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1 - (2x+3)(x+1)}{x+1} \leq 0$$

$$\frac{-2x^2 - 5x - 2}{x+1} \leq 0$$

A questo punto studiamo il segno di numeratore e denominatore separatamente, in funzione di x .

Numeratore: $-2x^2 - 5x - 2$

si annulla in $\frac{5 \pm \sqrt{9}}{-4} \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$
 siccome il segno del coefficiente di x^2 è negativo, il numeratore è positivo fra questi due valori.

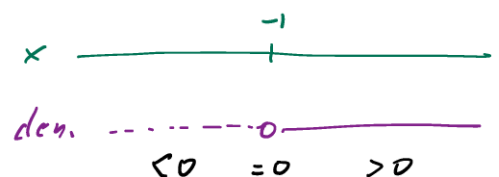


Denominatore: $x+1$

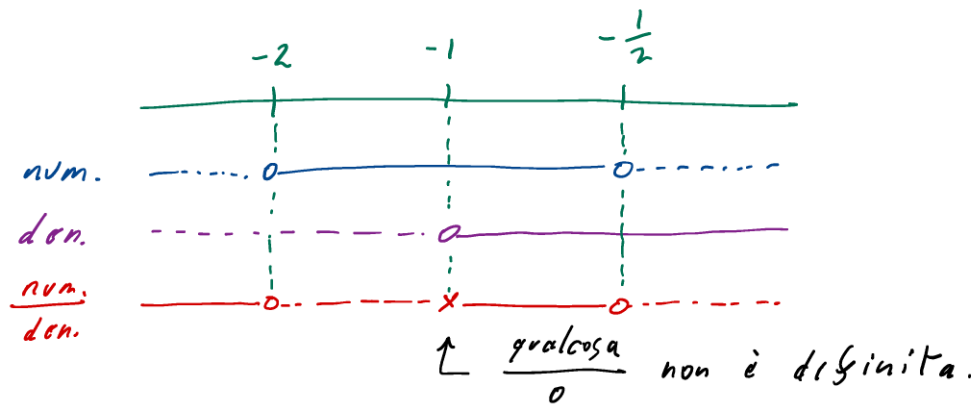
$$x+1 < 0 \iff x < -1$$

$$x+1 = 0 \iff x = -1$$

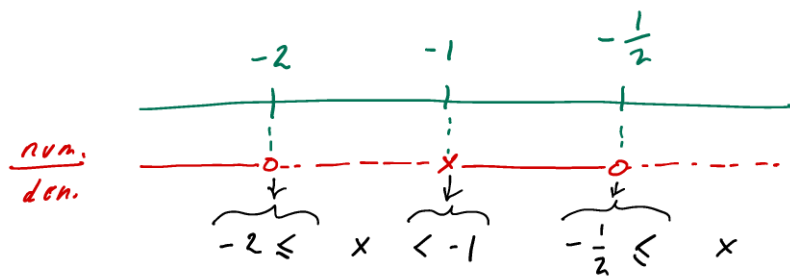
$$x+1 > 0 \iff x > -1$$



Combiniamo queste informazioni in un unico diagramma per mezzo della regola dei segni ($\frac{+}{+} = \frac{-}{-} = +$, $\frac{+}{-} = \frac{-}{+} = -$, etc.)



Infine leggiamo dal disegno la soluzione, ossia i valori di x per cui $\frac{num.}{den.} \leq 0$



$$\boxed{-2 \leq x < -1 \text{ oppure } -\frac{1}{2} \leq x}$$

Un altro modo di risolvere l'esercizio e procedere come segue

① Risolviamo l'equazione $\frac{1}{x+1} = 2x+3$ ignorando i problemi di annullamento del denominatore.

$$\frac{1}{x+1} = 2x+3 \Rightarrow 1 = (2x+3)(x+1) \Rightarrow 2x^2+5x+2=0 \begin{cases} \nearrow x=-2 \\ \searrow x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

② Troviamo i punti di annullamento dei denominatori.

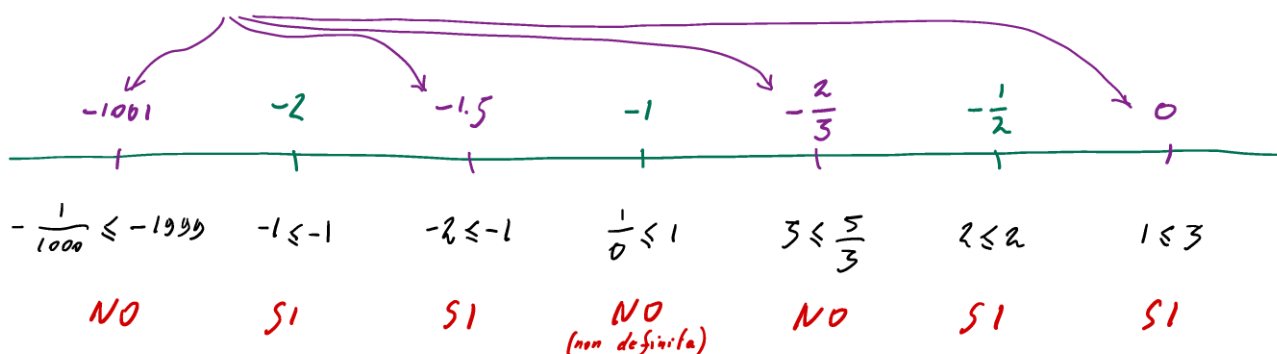
In questo caso c'è l'unico denominatore $x+1$.

$$x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-1$$

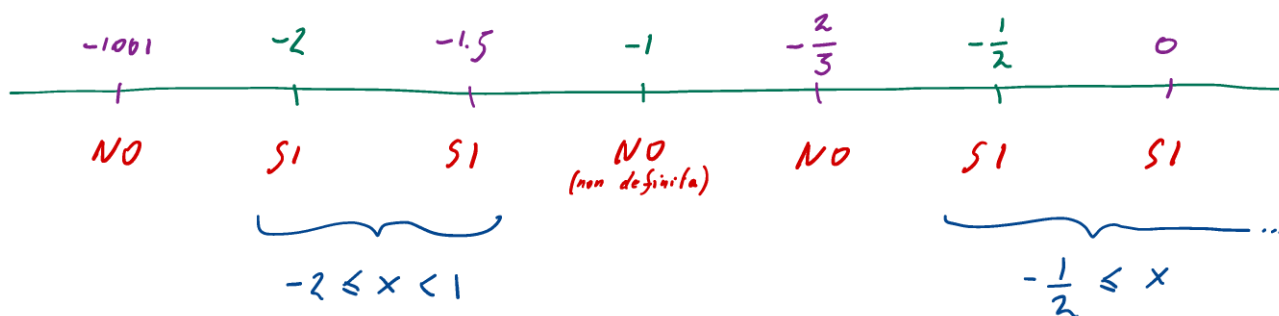
③ Individuiamo i numeri calcolati in ① e ② su una retta



④ Verifichiamo la disuguaglianza data $\frac{1}{x+1} \leq 2x+3$ nei punti indicati sul diagramma e negli intervalli fra di essi, usando, per ciascun intervallo, un valore arbitrario in esso contenuto.



Come prima, la soluzione si legge da questo diagramma



$$\boxed{-2 \leq x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\frac{1}{2} \leq x}$$

Proporzioni & percentuali

La proporzione

$$A : B = C : D$$

equivale — vale a dire che è un modo alternativo di scrivere

$$A \cdot D = B \cdot C$$

ossia, se non siamo troppo formali a proposito della possibilità che si annullino denominatori

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

In pratica, quindi, i segni $:$ in $A : B = C : D$ sono semplicemente dei diviso, o, che è lo stesso, delle linee di frazione. Spesso, ma non esclusivamente, si usa la scrittura $A : B = C : D$ per suggerire che A e C rappresentano parti il cui totale è rispettivamente B e D .

Denominatori convenzionali — percentuali

Nelle situazioni in cui si parla di una parte ed un tutto, frequentemente, si rappresenta la frazione $\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$ raggrontando il tutto ad una quantità convenzionale. Nascono così le **percentuali**, quando si usa **100** per indicare la totalità, e, per esempio,

le parti per milione (ppm) quando il termine di paragone è 1.000.000 — questa ultima si usano spesso per indicare frazioni molto piccole, concentrazioni di impurità nei reagenti chimici, etc.

In pratica:

$$A \text{ è l' } x\% \text{ di } B \iff A:B = x:100 \iff A \cdot 100 = B \cdot x$$

Incrementare una quantità dello $x\%$ significa aggiungere a questa quantità il suo $x\%$, che, algebricamente, equivale a moltiplicare la quantità per $1 + \frac{x}{100}$.

Simmetricamente, diminuire una quantità dello $x\%$ significa moltiplicarla per $1 - \frac{x}{100}$.

$$\text{Aumentare dello } x\% \iff \text{Moltiplicare per } 1 + \frac{x}{100}$$

$$\text{Diminuire dello } x\% \iff \text{Moltiplicare per } 1 - \frac{x}{100}$$

Es. Il prezzo dell'oro sale del 10% , poi scende del 10% . In totale quale è stata la variazione percentuale del prezzo dell'oro?

L'esercizio coinvolge tre prezzi: un prezzo iniziale, uno intermedio, e uno finale. Abbiamo

$$\text{intermedio} = \text{iniziale} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100}\right)}_{1.1} \quad \text{finale} = \text{intermedio} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{10}{100}\right)}_{0.9}$$

Combinando queste due relazioni otteniamo

$$\text{finale} = \text{iniziale} \cdot 1.1 \cdot 0.9 = \text{iniziale} \cdot 0.99$$

Il prezzo, in totale, è quindi sceso. Per trovare di quanto, dobbiamo scrivere 0.99 nella forma $1 - \frac{x}{100}$

$$0.99 = 1 - \frac{x}{100} \Rightarrow \frac{x}{100} = 1 - 0.99 \Rightarrow x = 1$$

Di conseguenza, il prezzo è sceso dell'1%.

E.s. Il prezzo del petrolio scende del 10%, poi sale del 10%, di quanto cambia in percentuale?

Qui crescita e decrescita sono scambiate rispetto all'esercizio precedente. Procediamo con lo stesso metodo.

$$\text{intermedio} = \text{iniziale} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{10}{100}\right)}_{0.9} \quad \text{finale} = \text{intermedio} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100}\right)}_{1.1}$$

$$\text{finale} = \text{iniziale} \cdot 0.9 \cdot 1.1 = \text{iniziale} \cdot 0.99$$

Nuovamente moltiplichiamo il prezzo per 0.99, quindi il risultato è il medesimo dell'esercizio precedente.

Nota: non è un caso che questi due risultati coincidano. Infatti, abbiamo detto che incrementare o decrementare una quantità di una certa percentuale equivale a moltiplicarla per determinati fattori. Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia. Di conseguenza, cambiando l'ordine

delle variazioni percentuali, il valore finale non cambia.

$$\begin{aligned} \text{finale} &= \text{iniziale} \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 1}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 2}}{100}\right) \\ &= \text{iniziale} \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 2}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 1}}{100}\right) \end{aligned}$$

Percentuali facili da ricordare

1%	$\frac{1}{100}$	99%	$\frac{99}{100}$
2%	$\frac{1}{50}$	98%	$\frac{49}{50}$
5%	$\frac{1}{20}$	95%	$\frac{19}{20}$
10%	$\frac{1}{10}$	90%	$\frac{9}{10}$
20%	$\frac{1}{5}$	80%	$\frac{4}{5}$
25%	$\frac{1}{4}$	75%	$\frac{3}{4}$
33%	$\approx \frac{1}{3}$	67%	$\frac{2}{3}$
50%	$\frac{1}{2}$		

Eg — Inizialmente i marziani verdi sono $\frac{2}{7}$ dei $\frac{5}{5}$ del totale dei marziani. Il 25% dei marziani emigra verso Venere, e, di questi, la metà è verde. Dopo la migrazione, che percentuale dei marziani rimasti è verde? Questo esercizio concerne due partizioni dell'insieme di tutti i marziani. Una è la divisione VERDE - NON VERDE e una la divisione EMIGRATO - RIMASTO. Possiamo quindi

schematizzare la situazione in questo diagramma

	VERDI	NON VERDI	
EMIGRATI	VE	$\bar{V}E$	$VE = \text{frazione di VERDI EMIGRATI}$
RINASTI	$V\bar{E}$	$\bar{V}\bar{E}$	$\bar{V}E = \text{NON VERDI EMIGRATI}$
			$V\bar{E} = \text{VERDI NON EMIGRATI}$
			$\bar{V}\bar{E} = \text{NON VERDI NON EMIGRATI}$

I dati dell'esercizio sono i seguenti:

- la frazione dei marziani verdi è $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$, ossia la somma dei numeri sulla prima colonna è $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$
- la frazione dei marziani emigrati è il 25%, ossia la somma dei numeri sulla prima riga è $\frac{1}{4}$
- gli emigrati verdi sono la metà del 25%, ossia il numero nella casella in alto a sinistra è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$		← somma $\frac{1}{4}$

$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{8}$
 $\frac{13}{280}$

↑ somma $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$

A questo punto non è difficile completare la tabella

$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4} - \frac{1}{8}$
$\frac{13}{280}$	$\frac{187}{280}$	

$\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5} - \frac{1}{8}$

Il totale delle caselle deve fare 1. Avendo calcolato le altre caselle, l'ultima è quindi obbligata a valere 1 - la loro somma.

La domanda dell'esercizio è
 che percentuale dei marziani rimasti è verde?
 Quando viene chiesta una percentuale, bisogna capire
 quali siano questi due elementi: la parte e il tutto.
 Nel nostro caso abbiamo

$$\text{tutto} = \text{marziani rimasti} = \sqrt{0} + \sqrt{1} = \frac{3}{4}^*$$

$$\text{parte} = \text{marziani rimasti che sono verdi} = \sqrt{1} = \frac{13}{280}$$

Risolvi la proporzione

$$\text{parte} : \text{tutto} = \text{percentuale} : 100$$

$$\text{percentuale} = \frac{13}{280} \cdot \frac{4}{3} \cdot 100 = \frac{130}{21} \approx 6.19$$

La risposta è quindi il 6.19 %

* Nota: questo numero si può calcolare facendo $\frac{13}{280} + \frac{187}{280}$,
 però anche, più semplicemente, ricordando che

$$\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{0} = 1 \quad \text{e} \quad \sqrt{0} + \sqrt{1} = \frac{1}{4}, \quad \text{da cui}$$

$$\sqrt{1} + \sqrt{0} = (\sqrt{0} + \sqrt{1} + \sqrt{1} + \sqrt{0}) - (\sqrt{0} + \sqrt{1}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{fine 1.3}$$

E5 (esame scritto del 17.11.2019 — ES A1 e A2)

In un collegio per studenti ci sono camere doppie e
 camere singole. Le doppie sono il doppio delle singole,
 il 10% delle doppie è al pian terreno, e il 20% delle
 singole è al pian terreno.

1- Quale percentuale delle camere del pian terreno è costituita da doppie?

Procediamo come nell'esercizio precedente. Nuovamente abbiamo due distinzioni: SINGOLA - DOPPIA e TERRENO - ALTO.

	SINGOLA	DOPPIA	
ALTO	AS	AD	AS = frazione di SINGOLE in ALTO AD = " DOPPIE in ALTO
TERRENO	TS	TD	TS = " SINGOLE al p. TERRENO TD = " DOPPIE al p. TERRENO

Il testo dice che la colonna $AD+TD$ è il doppio di $AS+TS$.
Scrivendo $D=AD+TD$ e $S=AS+TS$ abbiamo:

$$\begin{cases} D = 2S \\ D + S = 1 \end{cases} \Rightarrow S = \frac{1}{3} \quad D = \frac{2}{3}$$

Inoltre il 10% delle doppie è al pian terreno

$$TD : D = 10 : 100 \Rightarrow TD = \frac{2}{30}$$

e il 20% delle singole è al pian terreno

$$TS : S = 20 : 100 \Rightarrow TS = \frac{2}{30}$$

È quindi facile completare la tabella. $\Rightarrow$

La percentuale richiesta è definita da

$$TOTALE = TS + TD = \frac{4}{30} \quad PARTE = TD = \frac{2}{30}$$

La risposta è quindi 50%.

	SINGOLA	DOPPIA
ALTO	$\frac{8}{30}$	$\frac{10}{30}$
TERRENO	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$

2- Che percentuale degli studenti che abitano al pian terreno è in singola?

Per rispondere a questa domanda, prestiamo attenzione al fatto che si parla di studenti e non di camere.

Le camere singole sono abitate da uno studente, e le doppie da due. Se denotiamo con C il numero totale delle camere, vediamo che

$$\text{ST. AL P. TERRENO IN SINGOLA} = C \cdot TS \cdot 1 = C \cdot \frac{2}{30}$$

$$\text{ST. AL P. TERRENO IN DOPPIA} = C \cdot TD \cdot 2 = C \cdot \frac{4}{30}$$

Quindi

$$\text{ST. AL P. TERRENO TOTALI} = C \cdot TS \cdot 3 = C \cdot \frac{6}{30}$$

Da cui si ricava la percentuale richiesta

$$\frac{\text{ST. AL P. TERRENO IN SINGOLA}}{\text{ST. AL P. TERRENO TOTALI}} = \frac{\cancel{C} \cdot \frac{2}{\cancel{30}}}{\cancel{C} \cdot \frac{6}{\cancel{30}}} = \frac{2}{6} \approx \boxed{33\%}$$

3- Le camere doppie non sono mai abitate da due studenti di sessi opposti. Inoltre, metà del totale delle camere è abitata da studentesse, e l'altra metà da studenti maschi. Diciamo che l' $x\%$ delle camere doppie è abitata da studentesse, e l' $y\%$ della studentesse è in doppia. Che relazione (che formula lega x e y)?

Ora il totale delle camere si divide lungo due nuovi assi: MASCHILE - FEMMINILE e SINGOLA - DOPPIA.

	singole doppie			
femmin.	SF	DF	$\frac{1}{2}$	DF = " doppio gemminili "
masch.	SM	DM	$\frac{1}{2}$	SM = " single maschili "
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		DM = " doppio maschili "

← calcolato alla domanda →

Il testo ci dice che

$$x : 100 = DF : \overbrace{(DM + DF)}^{= \frac{2}{3}}$$

quindi

$$DF = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100}$$

Per quanto riguarda y , indicando di nuovo con C il totale delle camere, abbiamo

$$\text{num. studentesse in doppia} = C \cdot DF \cdot 2$$

$$\text{num. studentesse} = C \cdot DF \cdot 2 + C \cdot SF = C \cdot (DF \cdot 2 + SF)$$

$$y : 100 = \cancel{C} \cdot DF \cdot 2 : \cancel{C} \cdot (DF \cdot 2 + SF)$$

$$y = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + SF}$$

Il nostro scopo è capire come si calcola y a partire da x . Ora sappiamo andare da x a DF , ma per poi ottenere y vediamo che serve anche SF . Occorre quindi un modo per calcolare SF o direttamente da x , o da DF . Per fortuna sappiamo che metà delle camere sono gemminili:

$$SF + DF = \frac{1}{2} \implies SF = \frac{1}{2} - DF$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$y = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + SF} = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + \frac{1}{2} - DF} = \cancel{100} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100} \cdot 2}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100}}$$

moltiplicando per
6 num. e denom.

$$= \frac{8x}{3 + 4 \cdot \frac{x}{100}}$$

Per verificare i calcoli possiamo risolvere separatamente un caso particolare dell'esercizio, e controllare che, in questo caso almeno, la formula funzioni. Immaginiamo, per esempio, che tutte le studentesse siano in doppia, dovrà quindi venirci $y=100$. La situazione è questa

Quindi $\frac{DF}{\text{tot. doppie}} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$, ossia i $\frac{3}{4}$ delle doppie sono femminili, e $x=75$.

Se non abbiamo sbagliato, mettendo $x=75$ nella nostra formula, dovremmo ottenere $y=100$. Proviamo:

singole doppie

	sf	df	
femmin.	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
masch.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

$$y = \frac{8x}{3 + 4 \cdot \frac{x}{100}} = \frac{8 \cdot 75}{3 + 4 \cdot \frac{75}{100}} = \frac{600}{3 + \frac{300}{100}} = 100 \quad \text{😊}$$

Modi di scrivere i numeri reali

• Notazioni algebriche

$$\sqrt{2}, 2\pi, \sin(30^\circ), e^{2.5}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0$$

pro: notazione assolutamente precisa

contro: è difficile farsi un'idea concreta dei numeri

es. $\sqrt{10}$ è più o meno di π ?

e^π " $\pi+20$?

• Notazione decimale

$$1.41, -42, 3.1415..., 128\,000\,000, 0.000\,000\,012\,345$$

pro: elementare confrontare e manipolare numeri

contro: alcuni numeri devono essere troncati

$$\text{es. } \pi = 3.1415..., \sqrt{2} = 1.4142..., \frac{1}{3} = 0.3333...$$

scomodo gestire numeri molto grandi o piccoli

$$\text{es. } 0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,27 \text{ contro } 2.7 \cdot 10^{-13}$$

$$\text{il numero di Avogadro } \approx 6.02 \cdot 10^{23}$$

Nota: conviene fare attenzione a non confondere il separatore decimale con il simbolo che separa gli elementi di una lista. Questa lista: 2.7, 4, 0.54, 37.64, 92 - sebbene scritta senza colori 2.7, 4, 0.54, 37.64, 92 - rimane leggibile senza ambiguità. Se ora rimpiazziamo

i punti con virgole, la lista diventa illeggibile

2,7,4,0,54,37,64,92

2,7,4,0,54,37,64,92  2.7,4.0,54.37,64.92
2,7.4,0,54.37,64.92 2.7,4,0.54,37.64,92

Per questa ragione, io, personalmente, preferisco usare il punto per separare le cifre decimali e la virgola per formare liste &c. Non è richiesto di conformarsi alla mia abitudine, è richiesto, tuttavia, di usare una notazione non ambigua.

• Notazione scientifica

$1.45 \cdot 10^4$, $-3.21 \cdot 10^6$, $4.5 \cdot 10^{-8}$, $6.00 \cdot 10^{-16}$

questo si chiama
"mantissa"

questo si chiama
"esponente"

segno: se non
c'è, è +

$(-)$ $1.45 \cdot 10^{(4)}$

regola: la mantissa deve essere < 10 e ≥ 1 .

(detto in altri termini, la mantissa deve avere esattamente una cifra prima della virgola, e questa cifra non può essere 0)

È sempre possibile ricondursi alla situazione prescritta dalla regola moltiplicando e dividendo per opportune potenze di 10.

es. $172.31 = 172.31 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 1.7231 \cdot 10^2$

$0.0092 = 0.0092 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 9.2 \cdot 10^{-3}$

$154 \cdot 10^9 = 154 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 1.54 \cdot 10^{11}$

pro: adatta a numeri molto grandi e molto piccoli
rappresenta chiaramente il numero di cifre significative (vedremo fra due lezioni)

contro: leggermente più complicata della notazione dec.

• Notazione ingegneristica

$14.5 \cdot 10^3, -3.21 \cdot 10^6, 45 \cdot 10^{-9}, 600 \cdot 10^{-18}$

Non è fondamentale conoscerla, corrisponde al tasto $\boxed{\text{ENG}}$ su molte calcolatrici.

regola: la mantissa deve essere < 1000 e ≥ 1 .

l'esponente deve essere multiplo di 3.

pro: si adatta bene ai prefissi SI

es $72 \cdot 10^6 \text{ J} = 72 \text{ MJ}$ "megajoule"

$3.4 \cdot 10^{-15} \text{ s} = 3.4 \text{ fs}$ "femtosecondi"

fino 1.4

Curiosità: come è ben noto ci sono frazioni che, possono essere scritte in notazione decimale, e altre che richiederebbero una quantità illimitata di cifre:

$$\frac{7}{4} = 1.75 \quad \text{ma} \quad \frac{1}{3} = 0.3333... \text{ ad infinitum}$$

Che numero otteniamo dalla somma:

$$0.7777... + 0.2222... = ?$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 0.7777... + \\ 0.2222... = \\ \hline 0.9999... \end{array} \right.$$

Possiamo svolgere la somma in colonna

Oppure possiamo convertire i due numeri in frazioni:

$$\begin{array}{l} 0.7777... + 0.2222... = \frac{7}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1 \\ \quad \quad \quad = \frac{7}{9} \quad \quad \quad = \frac{2}{9} \end{array}$$

Quale è quindi il risultato: 0.9999... oppure 1?

La risposta è che il 9 periodico è vietato.

L'operazione in colonna non è sbagliata. Se non ci fosse la regola che vieta il 9 periodico, semplicemente, la notazione 0.9999... sarebbe un altro modo di scrivere il numero 1. La si vieta, quindi, non perché fonte di contraddizione, ma solo per evitare che lo stesso numero (uno) abbia due scritture decimali diverse.

Operazioni in notazione scientifica

• Somme & differenze

$$\text{Calcoliamo } 1.054 \cdot 10^{-9} - 7.3 \cdot 10^{-11}$$

① Convertire il numero con l'esponente più piccolo in modo da portare i due esponenti a coincidere.

$$1.054 \cdot 10^{-9} - 7.3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 \cdot 10^{-11} = 1.054 \cdot 10^{-9} - 0.073 \cdot 10^{-9}$$

② Sommare o sottrarre la mantissa

$$1.054 \cdot 10^{-9} - 0.073 \cdot 10^{-9} = (1.054 - 0.073) \cdot 10^{-9} \\ = 0.981 \cdot 10^{-9}$$

ops: la mantissa non è più ≥ 1

③ Normalizzare il risultato

$$0.981 \cdot 10^{-9} = \underbrace{0.981 \cdot 10}_{9.81} \cdot \underbrace{10^{-1} \cdot 10^{-9}}_{10^{-10}} = \boxed{9.81 \cdot 10^{-10}}$$

• Prodotti & quozienti:

Calcoliamo $4.7 \cdot 10^6 \cdot 3.1 \cdot 10^{-8}$

① Riordinare i fattori

$$4.7 \cdot 10^6 \cdot 3.1 \cdot 10^{-8} = 4.7 \cdot 3.1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8}$$

② Moltiplicare le mantisse e sommare gli esponenti

$$4.7 \cdot 3.1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8} = 14.57 \cdot 10^{-2}$$

ops: la mantissa non è più < 10

③ Normalizzare il risultato

$$14.57 \cdot 10^{-2} = \underbrace{14.57 \cdot 10^{-1}}_{1.457} \cdot \underbrace{10 \cdot 10^{-2}}_{10^{-1}} = \boxed{1.457 \cdot 10^{-1}}$$

• Radici quadrate

Calcoliamo $\sqrt{4.096 \cdot 10^{-3}}$

① Se l'esponente è dispari, moltiplicare per $1 = 10 \cdot 10^{-1}$

$$\sqrt{4.096 \cdot 10^{-3}} = \sqrt{\underbrace{4.096 \cdot 10}_{40.96} \cdot \underbrace{10^{-1} \cdot 10^{-3}}_{10^{-4}}} = \sqrt{40.96 \cdot 10^{-4}}$$

② Estrarre la radice della mantissa e dimezzare l'esponente

$$\sqrt{40.96 \cdot 10^{-10}} = \underbrace{\sqrt{40.96}}_{6.4} \cdot \underbrace{\sqrt{10^{-10}}}_{10^{-5}} = \boxed{6.4 \cdot 10^{-5}}$$

Nota: non puoi capitare che sia necessario normalizzare.

Come non sbagliare nei calcoli

In breve, non c'è modo. Gli errori sono inevitabili, concentrarsi su non sbagliare è futile, perché impossibile, e frustrante. Bisogna invece riconoscere gli errori, quando capitano, il prima possibile, fermarsi, e cercare il passaggio sbagliato. Questo è difficile perché la psicologia umana ci spinge verso metodi inefficaci. Primo: noi tendiamo verso la conclusione del lavoro, fermarsi per verificare i risultati — che è la cosa furba da fare — sembra distrarci dalla meta, e non lo facciamo. Secondo: noi abbiamo paura dell'incerto e troviamo conforto nella sicurezza. Per questo preferiamo applicare il procedimento che conosciamo — anche se magari è sbagliato! — piuttosto che chiederci "ma questa sarà davvero la via da seguire?" — e se poi la risposta è no? E se viene fuori che non so la via da seguire? Brrr. — Terzo ed ultimo: siamo pigri. Una volta approvo un

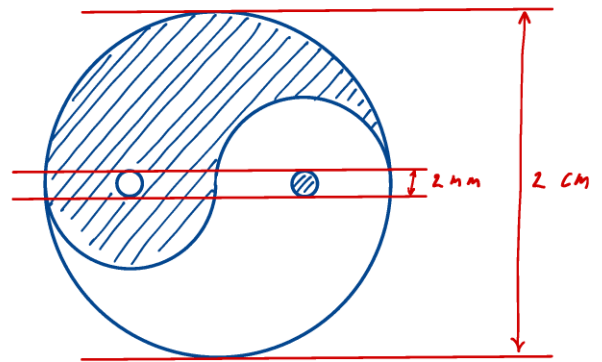
metodo per risolvere un problema, ci accontentiamo, e pare uno spreco studiare gli altri approcci che ci potrebbero essere — e invece più strade si conoscono maggiori sono le probabilità di trovare quella che ci porta a destinazione con poca fatica, e meno fatica nei calcoli significa che è più difficile sbagliare.

⇌ Consigli utili ⇌

- Saper fare calcoli approssimati a mente e verificare i risultati di calcolatrici e computer — è anche a questo che serve saper fare le operazioni in notazione scientifica
- Usare notazioni non ambigue — tipo: 41,54, 7, 18
- Verificare le soluzioni delle equazioni — anche graficamente, numericamente
- Provare le espressioni calcolate in astratto usando dei valori numerici concreti
- Studiare casi particolari del problema
- Accorgersi di risultati — anche intermedi — che non hanno senso: una parte $> 100\%$, un volume negativo, un numero di persone che non è intero, etc.
- Sfruttare semplificazioni del problema

Es. calcolare l'area tratteggiata nella figura a destra.

Dal momento che l'intera figura è contenuta in un quadrato di lato 2  è chiaro che qua-



lunque area ci verrà alla fine dovrà essere ≤ 4 : se questo non dovesse accadere, dobbiamo tornare indietro e scovare l'errore perché, così com'è per ora, la soluzione che abbiamo vale ZERO.

- Sfruttare simmetrie del problema

Es. dobbiamo ancora calcolare l'area di quella faccenda.

Beh, siccome il cerchio di diametro 2 cm è esattamente metà tratteggiato e metà bianco, l'area cercata è

$$A = \frac{1}{2} \text{ raggio}^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{2} \text{ cm}^2 \approx 1.57 \text{ cm}^2$$

- Usare buon senso — 1 m³ di neve non pesa un chilo, un uomo non ha 12 globuli rossi al litro di sangue, la probabilità di morire di cancro al polmone, per un fumatore, non è del 70%, una mummia egizia non è vecchia di 170 000 anni, &c.

Unità di misura

Le unità di misura fisiche sono quantità convenzionali fissate per ogni grandezza fisica (es. il metro per la lunghezza, il newton per la forza, &c.).

Il sistema SI (gr. *Système International*) prevede sette unità fondamentali

m	metro	lunghezza
kg	chilogrammo	massa
s	secondo	tempo
A	ampere	intensità di corrente elettr.
K	kelvin	temperatura
mol	mole	quantità di sostanza
cd	candela	intensità luminosa

Le unità derivate si ottengono moltiplicando unità fondamentali

Esempi

forza = massa · accelerazione

$$N = \text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

lavoro = forza · spostamento

$$J = N \cdot m = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$$

Pressione = forza / superficie

$$P_a = N \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$

$\uparrow$ $\uparrow$

pascal $\frac{1}{m^2} = m^{-2}$

$$\text{potenza} = \text{lavoro} / \text{tempo}$$

$$W = J \cdot s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$$

$$\text{potenza} = \text{corrente} \cdot \text{tensione}$$

$$W = A \cdot V$$

$$V = W \cdot A^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$$

Pre fissi moltiplicatori

Moltiplicano le unità per una potenza di 10.

da	10	deca	d	10^{-1}	deci
h	10^2	etto	c	10^{-2}	centi
k	10^3	chilo	m	10^{-3}	milli
M	10^6	mega	μ	10^{-6}	micro
G	10^9	giga	n	10^{-9}	nano
T	10^{12}	tera	p	10^{-12}	pico
P	10^{15}	peta	f	10^{-15}	femto
E	10^{18}	exa	a	10^{-18}	atto
Z	10^{21}	zetta	z	10^{-21}	zepto
Y	10^{24}	yotta	y	10^{-24}	yocto

Occhio: K kelvin, maiuscola — k chilo, minuscola.

Nota: Z, Y, z, y sono stati introdotti nel 1991 e sono più rari — per l'esame non serve saperli.

Equivalenze

Una quantità fisica si esprime come *numero · unità di misura*. In generale, la medesima quantità si può esprimere in più modi. — es $10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}$ — Vediamo come convertire fra unità di misura omologhe.

Metodo: convertiamo 3.7 N/cm^2 in kPa

Scriviamo l'equazione

$$3.7 \text{ N/cm}^2 = x \text{ kPa}$$

Il nostro scopo è ora semplificare le unità, quindi conviene rimpiazzare i pascal — che non compaiono a sinistra — con la loro definizione

$$3.7 \text{ N/cm}^2 = x \text{ kN/m}^2$$

Espandiamo i prefissi

$$10^{-4} \text{ m}^2 \xrightarrow{\text{}} 3.7 \frac{\text{N}}{(10^{-2} \text{ m})^2} = x \frac{10^3 \text{ N}}{\text{m}^2}$$

Le unità si trattano algebricamente come se fossero variabili moltiplicate, facciamo quindi le semplificazioni algebriche

$$3.7 \frac{\cancel{\text{N}}}{10^{-4} \cancel{\text{m}^2}} = x \frac{10^3 \cancel{\text{N}}}{\cancel{\text{m}^2}} \quad \Rightarrow \quad x = 37$$

Quindi $3.7 \text{ N/cm}^2 = \boxed{37 \text{ kPa}}$

Chiaramente, in pratica, i calcoli si eseguono mentalmente.

Altri esempi:

$$0.071 \text{ mA} = ? \text{ }\mu\text{A}$$

$$0.071 \text{ mA} = x \text{ }\mu\text{A}$$

$$0.071 \cdot 10^{-3} \text{ A} = x \cdot 10^{-6} \text{ A}$$

$$x = 0.071 \cdot 10^3 = 71$$

$$0.071 \text{ mA} = \boxed{71 \text{ }\mu\text{A}}$$

$$140.3 \frac{\text{l}}{\text{min}} = ? \frac{\text{m}^3}{\text{h}} \quad \begin{matrix} l = (\text{dm})^3 \\ h = 60 \text{ min} \end{matrix}$$

$$140.3 \frac{\text{l}}{\text{min}} = x \frac{\text{m}^3}{\text{h}}$$

$$140.3 \frac{(10^{-1} \text{ m})^3}{\text{min}} = x \frac{\text{m}^3}{60 \text{ min}}$$

$$140.3 \frac{10^{-3} \cancel{\text{m}^3}}{\cancel{\text{min}}} = x \frac{\cancel{\text{m}^3}}{60 \cancel{\text{min}}}$$

$$x = 60 \cdot 140.3 \cdot 10^{-3}$$

$$= 8.418$$

$$140.3 \frac{\text{l}}{\text{min}} = \boxed{8.418 \frac{\text{m}^3}{\text{h}}}$$

Esercizio

Quanti psi — pound per square inch — sono 1 bar?

Dati: 1 bar = 10^5 Pa

$$1 \text{ psi} = 1 \text{ lbf} \cdot \text{in}^{-2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{libbra forza — pound of force} \\ \text{per pollice quadrato} \end{array} \right.$$

$$1 \text{ lbf} = 9 \cdot 16$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ 9 = 9.81 \text{ m/s}^2 & 16 = 0.453 \text{ kg} \end{matrix} \quad 1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$$

Svolgimento

$$1 \text{ bar} = x \text{ psi}$$

$$10^5 \text{ Pa}$$

$$10^5 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$1 \text{ lbf} / \text{in}^2$$

$$9.81 \text{ m/s}^2 \cdot 0.453 \text{ kg} / (2.54 \cdot 10^{-2} \text{ m})^2$$

$$10^5 \frac{\cancel{\text{kg}}}{\cancel{\text{s}^2}} = x \cdot 9.81 \frac{\cancel{\text{m}}}{\cancel{\text{s}^2}} \cdot \frac{0.453 \cancel{\text{kg}}}{2.54^2 \cdot 10^{-4} \cancel{\text{m}^2}}$$

$$10^5 = x \cdot 9.81 \frac{0.453}{2.54^2 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow x = \frac{10 \cdot 2.54^2}{9.81 \cdot 0.453} \approx 14.5$$

Quindi $1 \text{ bar} \approx 14.5 \text{ psi}$

fine 1.5

Operazioni fra grandezze fisiche

Le quantità fisiche si comportano quasi come numeri, salvo che non tutte le operazioni sono lecite.

- Somme e sottrazioni sono lecite solo fra quantità omologhe, ossia riferite alla medesima grandezza — es. due lunghezze, due masse, etc. Numericamente, è necessario convertire le quantità alla medesima unità di misura prima di sommare o sottrarre i numeri.

Es. $30 \text{ cm} + 1.2 \text{ m} = 0.3 \text{ m} + 1.2 \text{ m} = 1.5 \text{ m}$

$12 \text{ A} + 15 \text{ kg}$ NON HA SENSO

$1.2 \text{ bar} + 5 \text{ psi} = 1.2 \text{ bar} + 0.34 \text{ bar} = 1.54 \text{ bar}$

- Prodotti e quozienti sono sempre leciti

Es. $\frac{7 \text{ kg}}{5 \text{ m}^3} = 1.4 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ $\frac{1 \text{ in}}{2 \text{ cm}} = \frac{2.54 \text{ cm}}{2 \text{ cm}} = 1.27$

- Esponenziali hanno senso solo se base ed esponente sono numeri puri — un numero puro è semplicemente un numero: una quantità senza dimensioni fisiche.

$7.1^{4.3} \text{ kg} = ?$

$\begin{cases} 7.1^{4.3} \text{ kg} \\ 7.1^{4300} \text{ g} \\ 7.1^{4.3} \cdot 7.1^{4.3} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{E' 11, ma} \\ \text{sono diversi!} \end{array} \right\} \text{ ???}$

$7.1^{4.3} \text{ kg}$ NON HA SENSO

Cifre significative

Se immaginiamo di scrivere una quantità numerica negli spazi di un modulo pre-stampato, potremmo trovarci, per esempio, ad inserire un prezzo dentro una griglia fatta così

PREZZO : $\square\square, \square\square$ €

Questo ci dice, in un istante, che il prezzo è minore di 100€ e che lo possiamo specificare con la precisione di un centesimo. Poiché da 0 a 100 ci sono 10000 incrementi di un centesimo, vediamo che 4 cifre possono essere scelte in $10000 = 10^4$ modi diversi. Più in generale n cifre si possono scegliere in 10^n modi. Ragionando al contrario, quindi in maniera un po' imprecisa, possiamo dedurre che, se leggiamo un dato che è scritto con quattro cifre di precisione, per esempio

massa = 42.84 kg

questo rappresenta una di 10000 possibilità. Supponiamo, adesso, di dover usare questo

numero in un certo calcolo, come

$$\text{peso} = \text{massa} \cdot 9.807 \text{ m/s}^2$$

Procedendo aritmeticamente otterremmo

$$\text{peso} = 42.84 \cdot 9.807 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} = 420.13188 \text{ N}$$

Il numero 420.13188 è giusto, ma suggerisce un'idea sbagliata, ossia che noi conosciamo il peso così precisamente da saper dire quale sia la cifra esatta dei centomillesimi.

Non sappiamo questa cifra perché $\frac{1}{100.000} \text{ N}$ corrisponde, grosso modo, a un milionesimo di kg, e noi abbiamo la massa solo fino alla cifra dei centesimi. Per dare un risultato onesto, occorre quindi indicare il peso con meno cifre di quante ne abbiamo ottenute aritmeticamente.

Ma quante? Dobbiamo ragionare che il dato di 42.84 kg è, si è detto, uno fra 10000 possibili. Se, a ciascuno di questi corrisponde un risultato, anche i risultati possibili sono 10000. Quindi indicheremo il risultato con quattro cifre di precisione.

$$\text{peso} = 420.1 \text{ N}$$

In definitiva, abbiamo scoperto la regola seguente

Regola: quando una computazione si basa su dati soggetti incertezze, in generale, conviene esprimere il risultato con tante cifre significative quante il meno preciso dei dati.

Possiamo illustrare ulteriormente questo concetto considerando l'esercizio seguente

E.s. Misuriamo il diametro interno di un condotto avente sezione circolare utilizzando un calibro che permette di leggere il decimo di millimetro, e otteniamo

$$\text{diametro} = 45.2 \text{ mm}$$

Quanto vale l'area della sezione del tubo (in cm^2)?

Chiaramente dobbiamo calcolare

$$\text{area} = \text{raggio}^2 \cdot \pi = \left(\frac{\text{diametro}}{2} \right)^2 \cdot \pi = 16.0459986... \text{ cm}^2$$

CIFRE SIGNIFICATIVE

Secondo la regola, tuttavia, solo le prime tre di queste sono significative. Il risultato va quindi riportato nella forma

$$\boxed{\text{area} = 16.0 \text{ cm}^2}$$

Ma perché questa scelta è ragionevole?

L'esercizio ci dice che la misura è stata eseguita con uno strumento che permette di leggere il decimo di millimetro. Quindi, per quanto ne sappiamo, il diametro reale potrebbe sì essere esattamente 45.2 mm , ma potrebbe ugualmente essere, per esempio, 45.24 mm o 45.18 mm . Tutte queste lunghezze verrebbero lette come 45.2 mm dal nostro calibro che non permette di misurare i centesimi di millimetro. Proviamo a calcolare l'area in ciascuno dei tre casi

diametro [mm]	area [cm^2]
45.18	16.0318...
45.2	16.0452...
45.24	16.0744...

Come si vede, noi possiamo dire di sapere le cifre che la regola indica come significative, perché non dipendono da quale dei casi possibili è quello vero. Non possiamo, tuttavia, dire onestamente di sapere le altre, perché la nostra misura non ci permette di escludere nessuno dei casi considerati.

Nota importante: nei passaggi intermedi bisogna lavorare con almeno due cifre significative in più rispetto alla precisione richiesta.

La regola parla di cifre significative perché non tutte le cifre lo sono. Se avessimo espresso la massa di 42.84 kg in tonnellate, avremmo scritto

$$\text{massa} = 0.04284 \text{ t}$$

Questo è lo stesso dato di prima, quindi è chiaro che deve ancora avere le sue quattro cifre significative, segno che lo 0.0 iniziale non è significativo.

Quegli zeri li sono, infatti, dei meri segna-posto. Serrano per dire che il 4 successivo si trova nella posizione dei centesimi, e, se scrivessimo il numero in notazione scientifica, sparirebbero.

$$\text{massa} = 4.284 \cdot 10^{-2} \text{ t}$$

Quali cifre sono significative e quali, invece, segna posto?

Regola (versione 1)

- In notazione scientifica tutte le cifre della mantissa sono significative

- Gli zeri alla fine di un numero intero (senza indicazione di cifre decimali) sono segna-posto.
- Gli zeri all'inizio di un numero del tipo 0... sono segna-posto.

Esempi (le c.s. sono sottolineate in verde)

24 0.24 2.4 0.024 24000 2.4 · 10⁻⁷⁰

2 cifre significative

240.0 240 0.024 1.024 0.0240 7.400 · 10⁻²

4 c.s. 2 c.s. 2 c.s. 4 c.s. 3 c.s. 4 c.s.

Attenzione al numero 240.0

Siccome il .0 finale non è necessario per specificare il posto delle altre cifre, quello non può essere un segna-posto. Quindi deve essere significativo.

Regola (versione 2)

Alle volte gli zeri all'inizio o alla fine di una scrittura decimale non sono significativi.

- Se rimuovere uno zero cambierebbe il numero, quello zero non è significativo.
- Se rimuovere uno zero non cambierebbe il numero, quello zero è significativo.

Nota La regola per contare le cifre significative è da intendersi più come un consiglio di prudenza che come una norma ferrea. Se, per esempio, leggiamo sul giornale che 6000 persone hanno preso parte ad una manifestazione, è sensato credere che quel 6000 sia un'approssimazione, e che, magari, le persone erano in realtà 5784 o 6319. Insomma, è naturale pensare che solo il 6 sia significativo, mentre verosimilmente gli zeri sono frutto di un arrotondamento — appunto una cifra significativa come secondo la regola. Non è assicurato che sia così: è improbabile, ma possibile, che il giornalista volesse dire che esattamente 6000 persone hanno partecipato (contate come?), ma, in quel caso, forse avrebbe fatto meglio a scrivere "esattamente 6000". Non potendo sapere con assoluta sicurezza, conviene assumere l'interpretazione più probabile, che è anche la più sicura. Infatti, se considerassimo quel 6000 un numero esatto, e fossimo in errore, allora vedremmo un'informazione là dove non c'è — negli zeri del 6000 — e questo è gravissimo. Seguendo la regola, invece, al massimo rischiamo di scartare un pò di informazione buona, ma non di introdurne di falsa.

Arrotondamenti

Quando si riduce il numero di cifre significative in una scrittura decimale, è necessario arrotondare l'ultima cifra significativa in modo tale da rendere il numero arrotondato più vicino possibile al valore esatto.

Per esempio, se stiamo arrotondando il numero 42.824 alla prima cifra dopo la virgola, possiamo arrotondare per difetto a 42.8 , oppure per eccesso a 42.9 . In questo caso è corretto scegliere l'arrotondamento per difetto, 42.8 , perché, fra i due, è il più vicino al numero dato

$$\begin{array}{lcl} \text{approssimazione} & \rightarrow & 42.8 \\ \text{corretta} & & \\ & 42.824 & \left\{ \begin{array}{l} \text{distanza} = 42.824 - 42.8 = 0.024 \\ \text{distanza} = 42.9 - 42.824 = 0.076 \end{array} \right. \end{array}$$

Se, invece, arrotondiamo 31.764 , di nuovo alla prima cifra decimale, la situazione si inverte.

$$\begin{array}{lcl} & 31.7 & \left\{ \begin{array}{l} \text{distanza} = 31.764 - 31.7 = 0.064 \\ \text{distanza} = 31.8 - 31.764 = 0.036 \end{array} \right. \\ & 31.764 & \\ \text{approssimazione} & \rightarrow & 31.8 \\ \text{corretta} & & \end{array}$$

La regola da seguire in pratica è semplice: se la prima cifra troncata è $0...4$ si arrotonda per difetto, se la prima cifra troncata è $5...9$ per eccesso.

$$42.8\dot{2}4 \xrightarrow{2 \text{ è } 0...4} 42.8 \qquad 31.7\dot{6}4 \xrightarrow{6 \text{ è } 5...9} 31.8$$

Esercizio. Calcola la soluzione positiva dell'equazione

$$3.1 \cdot 10^{-3} x^2 + 1.2 \cdot 10^2 x - 2.4 = 0$$

con due cifre significative di precisione.

Questo esercizio è stato costruito apposta per illustrare l'effetto devastante che può avere l'errore di lavorare con una precisione insufficiente nei passaggi intermedi.

Facciamo dapprima il calcolo in maniera molto precisa

$$\underbrace{3.1 \cdot 10^{-3}}_{0.0031} x^2 + \underbrace{1.2 \cdot 10^2}_{120} x - 2.4 = 0$$

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14400.02976}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.0001239993...}{0.0062} = 0.0199998...$$

È chiaro che la risposta giusta, correttamente arrotondata, è 0.020. Studiamo, però, cosa sarebbe avvenuto se avessimo usato due sole cifre significative nei passaggi intermedi

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14000}}{0.0062} = \frac{-120 + 120}{0.0062} = 0 \quad \text{OPS!}$$

Siccome questo esercizio presenta una situazione estrema, anche seguendo la regola generale di tenere due cifre significative in più di quelle desiderate avremmo ottenuto zero. Per ottenere un risultato diverso da zero, dobbiamo lavorare con non meno di sette cifre significative.

Proviamo a ripetere il calcolo con 7

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14400.03}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.0001}{0.0062} = 0.016$$

il risultato è ancora sbagliato, e solo lavorando con otto cifre otteniamo, finalmente, il risultato giusto

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14400.030}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.00012}{0.0062} = 0.020$$

Morale.

Le sottrazioni fra numeri vicini — $120.00012 - 120$ — possono causare **disastrose perdite di precisione**. Quando ci si trova in una situazione come questa, è consigliabile usare, nei passaggi intermedi, la massima precisione di cui si può disporre.

Morale 2

È utilissimo, permette di risparmiare tempo, e di evitare errori, usare le funzioni memoria delle calcolatrici, anziché scrivere e ri-ingrassare i risultati intermedi.

Curiosità

Il procedimento seguente è pericoloso, ma avrebbe condotto al risultato giusto

$$\underbrace{0.0031 \cdot x^2} + 120 \cdot x - 2.4 = 0$$

Questo è piccolo: lo trascuro provvisoriamente

$$120 \cdot x - 2.4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{2.4}{120} = 0.020$$

Constato che $0.0031 \cdot 0.020^2 \approx 0.0000012$ è effettivamente

molto piccolo rispetto a $120 \cdot 0.020$ e a 2.4 , quindi la scelta provvisoria di trascurare quel termine, a posteriori, è giustificata, pertanto il risultato ottenuto, $x = 0.020$, è accettabile. fino 1.6

La teoria degli errori

Le cifre significative offrono un'idea rozza di quanto sia preciso un certo dato di origine sperimentale. La teoria degli errori permette di quantificare le incertezze di misura in modo preciso.

Attenzione: gli errori di cui si parla sono le incertezze inevitabili nelle misure sperimentali. Gli sbagli e i guai derivanti da uno strumento guasto, o da una tecnica approssimativa, non sono oggetto della teoria degli errori.

Se scriviamo un dato sperimentale nella forma

$$\text{massa} = (42.84 \pm 0.03) \text{ kg}$$

vogliamo dire che siamo incerti sul valore, in questo caso, della massa, però sappiamo che questo valore è probabilmente compreso fra $(42.84 - 0.03) \text{ kg}$ e $(42.84 + 0.03) \text{ kg}$.

Quindi la scrittura precedente significa
"probabilmente $42.81 \text{ kg} \leq \text{massa} \leq 42.87 \text{ kg}$ "
Chiameremo l'intervallo $42.81 \leq \dots \leq 42.87$ (o, più
formalmente, $[42.81, 42.87]$) intervallo di
incertezza (altri nomi: intervallo di fiducia,
i. di errore, i. di confidenza).

Nota. Nelle formule precedenti, l'unità di misura kg
si comporta, algebricamente, come se fosse una varia-
bile moltiplicata per i valori numerici. Per questa
ragione, preferisco scrivere $(42.84 \pm 0.03) \text{ kg}$ anziché
 $42.84 \pm 0.03 \text{ kg}$, per indicare che l'unità kg si applica
sia al valore 42.84 sia all'incertezza 0.03 . Se non
c'è rischio di ambiguità, tuttavia, entrambe le scrittu-
re sono ammissibili.

Definizione (errore assoluto)

La scrittura

$$x = x_0 \pm \delta x$$

significa

"probabilmente $x_0 - \delta x \leq x \leq x_0 + \delta x$ "

La quantità δx si chiama errore assoluto
di x e l'intervallo $[x_0 - \delta x, x_0 + \delta x]$ si
chiama intervallo di incertezza di x .

Nota. Abbiamo usato la parola "probabilmente". Non è impossibile specificarne in maniera esatta il significato, ma, per farlo, servono conoscenze di statistica che esulano dal programma di questo corso.

Esempio

Nella scrittura $\text{raggio} = (41.4 \pm 0.2) \text{ cm}$

l'errore assoluto è 0.2 cm

l'intervallo di incertezza $\underbrace{41.2 \text{ cm}}_{41.4 - 0.2} \leq \text{raggio} \leq \underbrace{41.6 \text{ cm}}_{41.4 + 0.2}$

La formula della definizione

$$x = x_0 \pm \delta x \quad \Rightarrow \quad x_0 - \delta x \leq x \leq x_0 + \delta x$$

permette di passare dall'errore assoluto all'intervallo di incertezza. Viceversa, se conosciamo un intervallo di incertezza $\alpha \leq x \leq \beta$, possiamo ricavare la scrittura $x = x_0 \pm \delta x$ dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha = x_0 - \delta x \\ \beta = x_0 + \delta x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{\alpha + \beta}{2} \\ \beta - \alpha = 2\delta x \Rightarrow \delta x = \frac{\beta - \alpha}{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi stabilito la formula per il passaggio inverso

$$\alpha \leq x \leq \beta \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\alpha + \beta}{2} \pm \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Come vedremo, questa formula si usa per calcolare δx ,

tuttavia spesso è conveniente calcolare x_0 in altro modo.

Nota. La parola "assoluto" nella locuzione "errore assoluto" non è lì per rendere il linguaggio più pomposo, e così incutere soggezione nella plebe ignorante. Semplicemente, introdurremo in futuro il concetto di "errore relativo", serve quindi per non far confusione.

Vediamo ora come tener conto del modo in cui le incertezze di misura si propagano nei calcoli.

Va da sé che un risultato basato su dati incerti è, a sua volta, affetto da incertezza. In altri termini gli errori sui dati si propagano attraverso i calcoli e generano un errore sul risultato.

Ci sono varie regole per tener conto di questa propagazione, ma tutte discendono dalla seguente.

Regola delle regole (della propagazione degli errori)

L'intervallo di incertezza sul risultato ha come estremi il minimo e il massimo valore ottenibile al variare dei dati nei loro rispettivi intervalli di incertezza

Esercizio $x = 4.0 \pm 0.4 \Rightarrow y = x + \sqrt{x} = ?$

Innanzitutto, se non ci fossero di mezzo le incertezze, avremmo semplicemente $x_0 = 4.0$ quindi $y_0 = x_0 + \sqrt{x_0} = 4 + \sqrt{4} = 6$.
La risposta all'esercizio sarà quindi del tipo $y = 6 \pm \delta y$, e noi dobbiamo determinare l'errore assoluto δx .

L'intervallo di incertezza di x è $\underbrace{3.6}_{4.0-0.4} \leq x \leq \underbrace{4.4}_{4.0+0.4}$, studiamo $x + \sqrt{x}$ al variare di x in

questo intervallo.

Come si vede, y varia nell'intervallo di incertezza

$\underbrace{5.497}_a \leq y \leq \underbrace{6.498}_b$

x	3.6	4.0	4.4
$x + \sqrt{x}$	5.497	6.000	6.498

seguiamo la regola generale di tenere, nei passaggi intermedi, qualche cifra in più.

Otteniamo quindi $\delta y = \frac{b-a}{2} = 0.5005$, $y = 6.000 \pm 0.5005$

Si pone ora questo problema:

A che cifra è opportuno arrotondare il risultato?

Regola (di massima)

Le incertezze si arrotondano a una cifra significativa.

Con una eccezione: che se questa cifra è un 1, allora conviene arrotondare a due cifre significative.

I valori affetti da incertezza si arrotondano alla medesima posizione decimale dell'incertezza corrispondente (es. se l'incertezza è arrotondata alla cifra dei centesimi, anche

il valore deve essere arrotondato alla cifra dei centesimi)

Alla luce di questa regola, s_y va arrotondato a 0.5, ossia ai decimi, di conseguenza anche y va arrotondato ai decimi, dando 6.0. La risposta è quindi $y = 6.0 \pm 0.5$

Nota Se, anziché calcolare il valore 6.0 di y in maniera diretta, avessimo usato la formula $y_0 = \frac{a+b}{2}$, avremmo ottenuto $y_0 = \frac{a+b}{2} = \frac{5.497 + 6.498}{2} = 5.998$ e questo valore, arrotondato alla cifra dei decimi, fa proprio 6.0. È consigliabile però seguire il metodo diretto, se non altro perché serve da controllo sul calcolo dell'errore: se il valore calcolato direttamente non viene al centro dell'intervallo di incertezza, allora qualcosa non va.

Giustificazione della regola di massima

Ai fini del corso non è necessario sapere questa giustificazione: è soltanto NECESSARIO APPLICARE CORRETTAMENTE LA REGOLA. Però questo discorso può aiutare a capire le cose.

Se qualcuno ci dicesse che la massa di un campione è

$$M = (25.000 \pm 0.314) \text{ g}$$

dovremmo credergli? Questa persona ci starebbe dicendo che i valori di M compresi fra 24.686 g e 25.314 g — una escursione di oltre mezzo grammo — sono

plausibili; ma aggiungi un milligrammo e 25.315 no, questo valore è implausibile. Non è realistico che la massa M sia incerta nell'arco di oltre 600 milligrammi, ma questa stessa incertezza sia nota al milligrammo. Per quanto, forse, l'idea di sapere molto esattamente di non sapere qualcosa sarebbe potuta piacere a Socrate, viene da chiedersi come faccia il nostro sperimentatore a essere tanto certo a proposito di una cosa su cui è tanto incerto. Conviene diffidare, ma, se anche fosse, conoscere l'incertezza con tanta precisione non servirebbe a molto. All'atto pratico, sarà possibile e desiderabile sapere l'incertezza con una precisione commisurata all'incertezza stessa — se sono incerto di qualche grammo, potrò gloriarmi di quanto sono incerto al grammo — e questa è appunto la definizione di avere una cifra significativa. Non dilunghiamoci sull'eccezione per l'uno: serve per evitare alcuni casi in cui l'errore di arrotondamento sarebbe eccessivo.

L'incertezza sulla nostra massa va quindi espressa come $\pm 0.3\text{ g}$, ma perché il valore della massa va poi indicato come 25.0 g ? I valori plausibili per questa massa sono quelli compresi fra 24.7 g e 25.3 g . Per esempio

M potrebbe essere 24.73g o 24.89g o 25.17g.
Cosa si può dire a proposito delle cifre di questi valori.

- la cifra delle decine di grammi: è 2
- la cifra dei grammi: è 4 o 5
- la cifra dei decigr.: può essere 7, 8, 9, 0, 1, 2, 3
- la cifra dei centigr.: **NON?** può essere qualunque cifra.

Fino alla cifra a cui è stata arrotondata l'incertezza può, concepibilmente, essere ancora contenuta informazione utile, le successive, però, sono essenzialmente prese a caso. Per questo la regola dice di arrotondare alla medesima cifra dell'incertezza.

Esercizio calcolare $x-y$ sapendo che
 $x = 7.6 \pm 0.4$ e $y = 1.4 \pm 0.2$.

Gli intervalli di incertezza sono
per x , $7.2 \leq x \leq 8.0$ (ossia $x \in [7.2, 8.0]$)
per y , $1.2 \leq y \leq 1.6$ (ossia $y \in [1.2, 1.6]$)

Qual è il minimo valore possibile per $x-y$?
Per far sì che $x-y$ sia più piccolo possibile, devo partire dalla x più piccola e sottrarre la y più grande: $7.2 - 1.6 = 5.6$.

Analogamente, otterrò il massimo di $x-y$ sottraendo la y più piccola dalla x più grande: $8.0 - 1.2 = 6.8$. Ho così ottenuto l'intervallo di incertezza

$$5.6 \leq x-y \leq 6.8$$

Procedendo come nell'esercizio precedente

$$x-y = 6.2 \pm \frac{6.8 - 5.6}{2} = \boxed{6.2 \pm 0.6}$$

Nota

Può capitare che non sia facile ragionare su quale combinazione dei dati dia il minimo e quale il massimo risultato. Nei casi di difficoltà conviene calcolare i risultati corrispondenti a tutte le combinazioni degli estremi degli intervalli di incertezza dei dati, per poi vedere quali dei valori ottenuti siano il massimo e il minimo.

La regola della regola permette sempre di propagare le incertezze correttamente, però, nei casi più frequenti, c'è modo di eseguire i calcoli in maniera più spedita.

Vediamo intanto il caso delle somme algebriche

Regola (somme algebriche)

$$\text{Se } x = x_0 \pm \delta x \quad \text{e} \quad y = y_0 \pm \delta y$$

$$\text{allora } x + y = x_0 + y_0 \pm (\delta x + \delta y)$$

$$x - y = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y)$$

Questa regola, per esempio, permette di risolvere senza fatica l'esercizio precedente

Esercizio calcolare $x - y$ sapendo che

$$x = \underbrace{7.6}_{x_0} \pm \underbrace{0.4}_{\delta x} \quad \text{e} \quad y = \underbrace{1.4}_{y_0} \pm \underbrace{0.2}_{\delta y}$$

Soluzione $x - y = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y) = 7.6 - 1.4 \pm (0.4 + 0.2) = \boxed{6.2 \pm 0.6}$

Attenzione: quando si calcola l'incertezza su una DIFFERENZA gli errori si sommano, non si sottraggono!

Per parlare di prodotti e quozienti conviene introdurre l'errore relativo

Definizione (errore relativo)

L'errore relativo su una quantità

$$x = x_0 \pm \delta x \quad \text{è il numero } \frac{\delta x}{x_0}.$$

Usualmente, si indica l'errore relativo in forma percentuale

$$x = x_0 \pm \left(\frac{\delta x}{x_0} \cdot 100 \right) \%$$

La medesima incertezza si può indicare come errore assoluto e come errore relativo.

Formule di conversione

ERRORE ASSOLUTO

$$x = x_0 \pm \delta x$$

$$x = x_0 \pm \frac{\alpha \cdot x_0}{100}$$

ERRORE RELATIVO

$$x = x_0 \pm \left(\frac{\delta x}{x_0} \cdot 100 \right) \%$$

$$x = x_0 \pm \alpha \%$$

Esempi

$$(120 \pm 6) \text{ m} \longrightarrow (120 \pm 5\%) \text{ m}$$

$$(30.0 \pm 2\%) \text{ V} \longrightarrow (30.0 \pm 0.6) \text{ V}$$
$$30 \pm \frac{2 \cdot 30}{100}$$

~~$(37 \pm 5\%) ^\circ \text{C}$~~ NON HA SENSO!

Attenzione Gli errori relativi non hanno senso applicati a misure basate su uno zero convenzionale (es. $^\circ \text{C}$, ora del giorno).

Regola (prodotti e quozienti)

$$\text{Se } x = x_0 \pm \alpha\% \quad \text{e} \quad y = y_0 \pm \beta\%$$

$$\text{allora } x \cdot y = x_0 \cdot y_0 \pm (\alpha + \beta)\%$$

$$x / y = x_0 / y_0 \pm (\alpha + \beta)\%$$

Eg $x = 7.0 \pm 2\%$ $y = 5.0 \pm 1\%$ $\Rightarrow x \cdot y = ?$ $\frac{x}{y} = ?$

Sol. $x \cdot y = 35 \pm 3\%$ $\frac{x}{y} = 1.4 \pm 3\%$
 $\underbrace{7.0 \cdot 5.0}_{2+1}$ $\underbrace{7.0/5.0}_{2+1}$ fino 1.2

Eg Calcola $(20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ indicando l'errore assoluto.

Per risolvere questo esercizio con la regola per i prodotti è necessario prima convertire gli errori assoluti in errori relativi, calcolare l'errore relativo sul risultato, ed infine eseguire la conversione opposta.

$(20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3) = 150.0 \pm 6\%$ arrotondamento corretto.
 $\underbrace{\pm 2\%}$ $\underbrace{\pm 4\%}$ $\underbrace{2+4}$
 $= 150.0 \pm 9.0 = \boxed{150 \pm 9}$
 $\underbrace{150 \cdot \frac{6}{100}}$

Avremmo anche potuto seguire il metodo diretto.

Dritto $y = (20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ otteniamo

$\underbrace{141.12}_{19.6 \cdot 7.2} \leq y \leq \underbrace{159.12}_{20.4 \cdot 7.8} \Rightarrow y = 150 \pm \frac{159.12 - 141.12}{2}$
 $= \boxed{150 \pm 9}$

Notiamo che anche usando la formula sconsigliata

$y_0 = \frac{\alpha + \beta}{2}$ avremmo ottenuto $y_0 = \frac{159.12 + 141.12}{2} = 150.12$ che si arrotonda a 150.

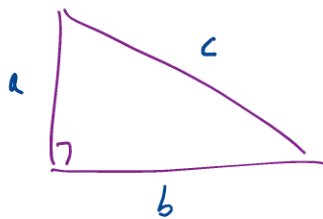
Abbiamo enunciato regole per la propagazione degli errori in somme e prodotti. Da quest'ultima si può dedurre una regola per le potenze — poiché le potenze sono prodotti ripetuti — e dalla regola per le potenze una per le radici — $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ —. In definitiva si giunge allo specchietto seguente.

Riassunto delle regole di teoria degli errori

$(x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y) = (x_0 + y_0) \pm (\delta x + \delta y)$	+ e - si sommano gli errori assoluti
$(x_0 \pm \delta x) - (y_0 \pm \delta y) = (x_0 - y_0) \pm (\delta x + \delta y)$	
$(x_0 \pm \alpha\%) \cdot (y_0 \pm \beta\%) = (x_0 \cdot y_0) \pm (\alpha + \beta)\%$	· e / si sommano gli errori relativi
$(x_0 \pm \alpha\%) / (y_0 \pm \beta\%) = (x_0 / y_0) \pm (\alpha + \beta)\%$	
$(x_0 \pm \alpha\%)^n = x_0^n \pm (n \cdot \alpha)\%$	
$\sqrt[n]{x_0 \pm \alpha\%} = \sqrt[n]{x_0} \pm \frac{\alpha}{n}\%$	
$(x_0 \pm \delta x) \cdot k = x_0 \cdot k \pm \delta x \cdot k $	

Eg (esame online del 15.11.2020, es. C)

L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga $50 \pm 2\%$ e uno dei cateti $30 \pm 5\%$. Calcola il secondo cateto indicando l'errore percentuale.



Denotando l'ipotenusa con c ed il cateto dato con a , calcoliamo il secondo cateto b usando il teorema di Pitagora.

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(50 \pm 2\%)^2 - (30 \pm 5\%)^2}$$

$$= \sqrt{(2500 \pm 4\%) - (900 \pm 10\%)}$$

$\underbrace{2\% \cdot 2 \cdot 2500}_{2 \cdot 2\%} \quad \dots \quad \underbrace{5\% \cdot 2 \cdot 900}_{2 \cdot 5\%}$

Regola per la potenza

Passo a errore assoluto per poter fare la differenza

$$= \sqrt{(2500 \pm 100) - (900 \pm 90)}$$

$\underbrace{2500 \cdot \frac{4}{100}}_{2500 \cdot \frac{4}{100}} \quad \dots \quad \underbrace{900 \cdot \frac{10}{100}}_{900 \cdot \frac{10}{100}}$

$$= \sqrt{1600 \pm 190} = \sqrt{1600 \pm 12\%} = \boxed{40 \pm 6\%}$$

$\underbrace{100 + 90}_{100 + 90} \quad \quad \quad \underbrace{\frac{190}{1600} \cdot 100}_{\frac{190}{1600} \cdot 100}$

Regola per la somma alg.

Passo a e. rel. per applicare la regola per le radici

$\frac{12}{2}$: regola per le radici.

Esercizio $x = 4.0 \pm 0.4 \Rightarrow y = x - \sqrt{x} = ?$

Risolviamo, intanto, l'esercizio con il metodo dell'intervallo di incertezza. Questo procedimento è molto simile ad uno già visto. Per la x abbiamo $3.6 \leq x \leq 4.4$.

x	3.6	4.0	4.4
$x - \sqrt{x}$	1.703	2.000	2.302

Quindi $y = 2.000 \pm \frac{2.302 - 1.703}{2} = \boxed{2.0 \pm 0.3}$

Potremmo essere tentati, d'altro canto, di calcolare l'incertezza usando le formule per la radice e per la somma. Usare queste formule sarebbe un procedimento *sottottimale* — non è corretto, ma produce una stima dell'errore che è più grande di quella giusta (e chiaramente soprastimare l'errore è meglio che sottostimarlo).

PROCEDIMENTO SOTTOOTTIMALE (sbagliato ma non troppo) <sup>!?!
↓</sup>

$$x - \sqrt{x} = (4.0 \pm 0.4) - \sqrt{4.0 \pm 0.4} = (4.0 \pm 0.4) - (2.0 \pm 5\%) = 2.0 \pm 0.5$$

$\pm 10\%$ ± 0.1

Appunto, l'errore che ci è venuto non è ingenuo, ma è un po' più grande del valore giusto 0.3. Perché? Il fatto è che le formule per somme e prodotti sono valide sotto la ipotesi che gli addendi o i fattori provengano da misure indipendenti. Nel nostro caso, la stessa x compare nei due addendi di $x - \sqrt{x}$, e questo dà luogo ad un fenomeno per cui gli errori si compensano. Se, per esempio la x è soprastimata, anche $\sqrt{x}$ verrà soprastimata, e nulla, differenza $x - \sqrt{x}$, un errore compensa l'altro. Per fortuna, le nostre formule errano, al più, dal lato

dalla prudenza, ossia, usate impropriamente, possono solo produrre una stima dell'incertezza maggiore di quella corretta.

E5 (esame online del 28.v.2020, es. c)

Una capsula ha la forma di un corpo centrale cilindrico terminato, su ciascuna delle basi, da una semisfera. Il diametro del cilindretto, ϕ , di conseguenza, delle due semisfere, è $(7.0 \pm 0.2) \text{ mm}$, mentre la sua lunghezza è $(17.0 \pm 0.5) \text{ mm}$. Determina il volume della capsula in ml indicando l'incertezza relativa.

La capsula è costituita da un cilindro e due semisfere.

Chiamando L la lunghezza del cilindro e r il raggio,

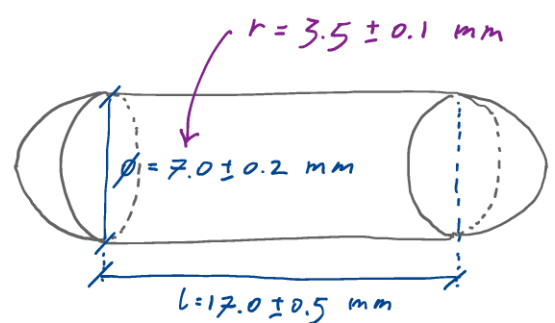
che coincide, del cilindro e della sfera, abbiamo la seguente formula per il volume

$$V = \underbrace{\pi r^2 L}_{\text{cilindro}} + \underbrace{\frac{4}{3} \pi r^3}_{\text{sfera = due semisfere}} = \pi r^2 \left(L + \frac{4}{3} r \right)$$

Da cui $V = 835.83 \text{ mm}^3 = 0.83583 \text{ ml}$

$$1 \text{ ml} = 10^{-3} \text{ l} = 10^{-3} \text{ dm}^3 = 10^{-3} (10^2 \text{ mm})^3 = 10^3 \text{ mm}^3$$

Per stimare l'incertezza, calcoliamo il massimo e il minimo volume dell'intervallo di incertezza,



che corrispondono a $r_{\max} = 3.6 \text{ mm}$ $l_{\max} = 17.5 \text{ mm}$ e
 $r_{\min} = 3.4 \text{ mm}$ $l_{\min} = 16.5 \text{ mm}$ rispettivamente.

$$V_{\max} = 0.90795 \text{ ml}$$

$$V_{\min} = 0.76386 \text{ ml}$$

$$\frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = 0.07204 \text{ ml}$$

la seconda cifra non è nulla

L'approssimazione corretta del volume è quindi alla seconda cifra e l'errore percentuale vale

$$\frac{0.07204}{0.83383} \cdot 100 \approx 9$$

di conseguenza $V = 0.83 \pm 9\% \text{ ml}$

E5 - Un foglio rettangolare è grossolanamente alto 30 cm e largo 20 cm. Con quale incertezza assoluta δ devo misurare queste lunghezze se intendo determinare l'area del foglio con una incertezza di $\pm 1 \text{ cm}^2$? fine l.8

La situazione descritta dall'esercizio è ragionevolmente questa. Noi abbiamo un rettangolo di cui non conosciamo le dimensioni, e, per qualche ragione, desideriamo sapere l'area di questo rettangolo. Ci accingiamo quindi a misurarlo. Vediamo dapprima rozzamente — tipo letteralmente a spanne — che il rettangolo è circa $20 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$: una cifra significativa di pre-

cisione. Ci chiediamo adesso con che accuratezza δ dovremo fare la misura — quella precisa — per poter determinare l'area con un'incertezza di $\pm 1 \text{ cm}^2$.

Soluzione

Calcoliamo, in maniera algebrica, in che modo l'incertezza sull'area — quella che vogliamo essere 1 cm^2 — dipenda dall'incertezza δ sulle lunghezze a, b dei due lati.

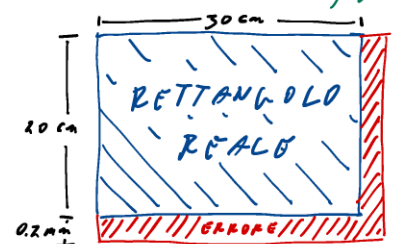
$$\begin{aligned}
 A &= (a \pm \delta) \cdot (b \pm \delta) = a \cdot b \pm \underbrace{\left(\frac{\delta}{a} \cdot 100 + \frac{\delta}{b} \cdot 100 \right) \%}_{\pm \left(\frac{\delta}{a} \cdot 100 + \frac{\delta}{b} \cdot 100 \right) \cdot \frac{a \cdot b}{100}} \\
 &\quad \pm \frac{\delta}{a} \cdot 100 \% \quad \pm \frac{\delta}{b} \cdot 100 \% \\
 &\quad \frac{\delta}{a} \cdot ab + \frac{\delta}{b} \cdot ab \\
 &= a \cdot b \pm \left(\frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{b} \right) \cdot ab = a \cdot b \pm (\delta b + \delta a) = a \cdot b \pm \delta \cdot (a + b)
 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi che l'incertezza — 1 cm^2 — deve essere $\delta \cdot (a + b)$.

$$\delta \cdot (a + b) = 1 \text{ cm}^2 \Rightarrow \delta = \frac{1 \text{ cm}^2}{\underbrace{a + b}_{20 \text{ cm} + 30 \text{ cm}}} \approx \frac{1 \text{ cm}^2}{50 \text{ cm}} = \boxed{0.2 \text{ mm}}$$

Ora, i lati del rettangolo sono noti con una cifra di precisione, abbiamo quindi determinato l'incertezza richiesta con una cifra di precisione, che è proprio la precisione desiderata secondo la regola generale per la incertezza.

Nota: Se ci immaginiamo l'effetto di un errore di 0.2 mm sull'area, vediamo che può aggiungersi una strisciolina lunga 0.2 mm



e lunga $(20+30)$ cm. L'area di questa strisciolina è appunto $50 \text{ cm} \cdot 0.2 \text{ mm}$ ossia 1 cm^2 .

Il simbolo di sommatoria

La scrittura $\sum_{i=a}^b x_i$ — che si usa con a e b che sono numeri interi con $a \leq b$ — è un modo compatto di scrivere la somma $x_a + x_{a+1} + x_{a+2} + \dots + x_b$.

Esempi

$$\sum_{i=1}^4 k_i = k_1 + k_2 + k_3 + k_4$$

i	1	2	3	4
k_i	k_1	k_2	k_3	k_4

Curiosità: $63 = \frac{3+15}{2} \cdot 7$ ossia media fra il primo e l'ultimo numero per numero dei numeri.
 occhio: questa formula non funziona sempre!

$$\sum_{i=1}^7 1+2i = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 63$$

i	1	2	3	4	5	6	7
$1+2i$	3	5	7	9	11	13	15

$$\sum_{i=1}^5 i^2 = 1 + 4 + 9 + 16 + 25 = 55$$

i	1	2	3	4	5
i^2	1	4	9	16	25

$$\sum_{i=4}^7 i = 4 + 5 + 6 + 7 = 22$$

i	4	5	6	7
i	4	5	6	7

$$\sum_{i=1}^{100} 15 = \overbrace{15 + 15 + 15 + \dots}^{100 \text{ volte}} = 15 \cdot 100 = 1500$$

i	1	2	3	$\dots$
15	15	15	15	$\dots$

Curiosità (decisamente fuori programma)

Non sempre, ma a volte si riescono a scrivere formule che permettono di calcolare certe sommatorie in maniera spedita.

Certe sono intuitive

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \quad \left(\text{media } \frac{n+1}{2} \text{ per num. addendi } n \right)$$

Certe più misteriose

$$\sum_{i=1}^n i^3 = \left(\sum_{i=1}^n i \right)^2$$

Certe completamente esoteriche

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Quest'ultima asserisce che, via via che si procede nel fare la somma $\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$, il risultato si avvicina sempre più a $\frac{\pi^2}{6}$, e fu scoperta da Eulero nel 1734.

Determinazione delle incertezze in un esperimento

Ci sono tre tipi di errori in cui si può incorrere nel contesto di una misura strumentale.

- **Slagli** — strumento guasto, adoperato male, &c.

Come già detto questi, **non interessano** la teoria degli errori

- **Errori sistematici** — termometro che legge 2 gradi sotto la temperatura corretta, bilancia starata, e, in generale, tutti i casi in cui la quantità misurata differisce da quella reale per un certo scarto costante.

Nella teoria, assumiamo che gli errori sistematici siano già stati identificati ed eliminati, per esempio aggiungendo due gradi alla lettura di quel termometro, sottraendo la tara, &c.

Conviene, tuttavia, tenere a mente che gli errori sistematici si manifestano frequentemente.

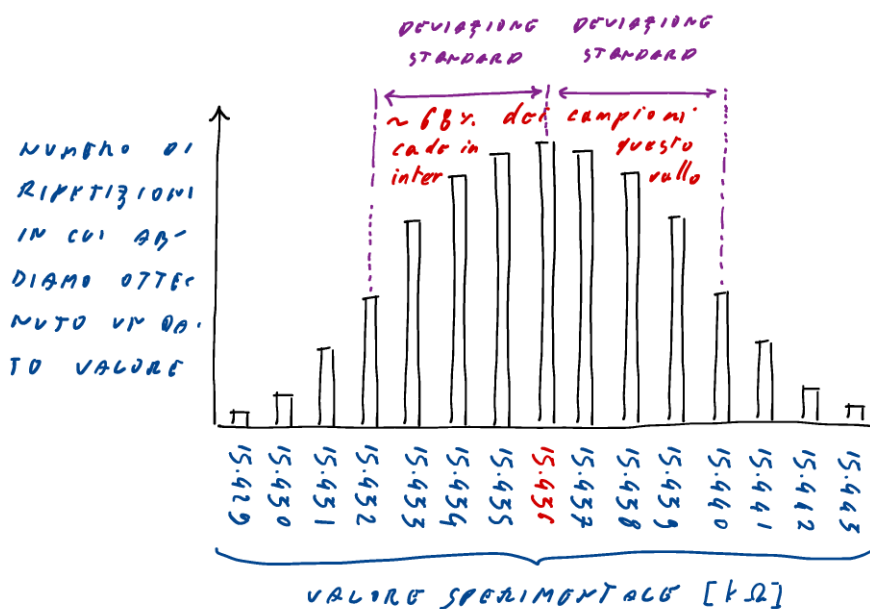
A riguardo vedere es. A compito di esame di esempio anno accademico 2018-19

- **Errori casuali inevitabili** — causati dagli attriti nei meccanismi, rumore nei circuiti elettronici, difficoltà di stimare la posizione esatta del menisco in un cilindro graduato, &c. **Questi sono l'oggetto della teoria.**

Alle volte conosciamo immediatamente l'incertezza di una misura. Per esempio, se misuriamo una distanza con un righello, o con un metro, possiamo assumere che l'incertezza assoluta di questa misura coincida con la distanza fra due tacche successive della scala (un'altra scelta ragionevole in questa situazione, sarebbe la **semi**distanza). Un altro esempio è quando usiamo uno strumento calibrato o certificato per fornire una determinata accuratezza — **ovvero: il fatto che, per esempio, un amperometro digitale ci mostri la cifra dei mA NON GARANTISCE**

che la misura fatta da quello strumento sia accurata al microampere più vicino!

Avviene, tuttavia, che non ci sia modo di conoscere l'incertezza in una misura sperimentale se non per ricorso, a sua volta, all'esperimento. Vale a dire **ripetendo la misura**, e osservando la dispersione dei risultati. È un dato di fatto che, a lungo andare, i risultati ottenuti sono tanto più frequenti quanto più vicini al valore corretto (in assenza di errori sistematici). Se immaginiamo, per esempio, di misurare il valore di una resistenza elettrica di $15.436 \text{ k}\Omega$. I nostri risultati sperimentali potrebbero distribuirsi come nel grafico a



sinistra. Questo grafico dice che il valore $15.436 \text{ k}\Omega$ è stato ottenuto più frequentemente di tutti. I valori più vicini a questo:

$15.435 \text{ k}\Omega$, $15.437 \text{ k}\Omega$

appena un po' meno frequentemente, i valori più lontani, agli estremi del diagramma, assai raramente.

L'ampiezza del picco nel grafico si chiama **deviazione standard** (σ) — ha una definizione precisa, ma ora non la trattiamo. Circa il 68% dei risultati sperimentali, poco più di $\frac{2}{3}$, cadono nell'intervallo fra valore centrale $+\sigma$ o valore centrale $-\sigma$.

Data una serie di misure $x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n$ è ragionevole stimare che il valore reale della quantità misurata sia la loro media aritmetica

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n}$$

Riporteremo quindi il risultato dei nostri esperimenti nella forma $x = \bar{x} \pm$ una certa incertezza δx . Questa incertezza si calcola così:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}}$$

↑
"DEVIAZIONE STANDARD DEI CAMPIONI" (è l'ampiezza del picco)

$$\delta x = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \leftarrow \begin{cases} \text{"DEVIAZIONE STANDARD DELLA MEDIA"} \\ \text{QUESTA È LA NOSTRA INCERTEZZA} \end{cases}$$

Nota: per σ_x potreste trovare sui libri una formula con il denominatore $n-1$ anziché n : è una sottigliezza, vanno bene entrambe.

Esercizio Supponiamo di misurare dieci volte la medesima lunghezza, ottenendo

42.5 mm	42.6 mm	42.2 mm
42.8 mm	42.4 mm	42.5 mm
42.2 mm	42.6 mm	42.3 mm
42.4 mm		

Che stima della lunghezza possiamo riportare?

Soluzione Detta x la lunghezza, calcoliamo $x = \bar{x} \pm \delta x$.
Innanzitutto $\bar{x}$ è la media

$$\bar{x} = \frac{42.5 \text{ mm} + 42.8 \text{ mm} + \dots}{10} = \frac{424.5 \text{ mm}}{10} = 42.45 \text{ mm}$$

Trucco la somma al numeratore può essere noiosa da calcolare, anche con una calcolatrice. Visto che i numeri sono tutti 42. qualcosa, in gran segreto, possiamo farne il conto con la sola parte frazionaria:

$$\frac{5+8+2+4+6+4+6+2+5+3}{10} = 4.5$$

Ora calcoliamo δx

$$\delta x = \sqrt{\frac{(42.5 \text{ mm} - 42.45 \text{ mm})^2 + (42.8 \text{ mm} - 42.45 \text{ mm})^2 + \dots}{10}}$$

In pratica, conviene preparare una tabella dei risultati intermedi. Ordinare i dati in ordine crescente, siccome

avvicina i risultati uguali, può aiutare

i	x_i [mm]	$x_i - \bar{x}$ [mm]	$(x_i - \bar{x})^2$ [mm ²]
1	42.2	0.25	0.0625
2	42.2	0.25	0.0625
3	42.3	0.15	0.0225
4	42.4	0.05	0.0025
5	42.4	0.05	0.0025
6	42.5	-0.05	0.0025
7	42.5	-0.05	0.0025
8	42.6	-0.15	0.0225
9	42.6	-0.15	0.0225
10	42.8	-0.35	0.1225

$$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 = (2 \cdot 0.0625 + 3 \cdot 0.0225 + 4 \cdot 0.0025 + 0.1225) \text{ mm}^2 = 0.0325 \text{ mm}^2$$

$$\sigma_x = \sqrt{0.0325 \text{ mm}^2} = 0.0180 \text{ mm}$$

$$\delta x = \frac{0.0180 \text{ mm}}{\sqrt{10}} = 0.057 \text{ mm}$$

Seguendo la regola di arrotondare l'errore ad una cifra significativa abbiamo $x = (42.45 \pm 0.06) \text{ mm}$

Misure che sono conti

Talvolta una misura consiste nel contare

determinati eventi che si verificano casualmente in un campione per poi dedurre una stima del numero di eventi su tutta una popolazione. In questi casi consideriamo il conto come affetto da un certo errore casuale, perché campioni diversi daranno conti simili, ma diversi. La stima corretta della incertezza sul nostro conto, se abbiamo contato n_0 eventi è

$$n = n_0 \pm \sqrt{n_0}$$

fine l.9

Funzioni & grafici

Una **funzione** è una legge che associa, ad ogni elemento di un insieme detto **dominio** della funzione, un ben preciso elemento di un altro insieme detto **codominio**.

Esempio la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

dominio

codominio

nome della funzione

x generico elemento del dominio

$2+x^3$ elemento del codominio associato da f al generico elemento del dominio x

è la legge che associa ad ogni numero reale x — il dominio è l'insieme $\mathbb{R}$ — il numero reale $2+x^3$ — anche il codominio è $\mathbb{R}$.

La disposizione tipografica degli elementi

[nome della funzione] : [dominio] $\longrightarrow$ [codominio]

[variabile] $\longmapsto$ [espressione associata]

è un modo formale, preciso, di descrivere una funzione, non è un'acozzaglia di simboli in ordine sparso. Se si intende specificare una funzione con questa simbologia, quindi, va fatto esattamente come indicato qua sopra.

Sposso parleremo di funzioni che hanno come dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, o un suo sottoinsieme, e come codominio ancora l'insieme $\mathbb{R}$. Quando è chiaro dal

contesto quali siano dominio e codominio, possiamo descrivere una funzione semplicemente con un'espressione come

$$f(x) = 2 + x^3 \quad "f \text{ di } x \text{ è } 2 + x^3"$$

Similmente, nota questa funzione f , possiamo voler esprimere il fatto che f associa all'elemento del dominio 3 , l'elemento del codominio 29 — ossia $2 + 3^3 = 29$.

Questo si fa con l'espressione

$$f(3) = 29 \quad "f \text{ di } 3 \text{ è } 29"$$

Nuovamente: le espressioni matematiche sono formali. Dire che f di 3 è 29 e che f di 29 è 3 non è uguale!

Nota: tuttavia alcuni specifici abusi della notazione sono comuni, e si possono commettere quando non c'è rischio di confondersi. Per esempio a volte si scrive "la funzione $f(x)$ " e sarebbe corretto "la funzione f "

$$\sin 30^\circ$$

"

$$\sin(30^\circ)$$

$$\cos^2 7$$

$$(\cos(7))^2$$

Nel dubbio, conviene utilizzare la forma pedante.

Una funzione non deve necessariamente possedere una espressione di natura algebrica. Per esempio, i valori assunti da una funzione (quindi la funzione stessa) potrebbero essere determinati sperimentalmente, o stabiliti

per convenzione, e dati in forma grafica o tabulare.

Esempi:

- la funzione che associa un punto della Terra alla sua quota sul livello del mare — definita sperimentalmente
- la funzione che associa ad ogni data il giorno della settimana corrispondente — definita per convenzione
- sarebbe **SBAGLIATO** parlare della funzione che associa ad x il numero y tale che $y^2 = x$. — infatti questo numero non è determinato univocamente: a 4 si potrebbe associare sia 2 sia -2.

Rappresentazioni di Funzioni

Il modo più immediato di rappresentare una funzione f è forse una tabella che elenca, per ogni valore di x ritenuto interessante, il corrispondente valore di $f(x)$.

Eg La funzione $f(x) = 1 + x^2$ può dar luogo alla tabella

x	-1	-0.5	0	0.5	1	2	100
$f(x)$	2	1.25	1	1.25	2	5	101

Per quanto semplice, questa rappresentazione non determina f univocamente: come fare se il valore di x che ci interessa non è fra quelli tabulati?

Vedremo come ovviare, in parte, a questo inconveniente.

niente quando parleremo di interpolazione lineare.

Esercizio data la tabella

x	0	1	2	3	4
f(x)	0	1.5	4	7.5	12

e sapendo che la funzione f è della forma

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

determina l'espressione di f .

Soluzione dobbiamo determinare le tre costanti a, b, c ci aspettiamo, quindi, di dover sfruttare tre condizioni. Possiamo provare con:

valori letti dalla tabella

$$\begin{cases} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = f(0) = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = f(2) = 4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c = f(4) = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 4 \\ a \cdot 16 + b \cdot 4 + c = 12 \end{cases}$$

uguaglianze vere per via della forma di f

Risolviendo il sistema otteniamo $a = \frac{1}{2}$ $b = 1$ $c = 0$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x$$

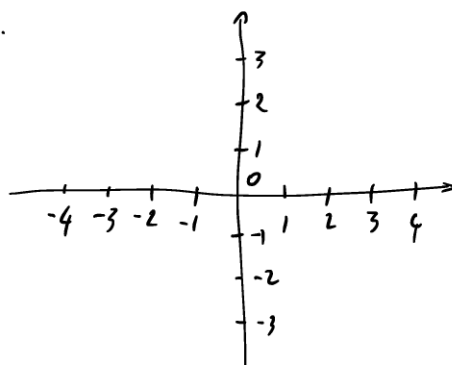
È ora importante verificare questo risultato ricostruendo la tabella dei valori di f a partire dalla formula che abbiamo trovato. Una discrepanza indicherebbe

la possibilità di un errore di calcolo.

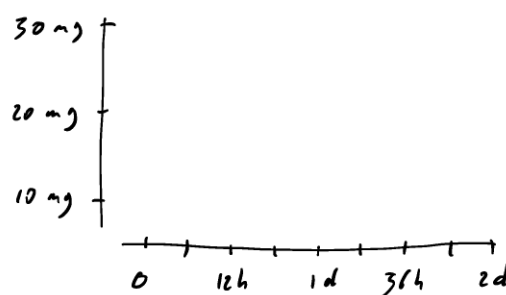
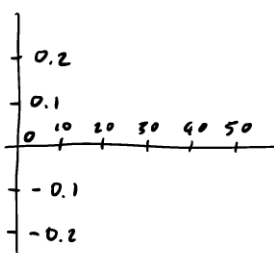
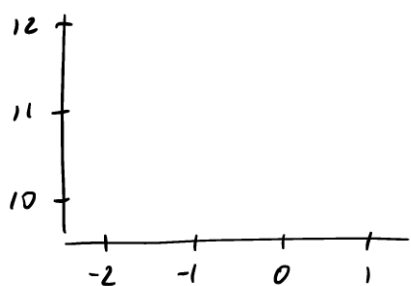
Nota: abbiamo scelto di scrivere le tre condizioni necessarie per trovare i coefficienti usando i valori tabulati per f in 0, 2, 4. Matematicamente, esattamente, qualunque terna di valori sarebbe stata adatta allo scopo (per esempio 0, 1, 2). Tuttavia, in pratica, è buona norma usare valori più distanti possibile fra loro, per minimizzare l'impatto degli errori di arrotondamento e delle eventuali incertezze di misura nei dati tabulati.

Grafici

Considerando due assi ortogonali e graduati secondo la distanza da un certo punto fissato, si ottiene, come è ben noto, un diagramma cartesiano.



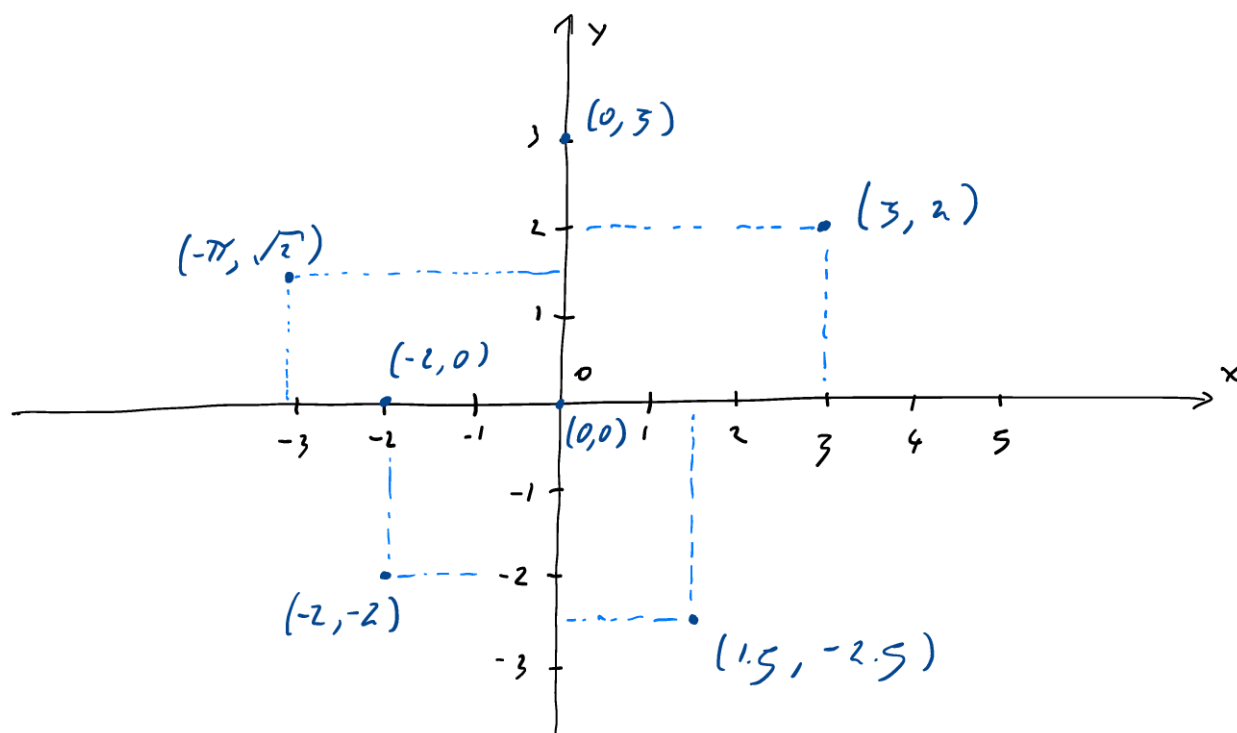
Nota: nulla obbliga lo zero a trovarsi nel punto di incontro degli assi, né gli assi ad essere graduati nella medesima unità.



Alcuni diagrammi cartesiani

Un asse è tipicamente rappresentato orizzontalmente e detto *asse delle ascisse* $\xrightarrow{\text{ASCISSE}}$, l'altro disposto verticalmente, si chiama *asse delle ordinate* $\xrightarrow{\text{ORDINATE}}$.

Un diagramma cartesiano ci permette di assegnare ad ogni punto del piano un nome, che è la coppia di valori che si leggono in corrispondenza delle proiezioni del punto rispettivamente in quest'ordine! sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate.



Viceversa, ogni coppia di valori è rappresentata da un punto del diagramma.

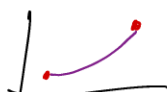
Il grafico di una funzione f è costituito da tutti i punti del tipo $(x, f(x))$

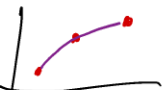
Se fosse possibile disegnare tutti gli infiniti punti $(x, f(x))$

il loro insieme formerebbe, solitamente, una linea, che è il grafico di f . In pratica, ci si deve limitare al calcolo di una quantità finita di punti, che poi si congiungono tracciando una linea che, ragionevolmente, dovrebbe seguire il vero grafico (teorico).

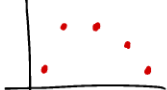
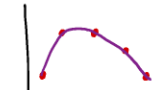
Come si disegna un grafico in pratica?

- ① Calcolo il valore della funzione in alcuni (pochi) punti per capire come impostare gli assi
- ② Traccio gli assi e riporto i punti calcolati
- ③ Aggiungo punti in quelle zone dove l'andamento del grafico non mi è chiaro.

Es.  sarà  o  ?

Aggiungo un punto , quindi è così  !

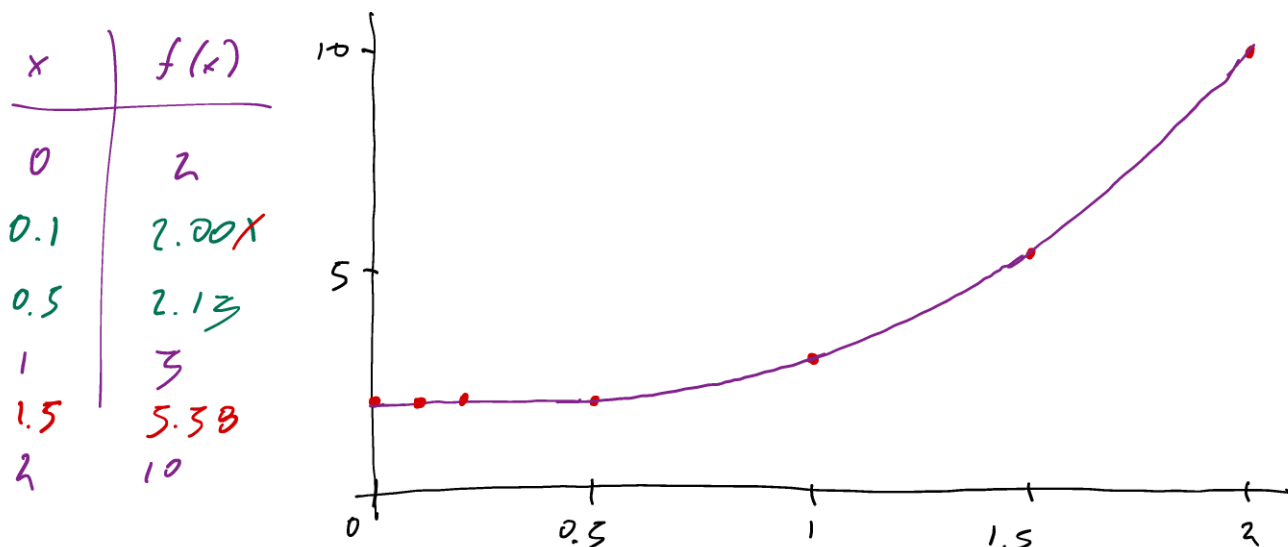
Es.  è  o  oppure  ?

Aggiungo due punti , quindi  !

Esercizio

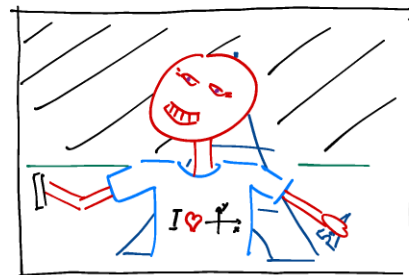
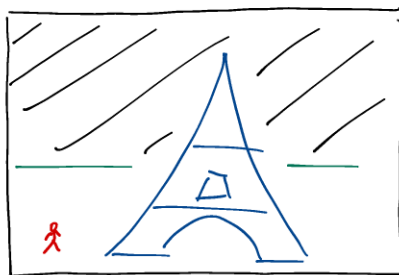
Tracciare il grafico di $x \mapsto 2+x^3$.

per x compreso fra 0 e 2.



Nota Nel tracciare il diagramma di una funzione è importante prestare attenzione alla scelta della scala e alla centratura.

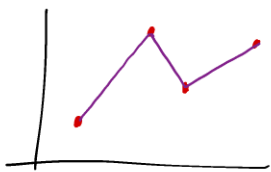
Se un turista ti chiede una foto, la vuole come quella di destra.



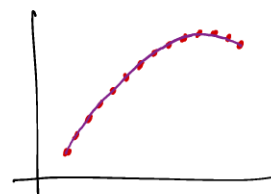
Anche le funzioni preferiscono essere in primo piano (e hanno, bene o male, tanto buon gusto quanto il grosso dei turisti). In maniera più seria, un grafico è un mezzo per comunicare informazione. È fondamentale far uso di tutto lo spazio disponibile in maniera informativa.

Siccome lo spazio vuoto non comunica informazione, è bene che i grafici occupino tutto lo spazio disponibile.

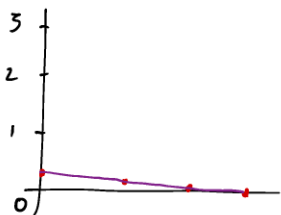
Come **NON** tracciare un grafico



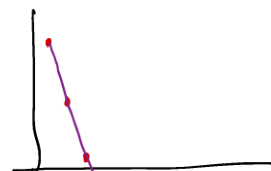
Spezzata (salvo se la funzione è davvero una spezzata)



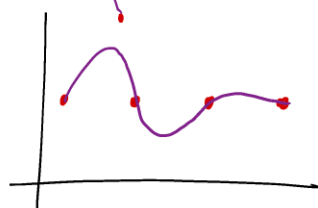
Calcolare 2000 punti non è sbagliato, ma spreca tempo



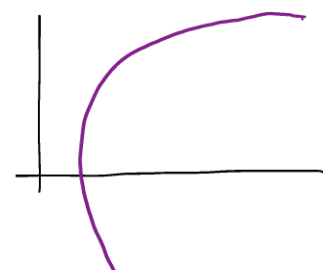
Scala sbagliata, più conveniente usare unità diverse sui due assi



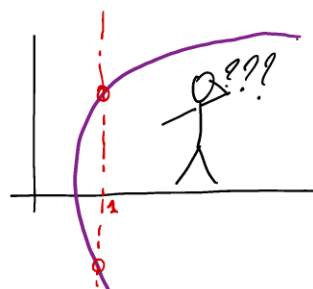
Centrata sbagliata, non tutti i numeri sono positivi.



Comportamento non evidenziato dai punti calcolati.



Uncino, quanto vale $f(1)$?



Esercizio: traccia i grafici delle funzioni seguenti

- (1) $f_1(x) = x - 0.01 \cdot x^3$ per $0 \leq x \leq 15$
- (2) $f_2(x) = x - 2 \overset{\text{IN RADIANTI!}}{\cos}(x)$ " $0 \leq x \leq 5$
- (3) $f_3(x) = x^3 - 50 \cdot x$ " $9.8 \leq x \leq 10.2$
- (4) $f_4(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$ " $-3 \leq x \leq 3$
- (5) $f_5(x) = \cos(x)$ " $-0.1 \leq x \leq 0.1$
- (6) $f_6(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$ " $-0.1 \leq x \leq 0.1$
- (7) $f_7(x) = x - \sin(x)$ " $-0.1 \leq x \leq 0.1$

fino / 10

Soluzioni: (Nota: non tutte le soluzioni sono state illustrate a lezione. Qui aggiungo, per completezza, quelle mancanti)

① $f_1(x) = x - 0.01 \cdot x^3$ per $0 \leq x \leq 15$

1) Comincio col calcolare

$f_1(0) = 0$ $f_1(5) = 3.75$ $f_1(10) = 0$ $f_1(15) = -18.75$

2) Imposto il grafico e riporto i punti.

3) Desidero indagare meglio l'andamento di f_1

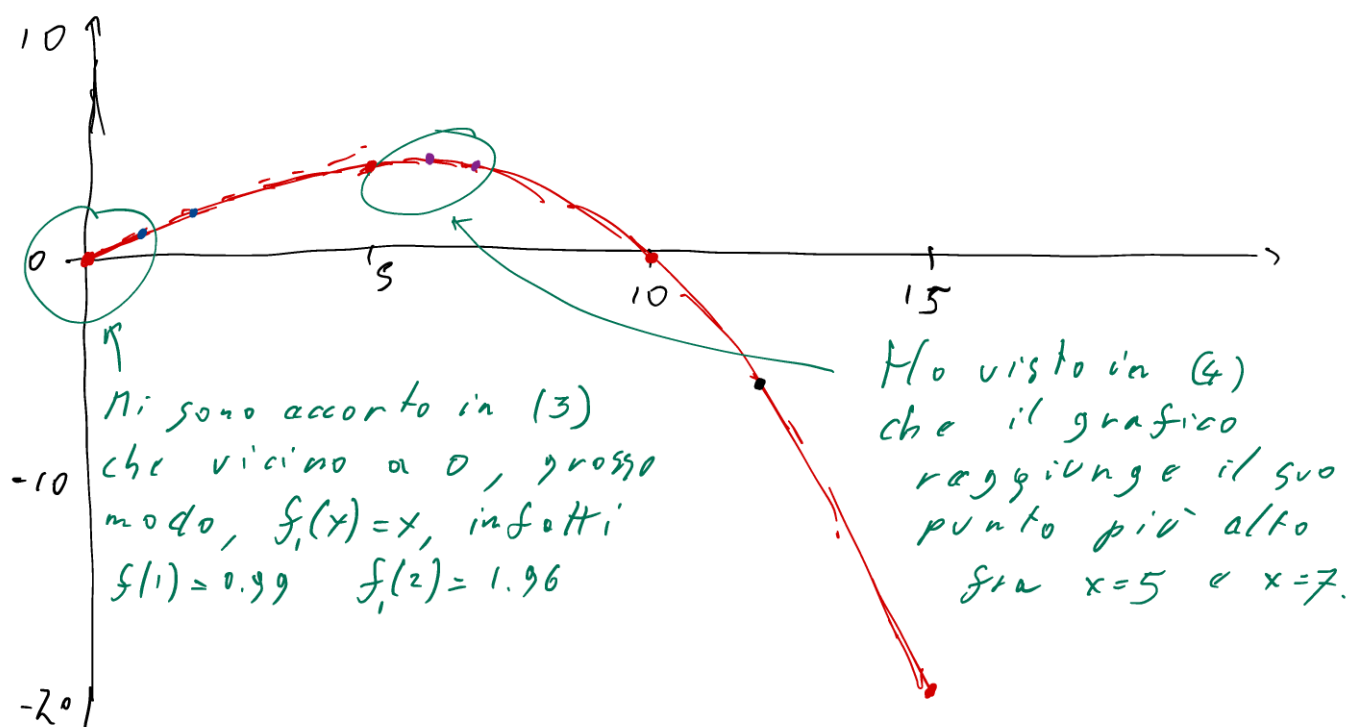
vicino a 0: $f_1(1) = 0.99$, $f_1(2) = 1.96$

4) f_1 tocca il massimo valore prima o dopo 5?

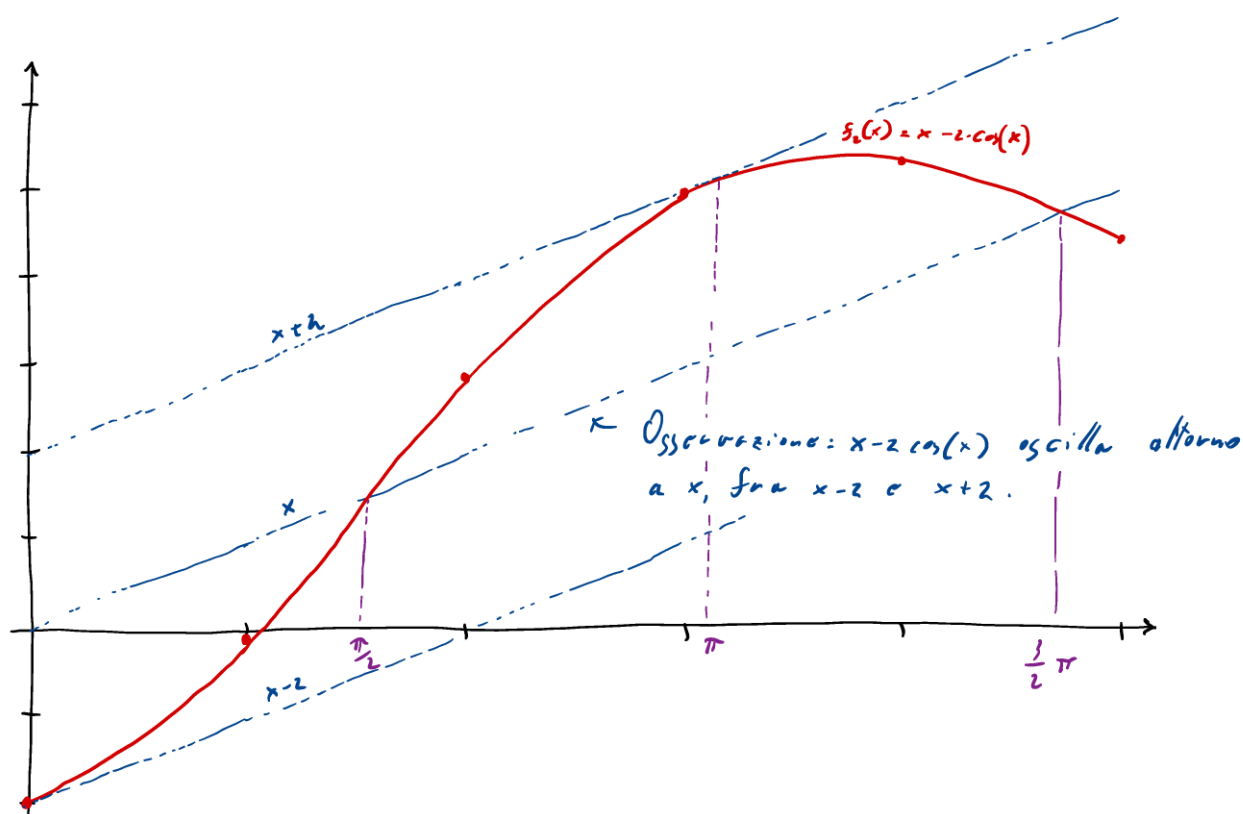
$f_1(6) = 3.84$, $f_1(7) = 3.56 \rightarrow$ probabilmente
fra 5 e 7 perché $f_1(6) > f_1(5)$, $f_1(7)$.

5) Per capire meglio il comportamento

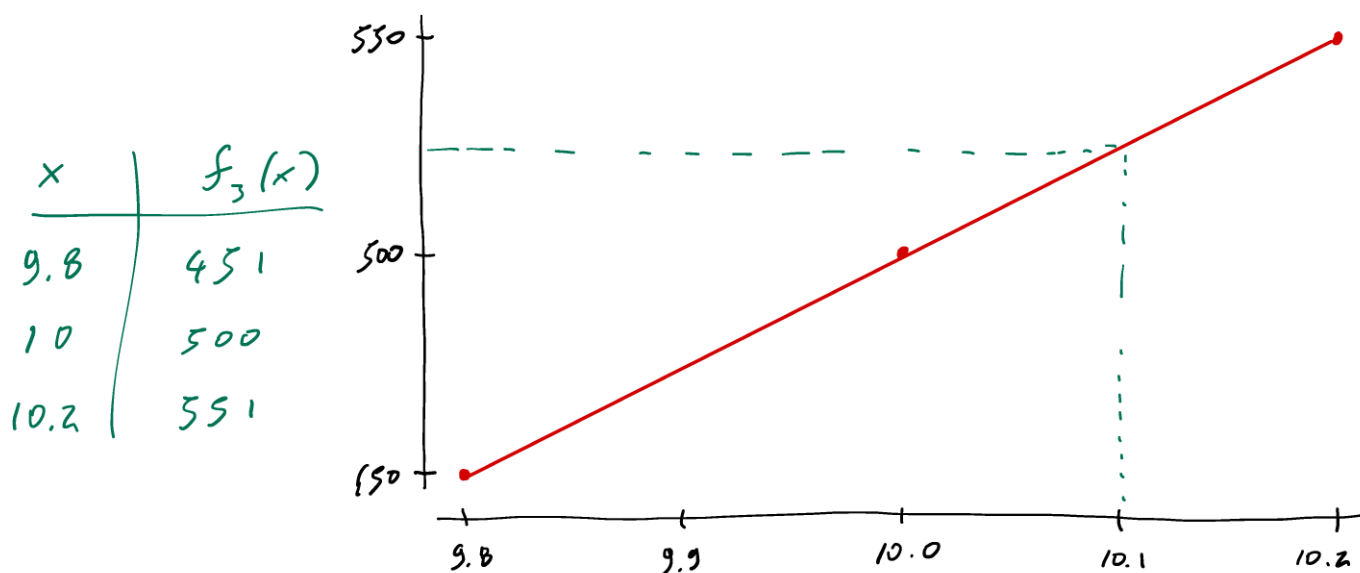
fra 10 e 15 calcolo $f_1(12) = -5.28$.



(1) $f_2(x) = x - 2 \overset{\text{IN RADIANTI!}}{\cos(x)}$ per $0 \leq x \leq \pi$

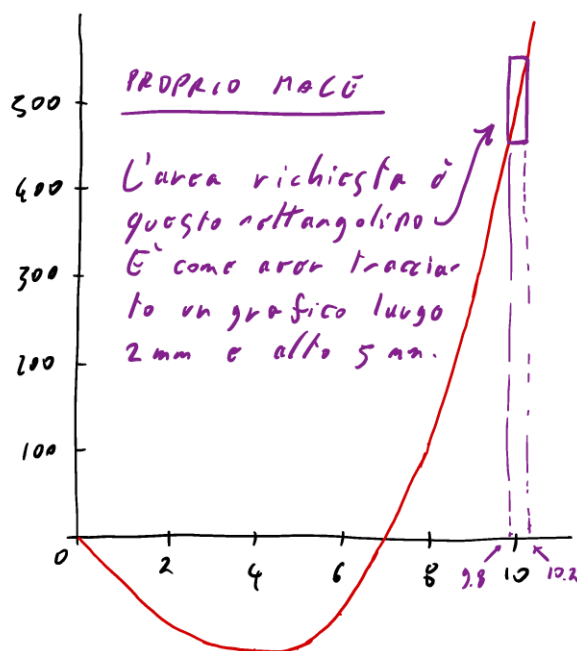
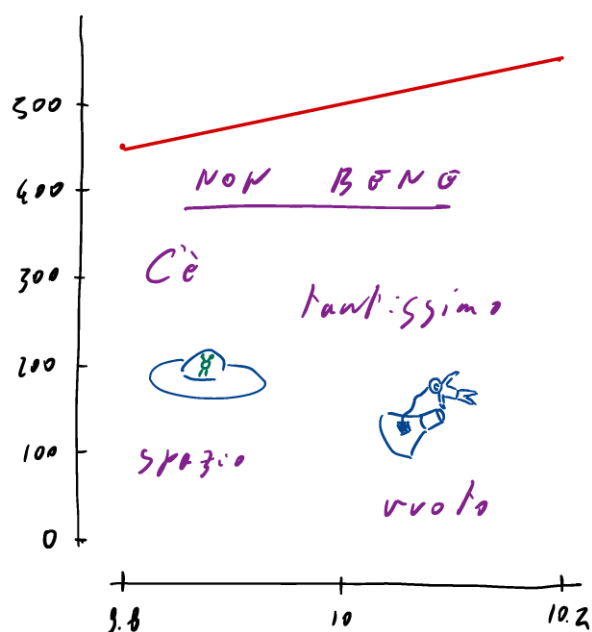


(3) $f_3(x) = x^3 - 50 \cdot x$ per $9.8 \leq x \leq 10.2$

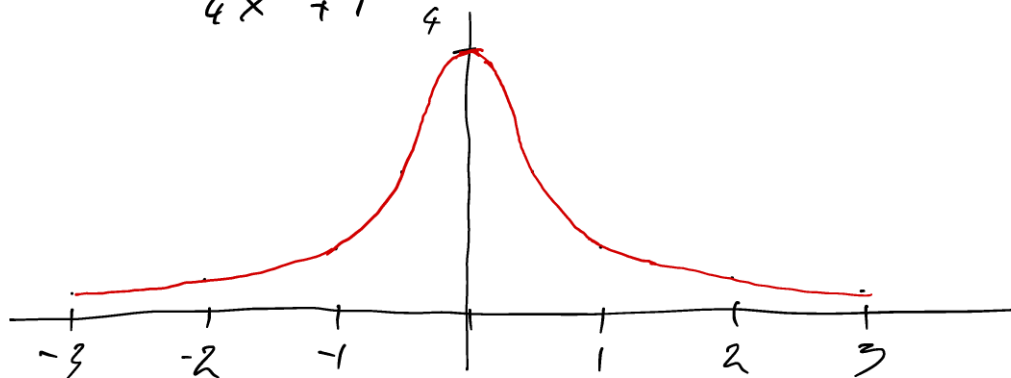


Osservazione: sebbene $f_3(x) = x^3 - 50x$ non sia esattamente l'equazione di una retta, in pratica, questo grafico appare quasi rettilineo.

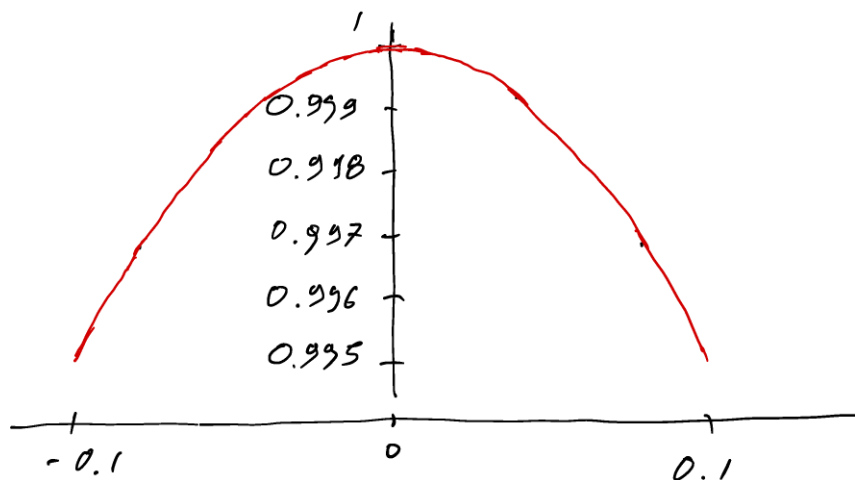
Modi per sbagliare questo esercizio:



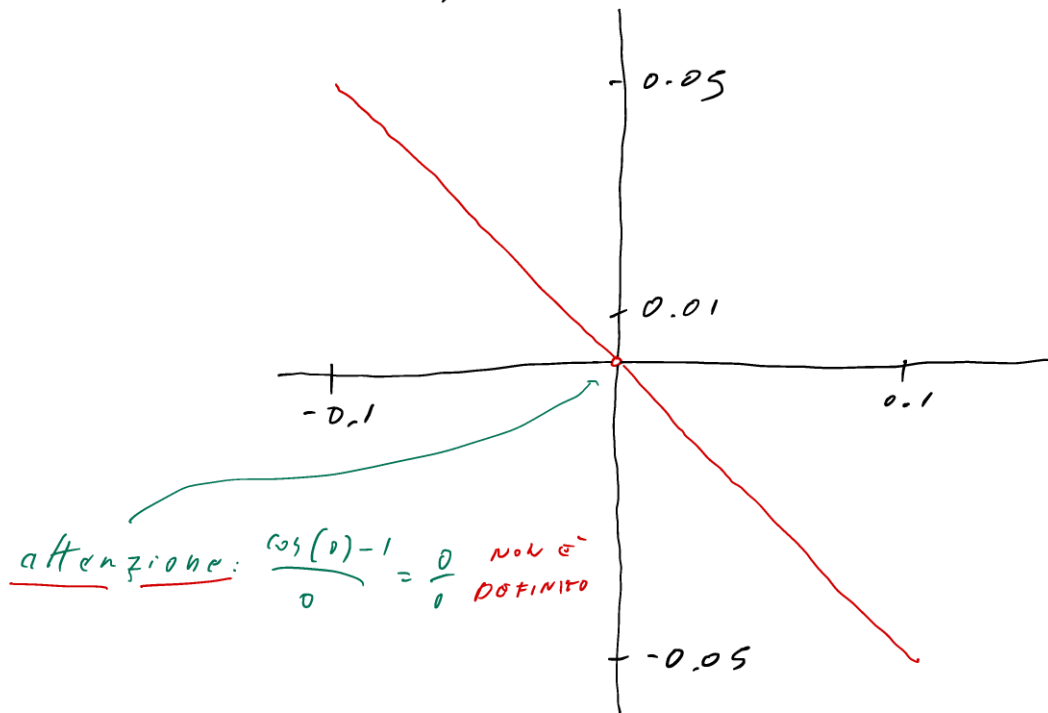
④ $f_4(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$ per $-3 \leq x \leq 3$



⑤ $f_5(x) = \cos(x)$ per $-0.1 \leq x \leq 0.1$



$$(6) \quad f_6(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x} \quad \text{per } -0.1 \leq x \leq 0.1$$



$$(7) \quad f_7(x) = x - \sin(x) \quad \text{per } -0.1 \leq x \leq 0.1$$

(1) Comincio con

$$f_7(-0.1) = -1.67 \cdot 10^{-4} \quad f_7(0) = 0 \quad f_7(0.1) = 1.67 \cdot 10^{-4}$$

(2) Imposto il grafico. Attenzione: mi sono venuti numeri molto piccoli. Dovrò usare una scala opportuna per le ordinate, tipo 3cm corrispondono a 10^{-4} .

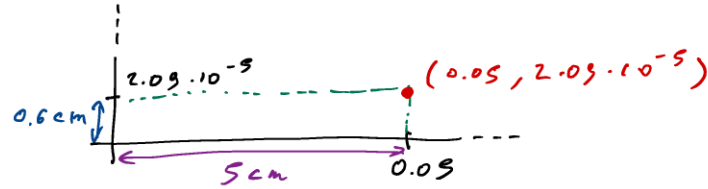
Nota: I valori si riportano mediante la proporzione con determinate unità di misura. Per esempio, se decido che, in ascissa 10cm corrispondono a 0.1, mentre in ordinata 3cm corrispondono a 10^{-4} , come

riporto il punto $(0.05, 2.09 \cdot 10^{-5})$?

$10 \text{ cm} : 0.1 = x ; 0.05 \rightarrow x = 5 \text{ cm}$

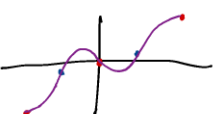
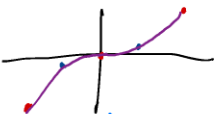
$\hookrightarrow f(0.05)$

$3 \text{ cm} : 10^{-4} = y ; 2.09 \cdot 10^{-5} \rightarrow y = 0.627 \text{ cm} \approx 0.6 \text{ cm}$

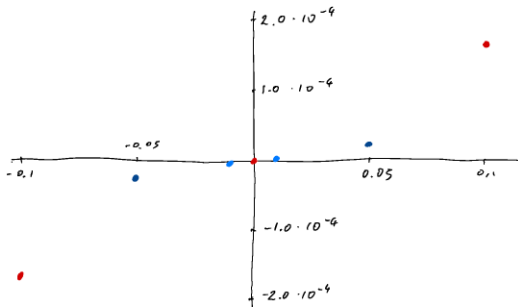


(3) Per ora ho un grafico così  ma dubito che sia rettilineo. Per controllare calcolo $f_z(0.05) = 2.09 \cdot 10^{-5}$ $f_z(-0.05) = -2.09 \cdot 10^{-5}$

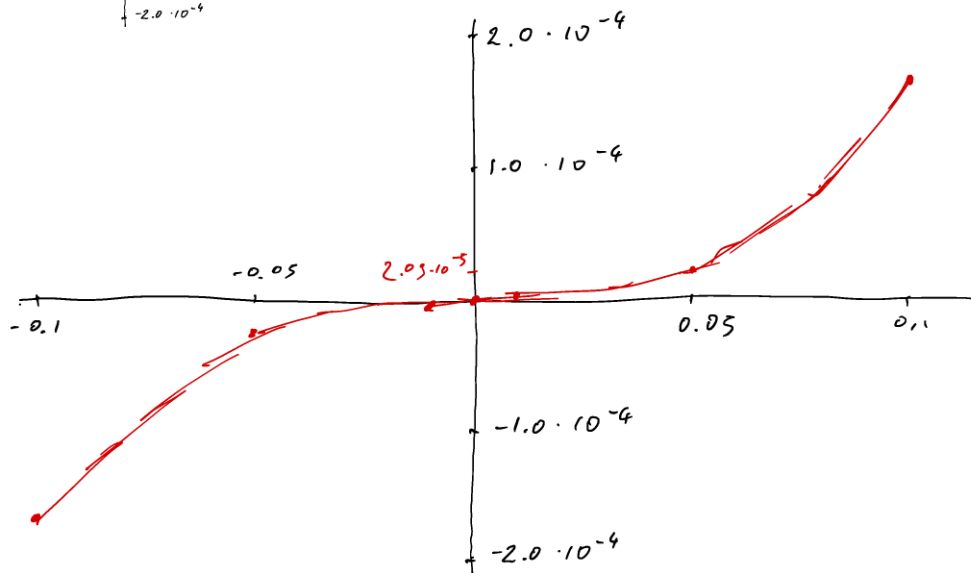
(4) Ora ho questa situazione  , mi devo aspettare un grafico come questo

 oppure come questo  ?

Calcolo $f_z(0.01) = 1.67 \cdot 10^{-7}$ $f_z(-0.01) = -1.67 \cdot 10^{-7}$



I punti sono come in figura, quindi mi trovo nella seconda situazione.



Conviene studiare il comportamento di alcune funzioni, o classi di funzioni, che si incontrano frequentemente. Ci concentreremo su:

- funzioni polinomiali
- esponenziali
- logaritmi
- funzioni trigonometriche ($\sin$, $\cos$, $\tan$)
- funzioni trigonometriche inverse ($\arcsin$, $\arccos$, ...)

Funzioni polinomiali

Si chiamano così le funzioni della forma

$$f(x) = a_d \cdot x^d + a_{d-1} \cdot x^{d-1} + \dots + a_1 \cdot x + a_0$$

monomi

il numero intero d , il massimo esponente della x nell'espressione di f — intendendo $a_d \neq 0$ — si chiama grado del polinomio.

In generale, una funzione polinomiale, diciamo di grado $d > 0$, è definita su tutti i numeri reali. Per il suo grafico possiamo dire che:

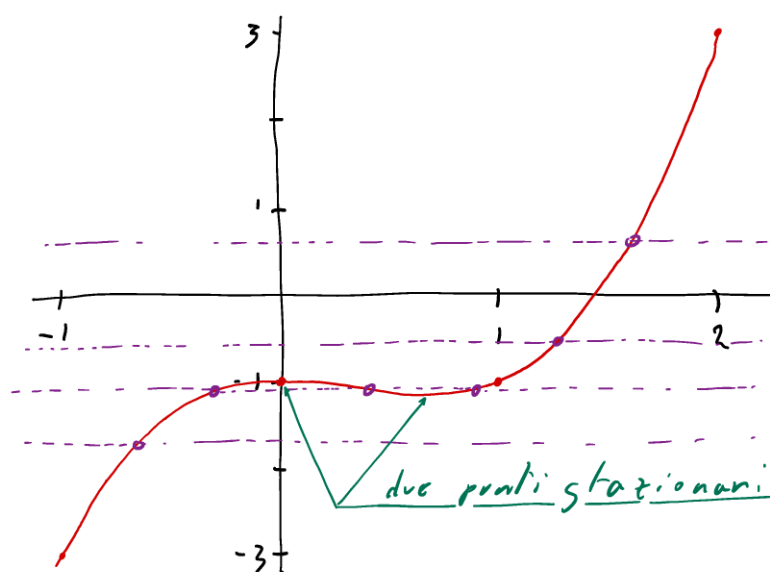
- È una curva regolare (ossia è continua, cioè senza salti , e liscia, cioè senza angoli  e senza cuspidi ).

- Ha al massimo $d-1$ gobbe:  oppure 
Formalmente dovremmo dire che ha al massimo $d-1$ "punti stazionari": studieremo questo concetto quando tratteremo la derivata.
- Incontra una qualunque retta orizzontale — per esempio l'asse x — al massimo d volte.

Esempio Studiamo il grafico di:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

(polinomio di grado 3) per $-1 \leq x \leq 2$.



Come previsto ci sono al massimo — in questo caso esattamente — $3-1$ punti stazionari.

Inoltre il grafico non interseca alcuna retta orizzontale in più di 3 punti.

Questo esempio ci permette di illustrare una osservazione importante:

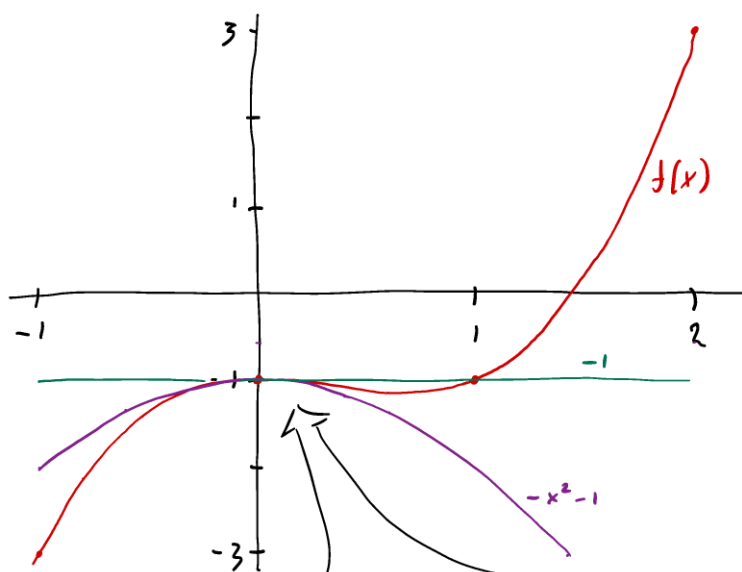
- Per valori di $|x|$ piccoli — rozzamente potremmo dire di un ordine di grandezza inferiore rispetto ai coefficienti del polinomio — dominano i monomi di grado

minore. Ossia, è possibile approssimare la funzione trascurando i monomi di grado più alto: va da sé che meno monomi si trascurano, migliore è l'approssimazione.

- Per valori di $|x|$ grandi — rozzamente, di un ordine di grandezza superiore rispetto ai coefficienti — al contrario, dominano i monomi di grado maggiore.

Ossia possiamo approssimare la funzione trascurando i monomi di grado più basso.

Nel nostro esempio



Vicino a 0 il grafico rosso è simile a quello viola.

$$f(x) = x^3 - x^2 - 1$$

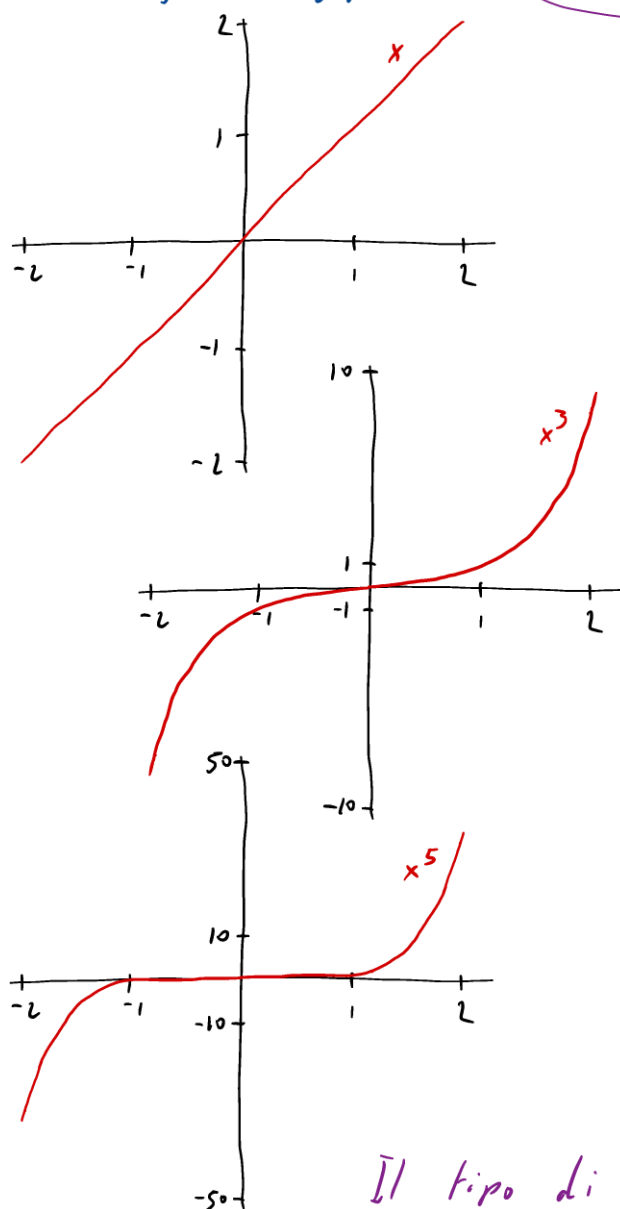
Trascurando il monomio x^3 , otteniamo $-x^2 - 1$ che approssima bene $f(x)$ per x vicino a 0. Se trascuriamo anche $-x^2$ ci rimane la costante -1 , che, vicino a 0, è la costante che meglio approssima f .

Se tracciassimo, invece, il grafico di f in un intervallo più vasto della x — per esempio fra -100 e 100 — (esercizio) in modo tale evidenziare il comportamento

per $|x|$ grande, vedremo che questo grafico è vicino a quello di x^3 , che è il monomio di grado massimo nell'espressione di f .

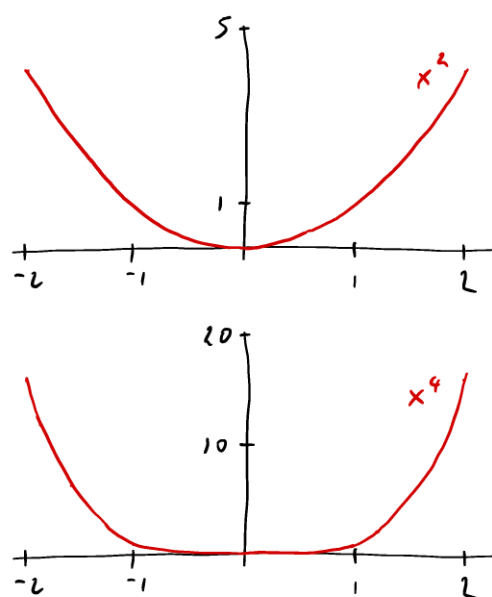
Per sfruttare al meglio la possibilità di approssimare un polinomio — in certe circostanze — con altri più semplici, conviene ricordare l'aspetto dei grafici dei polinomi più semplici di tutti, ossia le potenze di x .

Potenze dispari



Occhio alla scala sull'asse y !

Potenze pari

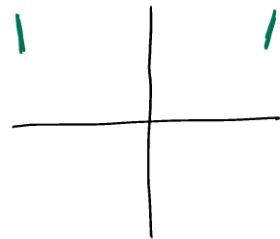


Il tipo di simmetria di questi grafici si chiama "simmetria pari".

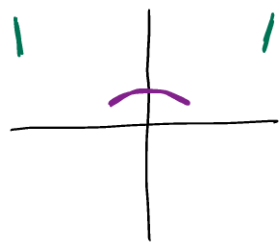
Il tipo di questi altri "simmetria dispari".

Esempio: studiamo la funzione $f(x) = x^4 - x^2 + 0.1$

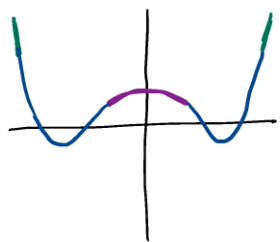
I principi generali ci dicono che, per $|x|$ grande, ossia lontano dallo zero, questo grafico assomiglia a quello di x^4 .



Inoltre, per $|x|$ piccolo, il grafico assomiglia a $-x^2 + 0.1$, che sappiamo per esperienza essere una parabola rivolta verso il basso.



Infine, il grafico di f ha al massimo due gobbe, e c'è essenzialmente un solo modo di connettere i tratti che abbiamo rispettando questa condizione.



Queste considerazioni ci hanno permesso di capire, qualitativamente — ossia trascurando, e possibilmente anche distorcendo, la scala degli assi — la forma che avrà il nostro grafico. Se ora ci accingiamo a tracciare un grafico quantitativamente corretto — ossia un grafico fatto a modo — possiamo usare l'informazione guadagnata in questo modo come guida.

Esercizio tracciare questo grafico per x compreso fra -1.1 e 1.1 .

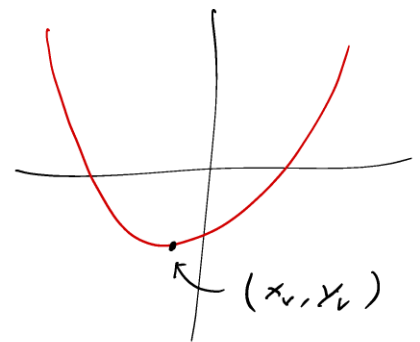
Funzioni quadratiche (parabole)

Le funzioni quadratiche sono particolari funzioni polinomiali della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$.

Il grafico di $f(x) = ax^2 + bx + c$ è una parabola con asse verticale, concava verso l'alto se $a > 0$, verso il basso se $a < 0$. A riguardo, può servire ricordarsi queste formule.

Ascissa del vertice $x_v = \frac{-b}{2a}$

(Si ricava come punto medio delle intersezioni della parabola con l'asse x : $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$)



Ordinata del vertice — basta usando x_v : $y_v = ax_v^2 + bx_v + c$

Volendo si può ricordare la formula $y_v = c - \frac{b^2}{4a}$ però è più facile e sicuro ricavare y_v da x_v .

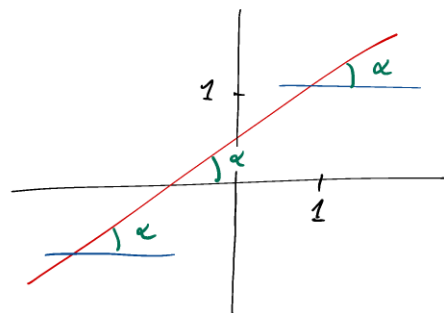
Funzioni lineari (rette)

Le funzioni lineari sono particolari funzioni polinomiali della forma $f(x) = ax + b$.

Il grafico di $f(x) = ax + b$ è una retta, il numero a si chiama coefficiente angolare della retta. Se le unità sui due assi coincidono, allora l'angolo α di

inclinazione della retta vale

$$\alpha = \arctan(a)$$



Osservazione: due rette che abbiano lo stesso coefficiente angolare sono parallele.

Retta per due punti

Es. Trovare l'equazione $f(x) = ax + b$ di una retta passante per $(-1, 4)$ e $(1, 0)$.

Sol.

Per dato del problema: $f(-1) = 4$
 $f(1) = 0$

Quindi

$$\begin{cases} a \cdot (-1) + b = 4 \\ a \cdot (1) + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

Di conseguenza $\boxed{f(x) = -2x + 2}$

Consiglio trovata una soluzione,

la verifico

$$f(-1) = (-2) \cdot (-1) + 2 = 4 \quad \checkmark$$

$$f(1) = (-2) \cdot 1 + 2 = 0 \quad \checkmark$$

fine !!

Funzioni esponenziali

Sappiamo che $x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_{n \text{ volte}}$

e ugualmente $x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \dots \cdot \frac{1}{x}}_{n \text{ volte}}$

questo è l'ordinario elevamento a potenza. È possibile estendere l'elevamento a potenza in modo tale da ammettere esponenti reali arbitrari (anche frazionari, o persino irrazionali). Il risultato è l'esponenziale b^a , definito per ogni esponente a e per basi b positive. Valgono le seguenti proprietà.

$$b^0 = 1 \quad b^x \cdot b^y = b^{x+y} \quad x^a \cdot y^a = (xy)^a \quad (b^x)^y = b^{xy}$$

$$b^1 = b \quad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \quad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a \quad b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$
$$1^a = 1$$

Nota: la costruzione formale della funzione esponenziale richiede nozioni di analisi ed è al di fuori della portata di questo corso. È possibile, tuttavia, giustificare le proprietà dell'esponenziale pensando al caso più semplice dell'elevamento a potenza. Per esempio:

$$b^x \cdot b^y = \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots}_{x \text{ volte}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots}_{y \text{ volte}} = \underbrace{b \cdot b \cdot b \dots}_{x+y \text{ volte}} = b^{x+y}$$

Esercizio Sapendo che $10^{3x} = 64$, quanto vale 100^x ?

Analizziamo prima la quantità cercata

$$100^x = (10^2)^x = 10^{2 \cdot x} = 10^{x \cdot 2} = (10^x)^2$$

$\underbrace{(10^2)^x = 10^{2 \cdot x}}_{(b^a)^c = b^{a \cdot c}} \quad \underbrace{10^{x \cdot 2} = (10^x)^2}_{b^{a \cdot c} = (b^a)^c}$

Ci basta quindi capire quanto valga 10^x . Ripetendo il procedimento su 10^{3x} vediamo che

$$64 = 10^{3x} = 10^{x \cdot 3} = (10^x)^3 \Rightarrow 10^x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Quindi, sostituendo

$$100^x = \dots = (10^x)^2 = 4^2 = \boxed{16}$$

Esercizio Sapendo che $8^x = 2.7 \cdot 10^4$, quanto vale 2^x ?

Procedendo come nell'esercizio precedente

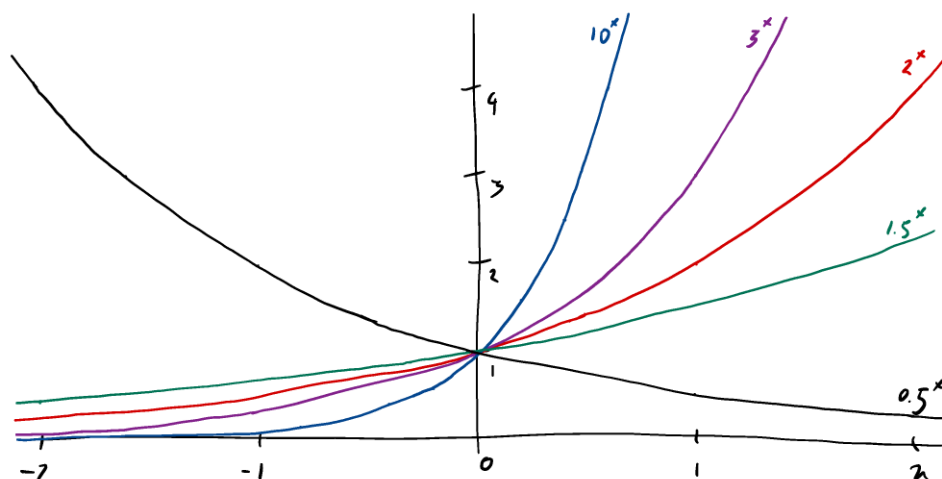
$$2.7 \cdot 10^4 = 8^x = (2^3)^x = (2^x)^3 \Rightarrow 2^x = \sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4}$$

Regla da calcolare $\sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4}$

$$\sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4} = \sqrt[3]{27 \cdot 10^3} = (27 \cdot 10^3)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{3 \cdot \frac{1}{3}} = \boxed{30}$$

$\underbrace{\sqrt[3]{27} = 3}_{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}} \quad \underbrace{10^1 = 10}_{(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x}$

Grafico dell'esponenziale (esempi)



Osservando questi grafici possiamo notare alcune proprietà delle funzioni esponenziali.

- Se $b > 1$ la funzione b^x è crescente, ossia assume valori via via più grandi al crescere di x .
- Se $0 < b < 1$ la funzione b^x è decrescente, ossia assume valori via via più piccoli al crescere di x .

Algebricamente questo significa che

• per $b > 1$ $b^x > b^y$ equivale a $x > y$

• per $0 < b < 1$ $b^x > b^y$ equivale a $x < y$

Esercizio (domanda di preparazione al test - n. 42)

Risolvi la disequazione $2^x < 5^x$.

Dividendo ambo i membri per la quantità positiva 2^x

$$\underbrace{\frac{2^x}{2^x}}_{=1} < \underbrace{\frac{5^x}{2^x}}_{=\left(\frac{5}{2}\right)^x} \Leftrightarrow \underbrace{1}_{\left(\frac{5}{2}\right)^0} < \left(\frac{5}{2}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^0 < \left(\frac{5}{2}\right)^x \Leftrightarrow \boxed{0 < x}$$

Perché $\frac{5}{2} > 1$

Possiamo vedere, inoltre, che b^x cresce tanto più velocemente, al crescere di x , quanto maggiore è la base b .
Infine, va da sé che tutti i grafici di b^x devono passare per il punto $(0, 1)$, perché $b^0 = 1$ indipendentemente da b .

Alcuni valori della funzione 10^x

Tutti sanno calcolare 10^x quando x è un numero intero:

$$10^2 = 100$$

$$10^7 = 10\,000\,000$$

$$10^{-3} = 0.001$$

&c.

è una semplice questione di contare gli zeri. Diverso è quando x non è intero: per esempio quanto vale $10^{3.7}$?

Un primo passo è scrivere $10^{3.7} = 10^3 \cdot 10^{0.7} = 1000 \cdot 10^{0.7}$, però adesso occorre sapere quanto valga $10^{0.7}$.

Per esercizio, calcoliamo valori approssimati per $10^{0.1}$, $10^{0.2}$, etc. fino a $10^{0.9}$. Sfrutteremo il fatto seguente, che conviene ricordare

$$10^{0.3} \approx 2 \quad (\text{valore esatto } 1.99526\dots)$$

Iniziamo quindi con questa tabella

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1			2							10

Usando la relazione $10^{x+0.3} = 10^x \cdot 10^{0.3} \approx 10^x \cdot 2$ calcoliamo

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1			2			4			8	10

Viceversa, usando $10^{x-0.3} = 10^x \cdot 10^{-0.3} = 10^x / 10^{0.3} \approx 10^x / 2$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1	1.25		2	2.5		4	5		8	10

Ora ci mancano gli esponenti 0.2, 0.5, 0.8, che sono a passi di 0.3 l'uno dall'altro. Ci basta quindi determinarne uno per poter completare la tabella. Per esempio possiamo considerare

$$10^{0.2} = 10^{0.3 - 0.1} = \frac{10^{0.3}}{10^{0.1}} \approx \frac{2}{1.25} = 1.6$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1	1.25	1.6	2	2.5	3.2	4	5	6.4	8	10

+0.3
+0.3

.2
.2

Per curiosità, possiamo confrontare la nostra tabella con i valori esatti:

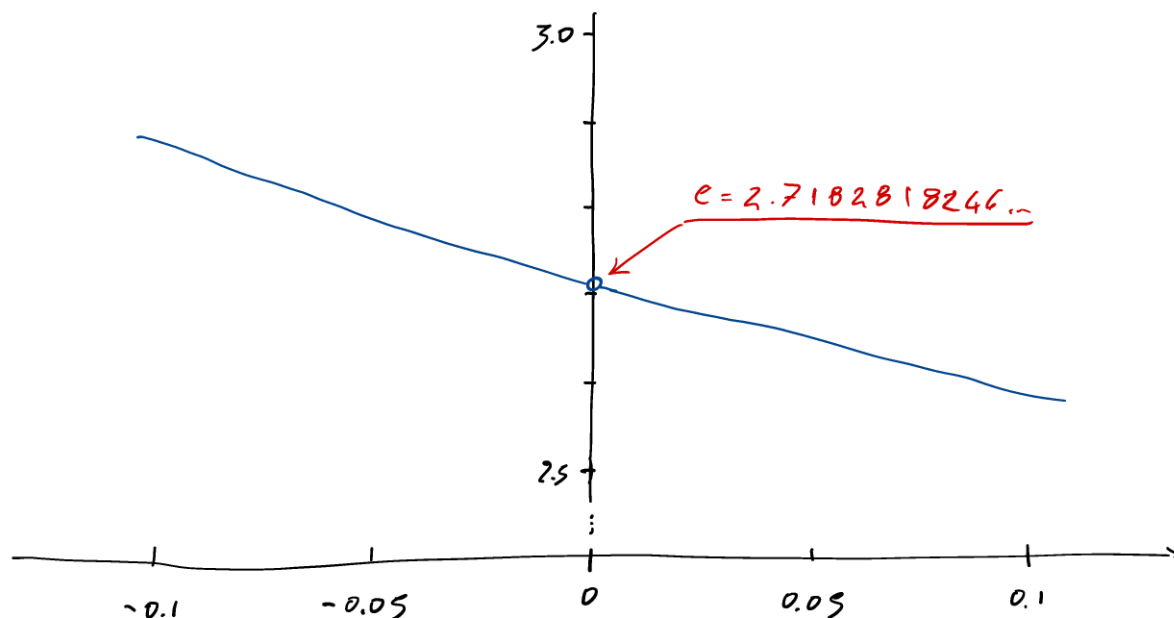
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$10^x \approx$	1	1.25	1.6	2	2.5	3.2	4	5	6.4	8	10
$=$	1.00	1.26	1.58	2.00	2.51	3.16	3.98	5.01	6.31	7.94	10.00
err %	0%	-0.7%	+1.0%	+0.2%	-0.5%	+1.2%	+0.5%	-0.2%	+1.4%	+0.7%	0%

Abbiamo commesso il massimo errore per $10^{0.8}$, e questo è del 1.4% rispetto al valore esatto.

Intermezzo: il numero e

Introduciamo il numero $e = 2.7182818246\dots$, che spesso viene usato come base dei logaritmi — che vedremo al prossimo paragrafo — e degli esponenziali — cioè e^x .

Il numero e — "numero di Eulero", anche "numero di Napero", che sono due persone diverse, ma poco importa perché comunque lo ha scoperto Jacob Bernoulli; — emerge dallo studio della funzione $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$



Chiaramente $f(0)$ non è definito, perché occorrerebbe calcolare l'esponente $\frac{1}{0}$, tuttavia, tracciando un grafico accurato di $f(x)$ in prossimità di $x=0$, si vede che questo ha l'aspetto di una curva regolare cui manca il punto di ascissa 0. Il numero e è definito esattamente come l'ordinata di questo punto mancante. Vedremo a suo tempo che l'espressione formale per riferirsi a questo concetto è che " e è il limite di $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x tendente a 0", e si scrive $e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Il numero e è quindi una costante matematica nello stesso senso in cui lo è π : un numero fissato non

per convenzione — come le 24 ore in un giorno —
 né dall'osservazione di un fenomeno naturale — come
 i 365.24 giorni in un anno — ma da una proprietà
 matematica — la lunghezza della circonferenza per π ,
 e il limite di $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per e .

In pratica, tutte le calcolatrici scientifiche hanno un tasto
 per la funzione e^x , i linguaggi di programmazione hanno
 una funzione di libreria che calcola e^x , etc. Quindi non
 c'è alcun bisogno di calcolare e . Se volessimo, però,
 potremmo calcolare $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x decrescenti in valore
 assoluto:

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
0.1	2.594
0.01	2.705
0.001	2.717
0.0001	<u>2.718</u>

POSITIVI

x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
-0.1	2.868
-0.01	2.732
-0.001	2.720
-0.0001	<u>2.718</u>

NEGATIVI

Quello che otteniamo sono approssimazioni per difetto e per
 eccesso — secondo che x sia rispettivamente positivo o
 negativo — del numero e .

Approfondimento (fuori programma)

Una delle ragioni per definire il numero e è che l'esponen-
 ziale e^x può essere ricondotto alle operazioni algebriche
 mediante una formula

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2} + \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{x^5}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \dots$$

Questa è una somma infinita, però, via via che si procede, gli addendi diventano sempre più piccoli, è quindi possibile calcolare e^x con precisione arbitraria semplicemente sommando una quantità sufficiente di addendi. È precisamente mediante formule come questa che calcolatrici e computer calcolano l'esponenziale.

Logaritmi

Definizione:

$$\log_b x = y \iff b^y = x$$

Il logaritmo in base b di x è quel numero a cui devo elevare b per ottenere x .

In altri termini, i logaritmi non sono che esponenziali scritti in maniera buffa. La proprietà che definisce il logaritmo è appunto che queste due formule dicono la stessa cosa

$$\log_b \square = \triangle \iff b^\triangle = \square$$

qualunque espressione ci sia al posto di $\triangle$ e $\square$.

Lo stesso può essere espresso mediante queste identità, che è importante conoscere

$$b^{\log_b x} = x$$

$$\log_b (b^y) = y$$

Perché valgono queste identità? Se, al posto di $\square$,

scriviamo x , e al posto di $\Delta \log_b x$, abbiamo

$$\log_b \square = \Delta \longleftrightarrow b^\Delta = \square$$

$$\log_b x = \log_b x \longleftrightarrow b^{\log_b x} = x$$

Dal momento che la formula di sinistra è ovviamente vera — dice che una cosa è uguale a se stessa — anche la formula di destra deve essere vera.

Questa è la prima identità, la seconda si ottiene analogamente ponendo $\square = b^y$ e $\Delta = y$.

Proprietà dei logaritmi

Le proprietà dei logaritmi sono proprietà dell'esponenziale scritte in maniera buffa.

P. DELL'ESPONENZIALE

$$b^0 = 1$$

$$b^1 = b$$

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

$$b^x / b^y = b^{x-y}$$

$$(b^x)^y = b^{x \cdot y}$$

$$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

P. CORRISPONDENTI DEI LOGARITMI

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b (x \cdot y) = \log_b x + \log_b y$$

$$\log_b (x/y) = \log_b x - \log_b y$$

$$\log_b (x^y) = y \cdot \log_b (x)$$

$$\log_b (\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n} \cdot \log_b (x)$$

Approfondimento. Giustifichiamo, per esempio, la formula per $\log_b(x \cdot y)$

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b x + \log_b y \iff b^{\log_b x + \log_b y} = x \cdot y$$

Proprietà dell'esponenziale

$$\underbrace{b^{\log_b x}}_x \cdot \underbrace{b^{\log_b y}}_y = x \cdot y$$

OK!

Esercizio. Calcolare $\log_2 \left(\frac{8^{3.7}}{4} \right)$

Metodo 1 (proprietà dell'esponenziale)

Siccome è richiesto il logaritmo in base 2, iniziamo con lo scrivere l'argomento del logaritmo, $\frac{8^{3.7}}{4}$, come potenza di 2.

$$\frac{8^{3.7}}{4} = \frac{(2^3)^{3.7}}{2^2} = \frac{2^{3 \cdot 3.7}}{2^2} = 2^{3 \cdot 3.7 - 2} = 2^{9.1}$$

ora, usando l'identità $\log_b(b^y) = y$

$$\log_2 \left(\frac{8^{3.7}}{4} \right) = \log_2 (2^{9.1}) = \boxed{9.1}$$

Metodo 2 (proprietà dei logaritmi)

$$\begin{aligned} \log_2 \left(\frac{8^{3.7}}{4} \right) &= \log_2 (8^{3.7}) - \log_2 (4) = 3.7 \cdot \log_2 (8) - \log_2 (4) \\ &= 3.7 \cdot 3 - 2 = \boxed{9.1} \end{aligned}$$

$\underbrace{= 3}_{2^3=8} \text{ siccome}$ $\underbrace{= 2}_{2^2=4} \text{ siccome}$

Osservazione: in pratica, i due approcci a questo esercizio sono due maniere diverse di scrivere precisamente i medesimi calcoli.

fino 1.12

Formula del cambiamento di base dei logaritmi

Di solito calcolatrici e linguaggi informatici forniscono la funzione logaritmo solo in alcune basi: tipicamente in base e — detto *logaritmo naturale*, in alcuni sistemi viene rappresentato semplicemente come $\log$, in altri col simbolo $\ln$ — e in base 10 — anch'esso denotato, alla volta semplicemente dal simbolo $\log$.

Nota. Quando si incontra una funzione chiamata "log" in un contesto che non si conosce, è cosa saggia accertarsi di quale sia la base di questo logaritmo.

È facile ricondurre i logaritmi in una base x qualunque a quelli in un'altra base b — tipicamente e o 10 — grazie a questa formula.

$$\log_x y = \frac{\log_b y}{\log_b x}$$

Per esempio, se desidero calcolare $\log_7 15$ e dispongo solo di una funzione per i logaritmi in base 10, posso calcolare

$$\log_7 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 7} \approx \frac{1.17603}{0.845098} \approx 1.39$$

Approfondimento: per verificare la formula dobbiamo vedere che

$$x^{\frac{\log_b y}{\log_b x}} = y$$

$$\underbrace{\frac{\log_b y}{\log_b x}}_x = \underbrace{\left(b^{\log_b x} \right)}_{\log_b x}^{\log_b y} = b^{\frac{\log_b y}{\log_b x}} = \underbrace{b^{\log_b y}}_y$$

↖ Identità: $b^{\log_b a} = a$ ↗

Esercizi: dalle "domande di preparazione al test"

Nota: questi esercizi devono poter essere senza calcolatrice.

37 - Metti in ordine crescente $4^{1.5}$, $10^{0.5}$, 5

Possiamo intanto calcolare $4^{1.5} = 4^1 \cdot 4^{0.5} = 4 \cdot \sqrt{4} = 8$

Inoltre $10^{0.5} = \sqrt{10} \approx 3.2$

Quindi l'ordine crescente corretto è

$$\boxed{10^{0.5} \leq 5 \leq 4^{1.5}}$$

40 - Risolvi $1000 \cdot 10^x = 100^{x-7}$

$$\underbrace{10^{3+x}}_{10^3} = \underbrace{1000}_{10^3} \cdot 10^x = 100^{x-7} = (10^2)^{x-7} = 10^{2 \cdot (x-7)}$$

$$\rightarrow 10^{3+x} = 10^{2 \cdot (x-7)}$$

$$3+x = 2 \cdot (x-7) \rightarrow \boxed{x=17}$$

41 - Risolvi $10^{2x} + 10^x - 2 = 0$

Usando l'identità $10^{2x} = (10^x)^2$, l'equazione diventa

$$(10^x)^2 + 10^x - 2 = 0$$

Che è un'equazione di secondo grado nell'indeterminata 10^x . Riscriviamo quindi l'equazione ponendo $y = 10^x$.

$$y^2 + y - 2 = 0 \quad y = \begin{matrix} 1 \\ -2 \end{matrix}$$

Se $y=1$, allora $10^x = 1$, quindi $x = \log_{10}(1) = 0$.

D'altro canto $y=-2$ è impossibile, perché avremmo $10^x = -2$, e l'esponenziale 10^x è necessariamente positivo.

In conclusione, c'è la sola soluzione $\boxed{x=0}$

54 - Sapendo che $\log_e x = 10$, quanto vale $\log_e (x \cdot \sqrt{x})$?

Applicando le proprietà dei logaritmi

$$\log_e (x \cdot \sqrt{x}) = \log_e (x) + \log_e (\sqrt{x}) = \underbrace{\log_e (x)}_{10} + \underbrace{\frac{1}{2} \log_e (x)}_5 = \boxed{15}$$

51 - Sapendo che $\log_{10} x = 12.4$ quanto vale $\log_{100} x$?

Applicando la formula di cambiamento di base

$$\log_{100} x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 100} = \frac{12.4}{2} = \boxed{6.2}$$

Crescite & decadimenti esponenziali

Molti fenomeni sono descritti da una formula del tipo

$$\text{Variabile}(t) = \text{Variabile}(t_0) \cdot \text{base}^{\pm \frac{t-t_0}{\tau}}$$

questi fenomeni sono detti crescite o decadimenti esponenziali; rispettivamente se l'esponenziale è crescente o decrescente — l'esponenziale è crescente se o $\text{base} > 0$ o il segno all'esponente è $+$, o $0 < \text{base} < 1$

e il segno è $-$; altrimenti è decrescente.

I parametri della formula non sono determinati; in modo univoco dal fenomeno rappresentato, vale a dire che c'è una certa misura di libertà nella loro scelta.

Per esempio

$$\underline{100 \cdot 4^{\frac{t-35}{65}}} = 100 \cdot 2^{2 \cdot \frac{t-35}{65}} = 100 \cdot 2^{\frac{t}{35} - 1} = \underline{50 \cdot 2^{\frac{t}{35}}}$$

vediamo quindi che le scelte di parametri

$$t_0 = 35$$

$$t_0 = 0$$

$$\tau = 65$$

$$\tau = 35$$

$$\text{base} = 4$$

$$\text{base} = 2$$

$$V(t_0) = 100$$

$$V(t_0) = 50$$

sono equivalenti: descrivono il medesimo fenomeno.

In generale, possiamo fissare t_0 e la base ad arbitrio, e la formula rimane generale. Frequentemente si prende $t_0 = 0$, e la base più comoda a seconda della applicazione.

$$\text{Variabile}(t) = \text{Variabile}(0) \cdot \text{base}^{\pm \frac{t}{\tau}}$$

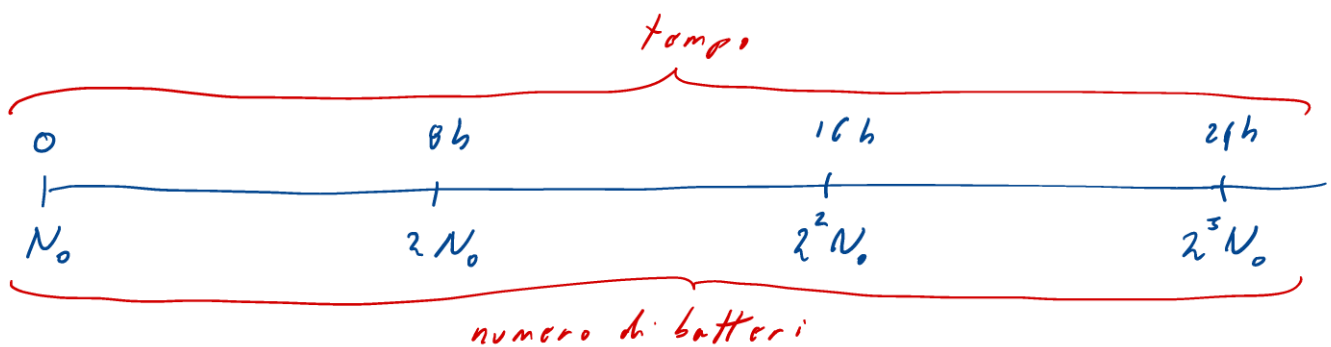
Caso particolare $t_0 = 0$, spesso $\text{base} = 2, 10, e$.

Nota. quando studieremo le equazioni differenziali, vedremo che gli esponenziali risolvono una classe naturale di equazioni lineari; e questo ne spiega l'utilità.

Esercizio

I batteri in una coltura raddoppiano ogni otto ore, dopo quanto tempo sono triplicati?

I batteri raddoppiano ogni 8 ore, quindi, in 8 ore, il loro numero si moltiplica per 2, in 16 per 2 *due volte*, ossia per 2^2 , in 24 per 2 *tre volte*, ossia per 2^3 , etc.



In generale, detto N_t il numero di batteri abbiamo

$$N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{8h}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Numero di periodi di} \\ \text{8 ore fra } t_0 \text{ e } t \end{array} \right\}$$

questa formula è vera non solo quando l'esponente del 2 è intero, ma in generale, per ogni t . La crescita di una colonia di batteri — *quando non è limitata dalla disponibilità di nutrienti o di spazio* — è, anzi, l'esempio tipico di crescita esponenziale.

L'esercizio chiede di trovare a che tempo t_2

$$N_{t_2} = N_0 \cdot 3$$

← ?

Siccome, dalla formula generale, $N_{t_1} = N_0 \cdot 2^{\frac{t_1}{8h}}$, abbiamo l'equazione

$$\cancel{N_0} \cdot 2^{\frac{t_1}{8h}} = \cancel{N_0} \cdot 3$$

$$2^{\frac{t_1}{8h}} = 3$$

$$\frac{t_1}{8h} = \log_2 3$$

$$\underline{t_1 = 8 \cdot \log_2(3) h}$$

Per ottenere un risultato in forma numerica, possiamo adoperare la formula del cambiamento di base

$$t_1 = 8 \log_2(3) h = 8 \frac{\log_{10}(3)}{\log_{10}(2)} h \approx \boxed{12.7 h}$$

Esercizio

Il carbonio-14 (^{14}C) è un isotopo radioattivo del C che ha un tempo di dimezzamento di 5700 anni. La concentrazione di ^{14}C in una mummia è il 40.0% di quella in un vivente. A quanto tempo fa risale la mummia?

Questo è, invece, l'esempio tipico di decadimento esponenziale: il decadimento radioattivo. Il tempo di dimezzamento è, per definizione il tempo che impiega metà del ^{14}C in un campione a decadere — in sostanza trasformandosi in azoto. Quindi dopo 5700 anni la concentrazione di ^{14}C nel campione è la metà di quella iniziale, 2.5700 anni è $\frac{1}{4}$, dopo 3.5700 anni è $\frac{1}{8}$ &c.

In generale

$$^{14}\text{C} \text{ al tempo } t = ^{14}\text{C} \text{ iniziale} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700 \text{ anni}}}$$

L'esercizio ci chiede a che tempo t valga

$$^{14}\text{C} \text{ al tempo } t = ^{14}\text{C} \text{ iniziale} \cdot \frac{40}{100}$$

Come nell'esempio precedente otteniamo, quindi:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700 \text{ anni}}} = \frac{40}{100}$$

$$t = 5700 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{40}{100}\right) \text{ anni} = 5700 \cdot \frac{\log_{10} 0.4}{\log_{10} 0.5} \text{ anni} \approx \boxed{7500 \text{ anni}}$$

Nota: in realtà, la datazione al ^{14}C , anche senza considerare la difficoltà di misurare accuratamente la concentrazione di ^{14}C in un campione archeologico, è una questione più complicata di quanto potrebbe sembrare da questo esercizio. Principalmente, il guaio è che bisogna assumere una concentrazione iniziale pari a quella presente nell'atmosfera quando il campione era in vita, però questa concentrazione non si è mantenuta costante durante i millenni. Occorre, dunque, in qualche modo, ricostruire quanto ^{14}C ci fosse nell'atmosfera millenni fa, per poi calibrare la procedura in modo da tenerne conto di questa informazione.

Esercizi consigliati

① Il numero dei batteri in una coltura cresce del 50% ogni 5 ore.

- Di quanto cresce, in percentuale in dodici ore?
E in tre?

- Quanto tempo, in ore e minuti, impiegano i batteri per crescere del 10%? E per raddoppiare?

② Esame del 31.I.2019 esercizio A.2,3

Una popolazione cresce in maniera esponenziale.

Al tempo 0 ci sono 200000 individui. Dopo 24 ore ce ne sono 500000. Quanti individui ci sono al tempo 12 ore?

Se il numero iniziale ha un'incertezza di ± 10000 , e il numero finale ± 25000 , che incertezza c'è sulla risposta?

③ Esame del 23.V.2013 esercizio B.1,3

Il numero di batteri nella coltura X raddoppia ogni 18 ore.

Quello della coltura Y ogni 24 ore. Inizialmente, il numero di individui nella coltura X è un decimo di quello di Y.

- Dopo quanto tempo le due colture contengono il medesimo numero di batteri?

- Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?

- Si è misurato che al tempo $t=0$ una terza coltura Z contiene $(1.5 \pm 0.1) \cdot 10^7$ individui. Al tempo $t=10h \pm 20m$, la stessa coltura ne contiene $(2.5 \pm 0.2) \cdot 10^7$. Calcola quanto tempo impiega Z per raddoppiare indicando l'errore relativo.

④ ESERCIZIO C Esame online 24-VI-2020

Una coltura di batteri cresce esponenzialmente. Si è stabilito che ad un certo tempo essa è costituita da $(6.1 \pm 0.1) 10^6$ individui. Dopo esattamente ventiquattro ore, il numero di individui è $(7.9 \pm 0.1) 10^{10}$. Ogni quanto tempo la coltura raddoppia (3 pt.)? Che incertezza relativa hai su questo risultato (3 pt.)?

Soluzioni: (fornite per lo studio individuale)

① Sappiamo che incrementare una quantità dello $x\%$ significa moltiplicarla per $1 + \frac{x}{100}$. Il numero dei batteri si moltiplica quindi per 1.5 ogni sei ore. Di conseguenza il numero di batteri N_t al tempo t vale

$$N_t = N_0 \cdot 1.5^{\frac{t}{6h}}$$

Possiamo dunque scrivere il numero dei batteri dopo dodici ore dall'inizio della crescita: $N_{12h} = N_0 \cdot 1.5^{\frac{12h}{6h}} = N_0 \cdot 1.5^2 = N_0 \cdot 2.25$

Detto $x_{12h}\%$ l'incremento percentuale della popolazione in 12 ore abbiamo altresì $N_{12h} = N_0 \cdot \left(1 + \frac{x_{12h}}{100}\right)$

Di conseguenza

$$\cancel{N_0} \cdot 2.25 = \cancel{N_0} \cdot \left(1 + \frac{x_{12h}}{100}\right) \Rightarrow \underline{x_{12h} = 125}$$

Procedendo alla stessa maniera per x_{3h}

$$N_{3h} = N_0 \cdot 1.5^{\frac{3h}{6h}} = N_0 \cdot \sqrt{1.5}$$

$$N_{3h} = N_0 \left(1 + \frac{x_{3h}}{100}\right)$$

$$x_{3h} = 100 \cdot (\sqrt{1.5} - 1) \approx \underline{22.5}$$

Gli incrementi percentuali cercati sono quindi 125% e ~22.5%

Per la seconda domanda è necessario procedere in senso inverso. Dobbiamo trovare a che tempo $t_{10\%}$ la coltura è cresciuta del 10%, ossia $N_{t_{10\%}} = N_0 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)$.

Abbiamo quindi l'equazione

$$\cancel{N_0} \cdot 1.5^{\frac{t_{10\%}}{6h}} = \cancel{N_0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100}\right)}_{1.1} \Rightarrow t_{10\%} = 6h \cdot \log_{1.5}(1.1) \approx \underline{1.4104 h}$$

Similmente, detto t_2 il secondo tempo richiesto

$$\cancel{N_0} \cdot 1.5^{\frac{t_2}{6h}} = \cancel{N_0} \cdot 2 \Rightarrow t_2 = 6h \cdot \log_{1.5}(2) \approx \underline{10.2571 h}$$

I tempi richiesti sono quindi ~1h 25m e ~10h 15m.

② ③ Questi esercizi sono parti di problemi che potremo risolvere in maniera completa usando strumenti che saranno introdotti più avanti. Le soluzioni si trovano rispettivamente alle pagine 170-5 e 178-84.

4) ESERCIZIO C Esame online 24-VI-2020

Una coltura di batteri cresce esponenzialmente. Si è stabilito che ad un certo tempo essa è costituita da $(6.1 \pm 0.1) \cdot 10^6$ individui. Dopo esattamente ventiquattro ore, il numero di individui è $(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{10}$. Ogni quanto tempo la coltura raddoppia (3 pt.)? Che incertezza relativa hai su questo risultato (3 pt.)?

Il numero di batteri al tempo t è $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{\tau}}$
dove $N_0 = (6.1 \pm 0.1) \cdot 10^6$ e τ è il tempo richiesto.

Quindi:

$$(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{10} = (6.1 \pm 0.1) \cdot 10^6 \cdot 2^{\frac{24 \text{ h}}{\tau}}$$

$$2^{\frac{24 \text{ h}}{\tau}} = \frac{7.9 \pm 0.1}{6.1 \pm 0.1} \cdot 10^4 = 1.2951 \cdot 10^4 \pm 2.91\%$$

$\pm 1.27\%$ (on 7.9) and $\pm 1.64\%$ (on 6.1)

$$= (1.2951 \pm 0.0376) \cdot 10^4$$

$$\tau = \frac{24 \text{ h}}{\log_2((1.2951 \pm 0.0376) \cdot 10^4)}$$

} Chiamiamo questo D

Ora possiamo procedere calcolando l'intervallo di incertezza del denominatore D.

$$\log_2((1.2951 - 0.0376) \cdot 10^4) \leq D \leq \log_2((1.2951 + 0.0376) \cdot 10^4)$$

$$13.618 \leq D \leq 13.702$$

Di conseguenza $D = 13.661 \pm 0.042$

$\leftarrow \log_2(1.2951 \cdot 10^4)$

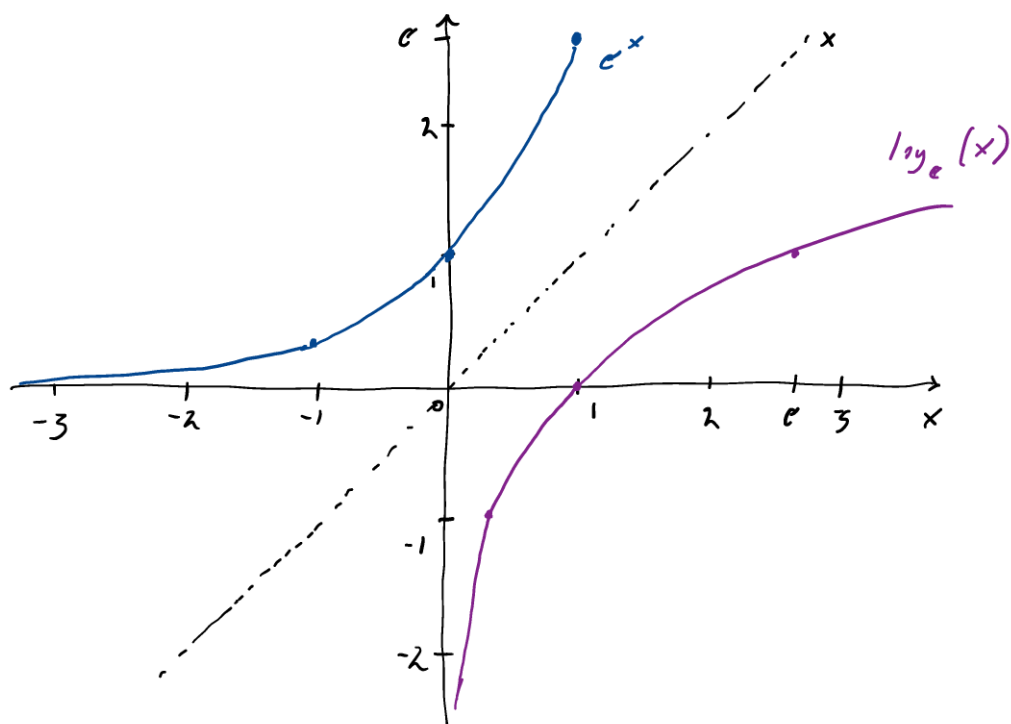
$$\tau = \frac{24 \text{ h}}{13.661 \pm 0.042} = 105.4 \pm 0.3\% \text{ min}$$

$\pm 0.31\%$ (on 13.661)

Nota: l'accuratezza di questo risultato NON è realistica, nella realtà i dati sono meno precisi, e la crescita non è esattamente esponenziale.

fina l. 13

Il grafico del logaritmo

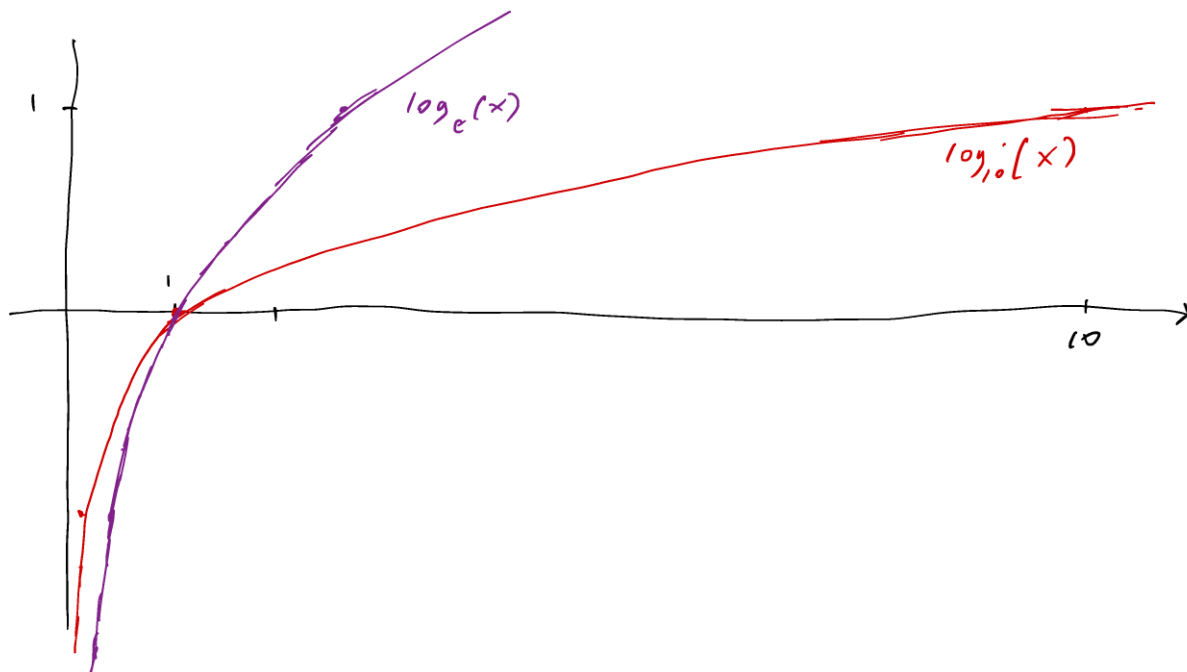


Vediamo qui il grafico di $\log_e x$. Come possiamo osservare, il logaritmo è definito solo per x positive — *siccome i valori assunti dall'esponenziale sono necessariamente positivi*. Inoltre il grafico di $\log_e x$ e quello di e^x sono simmetrici l'uno dell'altro rispetto alla bisettrice degli assi. Questo capiterrebbe per qualunque base, ed è conseguenza del fatto che l'esponenziale con base e ed il logaritmo in base e sono funzioni inverse l'una dell'altra, vale a dire:

$$y = e^x \iff x = \log_e y$$

Via via che la x si avvicina decrescendo a 0, $\log_e x$ scende sotto qualunque soglia negativa — *come vedremo*

si dice che "tende a meno infinito". Al crescere di x , d'altro canto $\log_e x$ cresce superando qualsiasi soglia — "tende a più infinito".



I grafici in basi diverse sono simili; per la formula di cambiamento di base sono, anzi, proporzionali. Se $a < b$ allora $\log_a$ cresce più velocemente di $\log_b$ al crescere di x .

Il linguaggio dei limiti

Ci siamo trovati più di una volta nella necessità di parlare del comportamento di una funzione $f(x)$ quando x si avvicina ad un certo valore x_0 , quando $f(x_0)$ non fosse neanche definita — per esempio $\log_e x$ e $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x vicina a 0. I limiti sono un modo di descrivere il comportamento di una funzione $f(x)$ nelle immediate vicinanze di un

punto x_0 , anche quando $f(x_0)$ potrebbe non essere definita. I limiti possono anche essere calcolati, e alcuni studenti avranno visto questo genere di calcoli nella scuola superiore, tuttavia noi non vedremo come si calcolano i limiti. Lo scopo della trattazione in questo corso è semplicemente che vedendo un dato comportamento, rappresentato graficamente, lo si sappia descrivere adoperando il linguaggio dei limiti, e, viceversa, che data un'espressione come $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 7$ si sappia quale comportamento della funzione f essa denota.

Limiti per x tendente a x_0^+ — " x_0 più"

Fissiamo un numero x_0 . Le seguenti espressioni:

il limite per x tendente a x_0^+ di $f(x)$ è —

il limite per x tendente a x_0 da destra di $f(x)$ è —

il limite destro per x tendente a x_0 di $f(x)$ è —

$f(x)$ tende a — per x tendente a x_0^+

$f(x)$ tende a — per x tendente a x_0 da destra

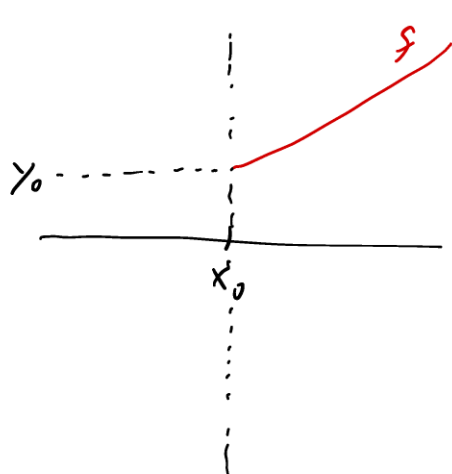
e anche le notazioni simboliche

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \text{—}$$

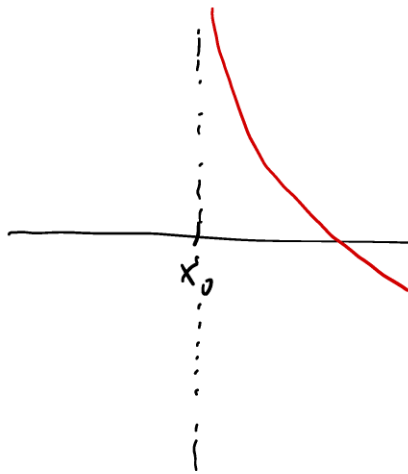
$$f(x) \rightarrow \text{—} \text{ per } x \rightarrow x_0^+$$

hanno il medesimo significato e si riferiscono al comportamento di f per valori di x appena più grandi di x_0 . Al posto del trattino — possiamo avere un numero y_0 , il simbolo $+\infty$ — più infinito — il simbolo $-\infty$ — meno infinito —

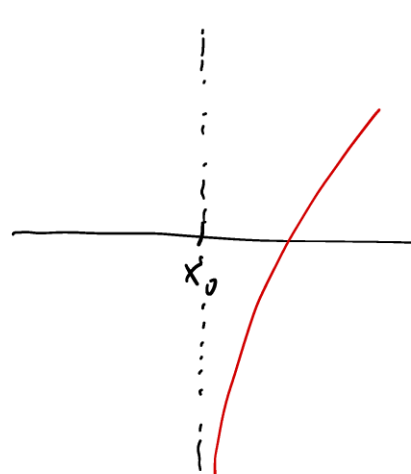
oppure, infine, possiamo dire che il limite non esiste.
In questa tabella vediamo i comportamenti rappresentati dai casi in cui il limite per $x \rightarrow x_0^+$ esiste



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = y_0$$



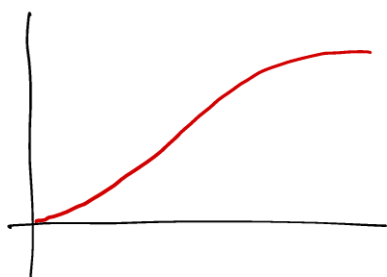
$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty$$

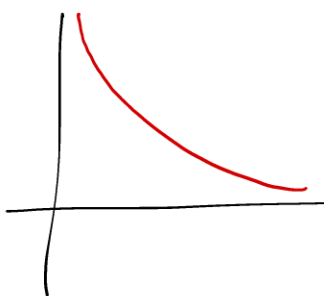
Esempi:

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$$



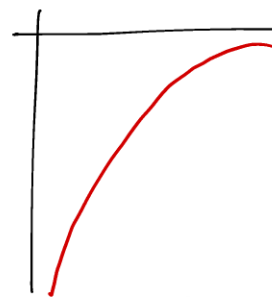
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$f(x) = -\frac{1}{x}$$

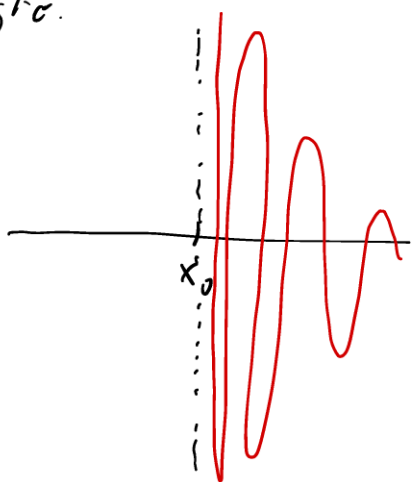


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{1}{x} = -\infty$$

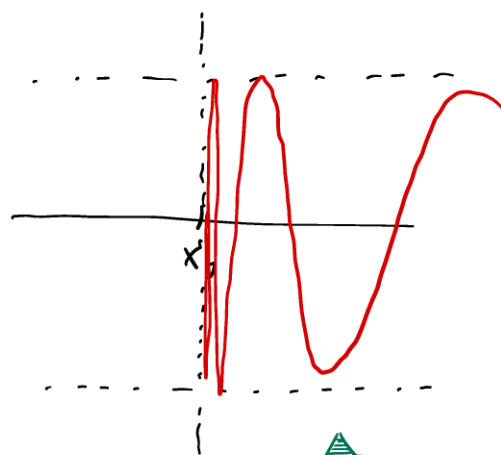
Noi osserviamo l'andamento dei valori assunti da $f(x)$ quando x si avvicina a x_0 provenendo da destra. Se questi valori si avvicinano ad un certo y_0 , allora diciamo che quello è il limite. Se salgono sopra ogni soglia fissata, o scendono sotto ogni soglia fissata, diciamo che, rispettivamente, il

limite è $+\infty$ o $-\infty$. Esiste la possibilità che non si verifichi nessuno di questi casi, e allora diciamo che il limite per $x \rightarrow x_0^+$ di $f(x)$ non esiste.

Gli esempi seguenti rappresentano funzioni che, all'avvicinarsi di x a x_0 da destra, esibiscono un comportamento oscillante. Il limite per $x \rightarrow x_0^+$, in questi casi, non esiste.



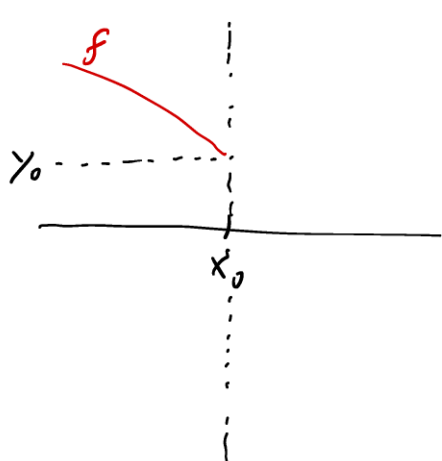
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ NON ESISTE



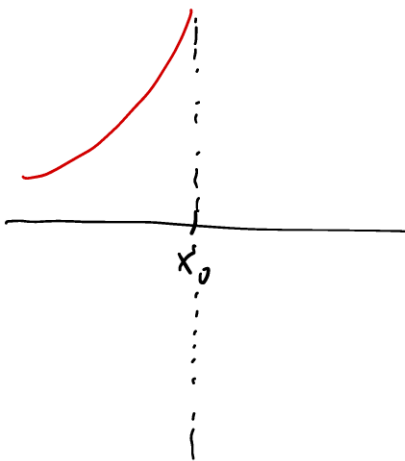
Eg. $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ in $x_0 = 0$

Limiti per x tendente a x_0^- — "x_0 meno"

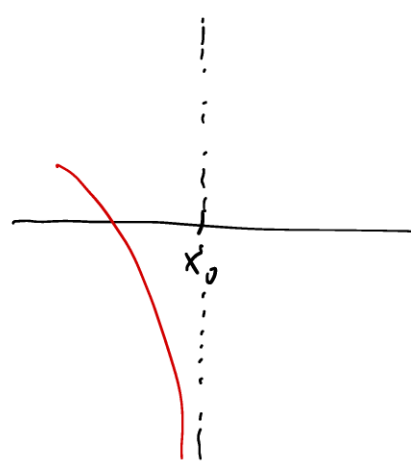
Il discorso, per i limiti sinistri, ossia per $x \rightarrow x_0^-$, è analogo, salvo che si studia il comportamento della funzione f per valori di x che si avvicinano da sinistra ad x_0 , ossia che sono appena più piccoli di x_0 .



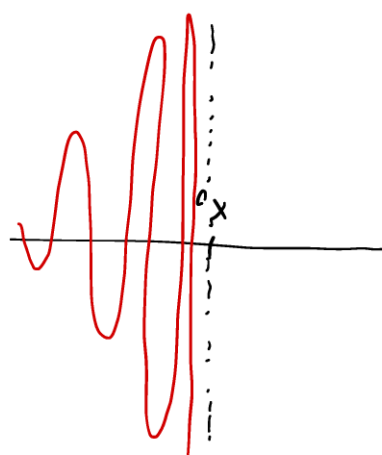
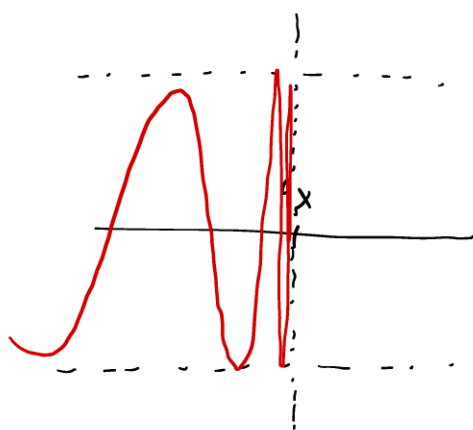
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = y_0$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \text{ NON ESISTE}$$

Limiti per x tendente a x_0 ← senza $ne' + ne' -$

L'affermazione che il limite per $x \rightarrow x_0$ di $f(x)$ è un certo valore indica semplicemente che sia il limite destro sia il limite sinistro esistono, ed assumono entrambi quel medesimo valore. Se uno di questi non esistesse, oppure se esistono entrambi però assumono valori diversi, allora diciamo che il limite per $x \rightarrow x_0$ non esiste.

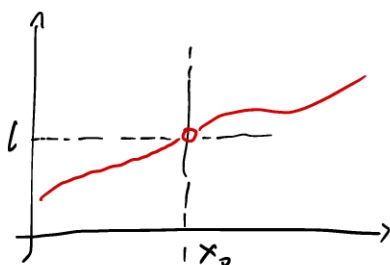
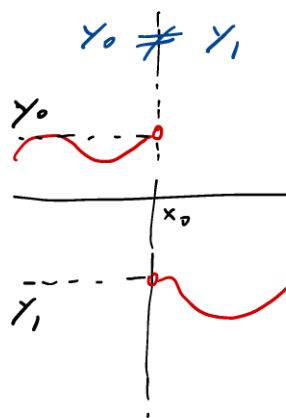
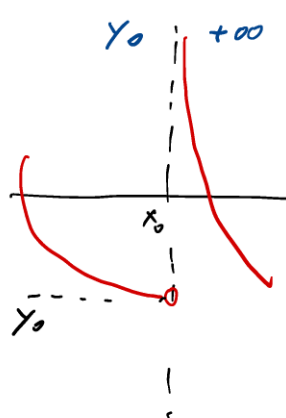
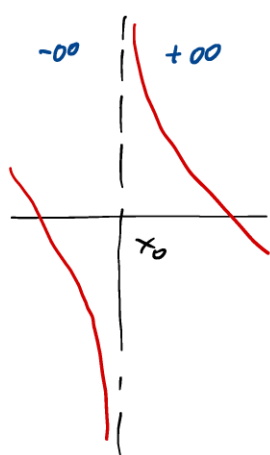
Ricapitolando:

" $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \square$ " equivale a " $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \square$ e $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \square$ "

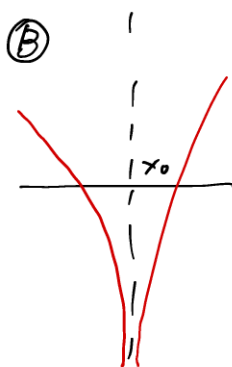
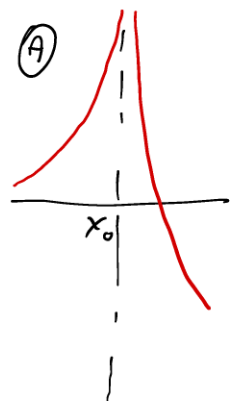
altrimenti $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ non esiste

Esempi:

Nelle situazioni seguenti il limite non esiste.



In questo caso, invece il limite
di $f(x)$ per x tendente a x_0
è L . — $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

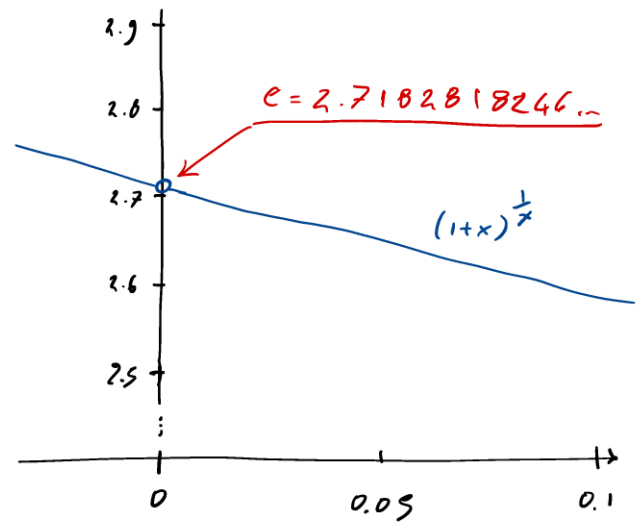


In questi casi diciamo
che f tende a $+\infty$ o $-\infty$
rispettivamente.

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \begin{cases} +\infty & \text{(A)} \\ -\infty & \text{(B)} \end{cases}$

Abbiamo visto un esempio di limite nella definizione del numero e :

$$e = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$



Esercizio (soluzioni a pagina 137)

Traccia il grafico delle seguenti funzioni in prossimità di $x=0$ e determinare il comportamento al limite per $x \rightarrow 0^+$, $x \rightarrow 0^-$, $x \rightarrow 0$.

$$f_1(x) = \frac{x-1}{\sin(x)}$$

$$f_2(x) = \frac{e^x}{\sin(x)}$$

$$f_3(x) = \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$$

$$f_4(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f_5(x) = \frac{x-1}{x^2}$$

$$f_6(x) = \frac{x+1}{x^3}$$

$$f_7(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$$

$$f_8(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$$

$$f_9(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$f_{10}(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

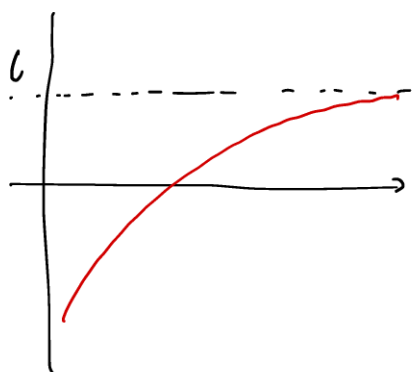
Limiti per $x \rightarrow +\infty$

Oltre a descrivere il comportamento di una funzione $f(x)$ per x vicino ad un certo valore, il linguaggio dei limiti permette anche di parlare del comportamento di $f(x)$ quando x cresce illimitatamente. In questo caso, è un po' come se x si avvicinasse ad un ipotetico punto $+\infty$ posto a destra di tutto l'asse x , e, per questo, si parla di limiti per x tendente a $+\infty$.

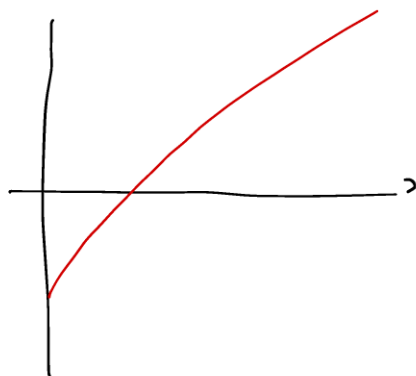
Se, al crescere di x , il valore di $f(x)$ si avvicina ad un certo valore l , allora il limite per $x \rightarrow +\infty$ di $f(x)$ è l .

Se, invece, al crescere di x , $f(x)$ supera qualunque soglia fissata, allora il limite è $+\infty$. Viceversa, se $f(x)$ scende sotto qualunque soglia fissata, il limite è $-\infty$.

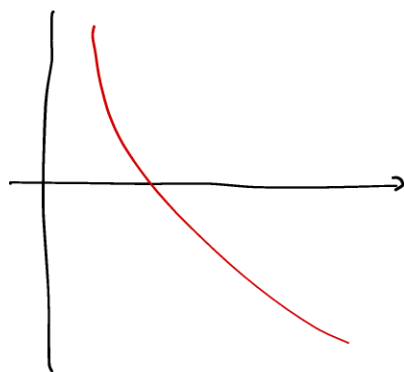
Infine, quando non capita nessuna di queste cose, per esempio perché $f(x)$ oscilla, allora il limite non esiste.



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$



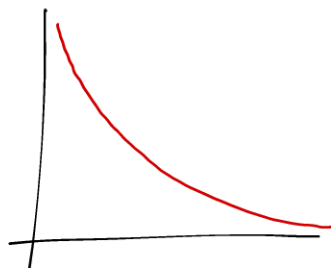
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$$

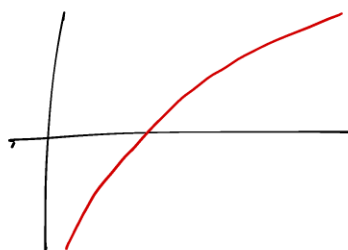
Esempi:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



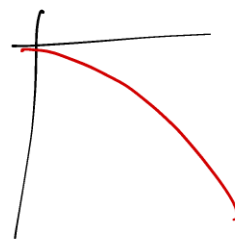
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$f(x) = \log_e(x)$$



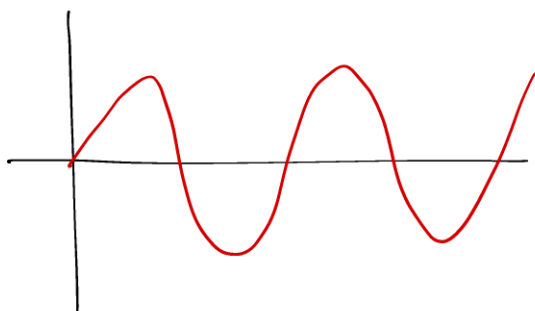
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_e(x) = +\infty$$

$$f(x) = -x^2$$

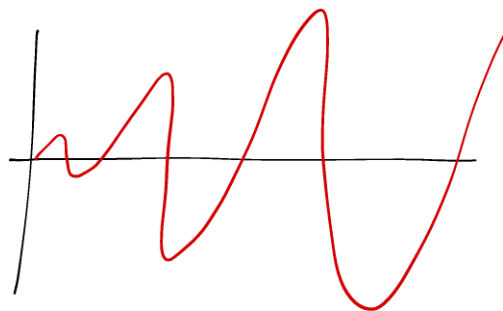


$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$$

Nei casi seguenti, il limite per $x \rightarrow +\infty$ non esiste



$$\text{es. } \sin(x)$$

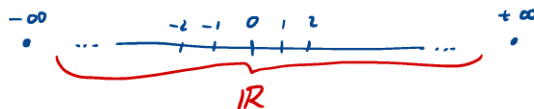


$$\text{es. } x \cdot \sin(x)$$

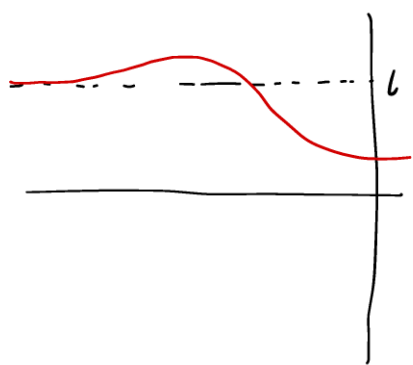
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ NON ESISTE}$$

Limiti per $x \rightarrow -\infty$

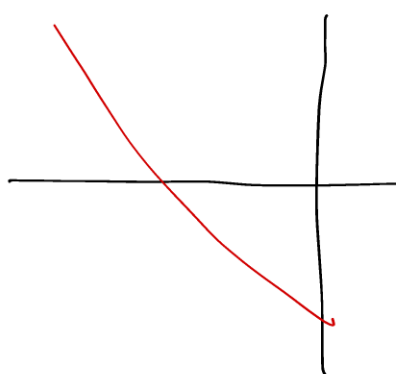
I limiti per $x \rightarrow -\infty$ sono definiti come quelli per $x \rightarrow +\infty$, salvo che ora studiamo $f(x)$ al decrescere di x , ossia via via che x si avvicina ad un punto ideale, $-\infty$, posto prima di tutti i numeri negativi.



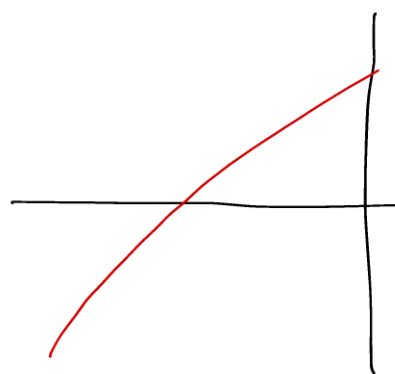
Casi in cui il limite per $x \rightarrow -\infty$ esista:



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

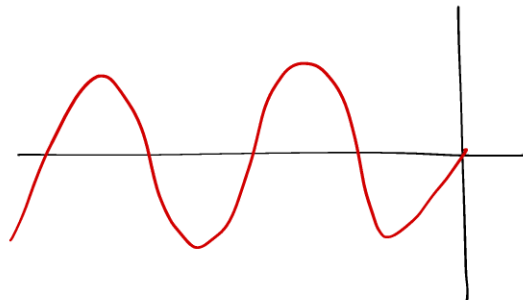
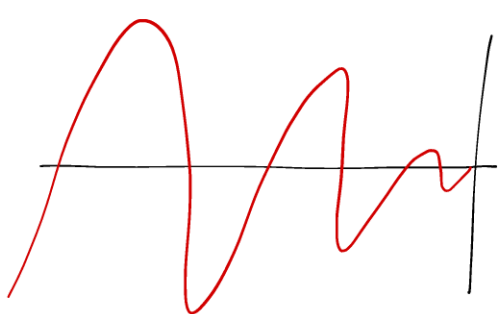


$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} = -\infty$$

Casi in cui il limite per $x \rightarrow -\infty$ non esista:



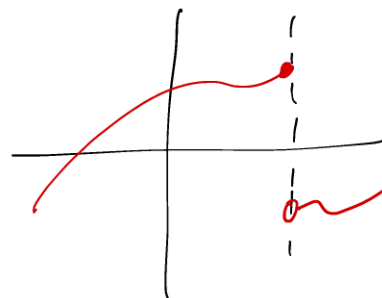
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ NON ESISTE}$$

Continuità

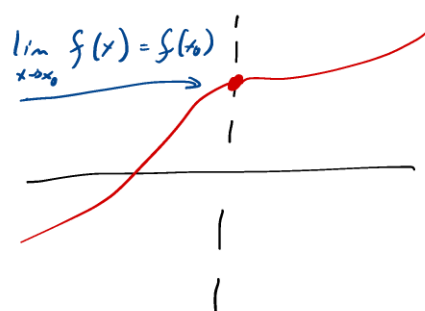
È utile notare che le funzioni elementari che abbiamo visto o vedremo in questo corso — polinomi, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche — sono continue nel loro dominio di definizione. Ossia, se prendiamo una di queste funzioni f , e un numero x_0 tale che $f(x_0)$ sia definita, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Questo è il modo formale di dire che il grafico di f non può fare salti.

in un punto in cui f è definita. Inoltre, questa proprietà si mantiene quando componiamo le funzioni elementari fra loro. Quindi, sebbene abbia senso parlare di limiti in qualunque punto x_0 , è interessante farlo solo a $\pm\infty$ e alla frontiera del dominio di definizione delle funzioni che tratteremo in questo corso.

QUESTO NON PUÒ AVVENIRE



INVECE DEVE AVVENIRE QUESTO



Insieme, per le funzioni che tratteremo noi, se $f(x_0)$ è definita, allora $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, quindi, se f è definita in x_0 , sappiamo anche immediatamente che limite ha.

fine l. 14

Limiti a $\pm\infty$ di polinomi

Il limite a $+\infty$ - ∞ di una funzione polinomiale che non sia una costante — una costante è un caso particolare di polinomio, quello in cui c'è solo il termine noto — è sempre $+\infty$ o $-\infty$. Per distinguere fra questi casi, conviene ricordare che, per $|x|$ grandi, domina il monomio di $p(x)$ che ha grado massimo, quindi il limite dipenderà da questo monomio.

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_d x^d$$

dove, ovviamente, $a_d \neq 0$.

Soluzioni dell'esercizio sui limiti:

		$\lim_{x \rightarrow 0^+}$	$\lim_{x \rightarrow 0^-}$	$\lim_{x \rightarrow 0}$
$f_1(x) = \frac{x-1}{\sin(x)}$		$-\infty$	$+\infty$	NON ESISTE
$f_2(x) = \frac{e^x}{\sin(x)}$		$+\infty$	$-\infty$	NON ESISTE
$f_3(x) = \frac{e^x - 1}{\sin(x)}$		1	1	1
$f_4(x) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$		$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	NON ESISTE
$f_5(x) = \frac{x-1}{x^2}$		$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f_6(x) = \frac{x+1}{x^3}$		$+\infty$	$-\infty$	NON ESISTE
$f_7(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{x}}}$		0	$+\infty$	NON ESISTE
$f_8(x) = e^{\frac{1}{x^2}}$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$f_9(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$		0	0	0
$f_{10}(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$		NON ESISTE	NON ESISTE	NON ESISTE

Quindi ci basta capire quale sia il limite per $x \rightarrow \pm \infty$ di $a_d x^d$. Vediamo intanto il limite di x^d .

Ricordando i grafici dei polinomi x^n vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^d = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^d = \begin{cases} +\infty & \text{se } d \text{ è pari} \\ -\infty & \text{se } d \text{ è dispari} \end{cases}$$

Ora è chiaro che se il coefficiente a_d è positivo i limiti di $a_d x^d$ sono semplicemente uguali a quelli di x^d , se a_d invece è negativo allora hanno segno inverso.

$$\text{Se } a_d > 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_d x^d = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^d$$

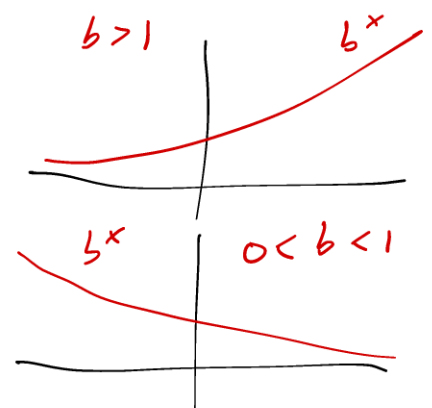
$$\text{Se } a_d < 0 \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} a_d x^d = -\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^d$$

Esempio

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{-7x^3}_{\text{GRADO MASSIMO}} + 2x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{-7x^3}_{\text{DISPARI}} = \underbrace{-}_{-\infty} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = +\infty$$

Limiti di esponenziali e logaritmi

Ricordando l'aspetto del grafico degli esponenziali, è chiaro che i limiti a $\pm \infty$ si comportano come segue:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} b^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ 0 & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

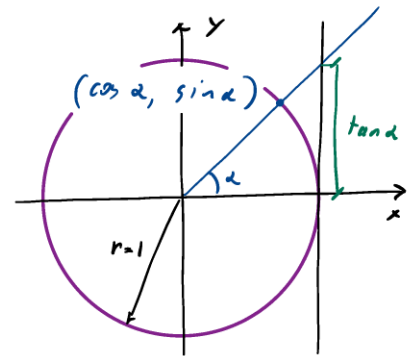
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} b^x = \begin{cases} 0 & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Una regola simile vale per i logaritmi, ricordiamo però che il logaritmo è definito solo per numeri positivi, quindi siamo interessati ai limiti $x \rightarrow 0^+$ e $x \rightarrow +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_b x = \begin{cases} -\infty & \text{se } b > 1 \\ +\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_b x = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1 \\ -\infty & \text{se } 0 < b < 1 \end{cases}$$

Ripasso delle Funzioni Trigonometriche

Ricordiamo che le funzioni trigonometriche $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$ sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata del punto di intersezione della semiretta che forma un angolo α , misurato in senso antiorario, col semiasse positivo delle ascisse, e della circonferenza di raggio 1 centrata nell'origine. Per definizione, poi,



$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

Osserviamo che:

- se non ci sono indicazioni contrarie, l'angolo α si intende misurato in radianti

- l'angolo α va considerato a meno di angoli giri (2π)

per esempio: $\sin(-\frac{5}{3}\pi) = \sin(\frac{1}{3}\pi) = \sin(\frac{7}{3}\pi) = \dots$

Nota: il simbolo π è semplicemente il numero 3.1415926..., scrivere $\sin(0.752\pi)$ o $\sin(2.36)$, all'atto pratico, è la stessa cosa.

Cogliamo l'occasione di ricordare che si converte fra gradi

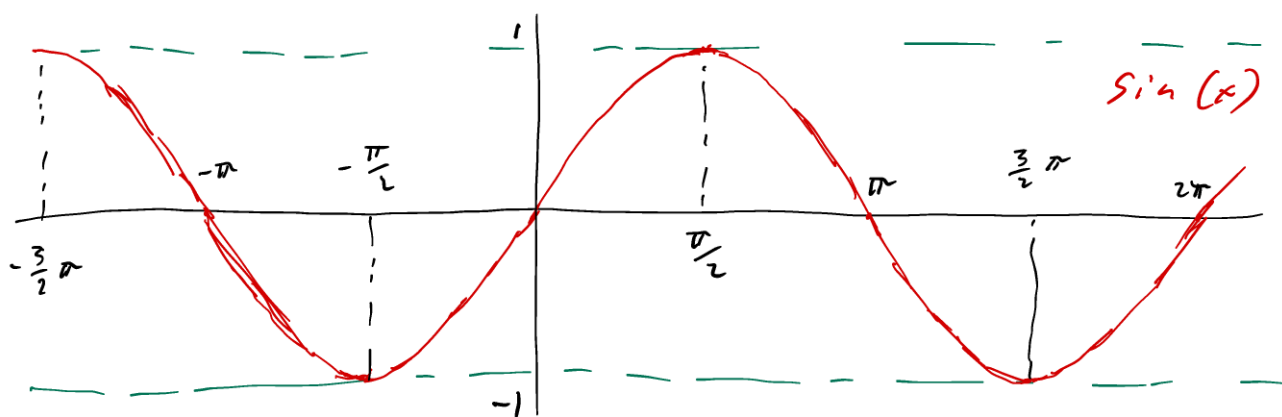
sessagesimali e radianti mediante la proporzione

$$\text{gradi} : \text{radianti} = 180 : \pi$$

grossolanamente, conviene ricordare che un radiante sono circa 60° .

L'importanza delle funzioni trigonometriche non risiede nel loro significato geometrico, bensì nel fatto che quasi tutti i fenomeni oscillatori in natura sono analizzati per mezzo di funzioni trigonometriche. Per esempio le soluzioni delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti — vedremo — si esprimono sempre combinando esponenziali, polinomi, seni e cogeni. Ricordiamo i grafici di $\sin$, $\cos$, $\tan$.

Grafico del seno



$\sin(x)$ è limitata inferiormente da -1

ossia $\sin(x) \geq -1$ per qualunque valore di x

—— " —— limitata superiormente da 1

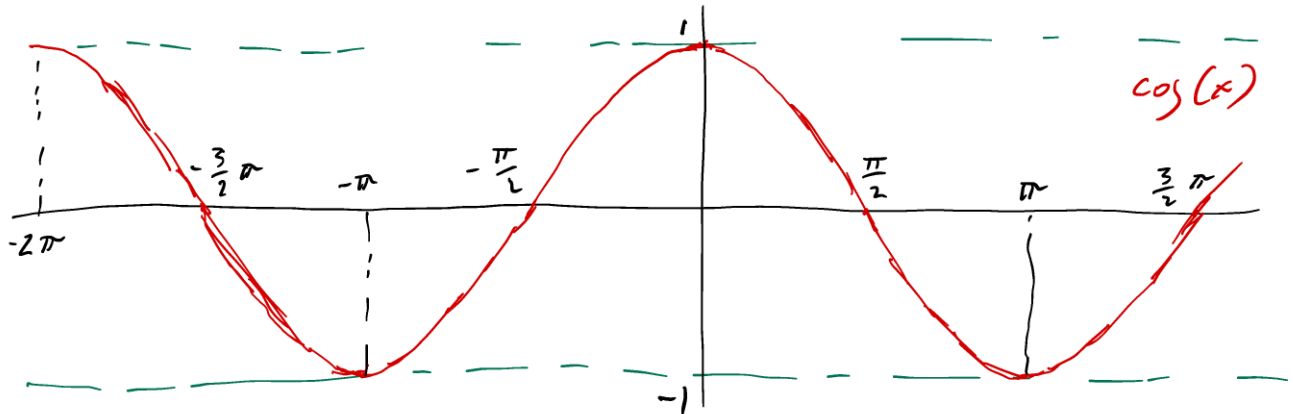
ossia $\sin(x) \leq 1$ per qualunque valore di x

—— " —— periodica di periodo 2π

ossia vale l'uguaglianza $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$

Inoltre $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin(x)$ NON ESISTONO

Grafico del coseno



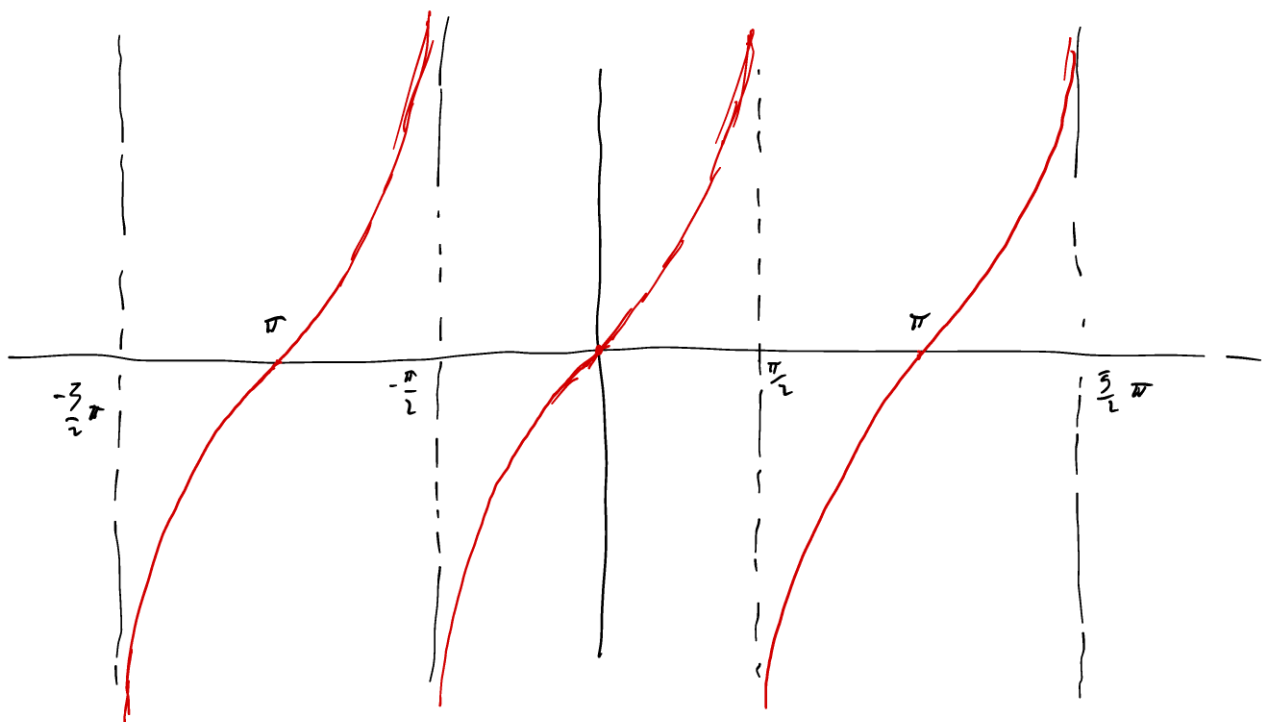
La funzione coseno gode delle medesime proprietà che abbiamo enunciato per il seno: $\cos(x)$ è limitata inferiormente da -1

—— " —— limitata superiormente da 1

—— " —— periodica di periodo 2π

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \cos(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos(x)$ NON ESISTONO

Grafico della tangente



$\tan(x)$ è periodica di periodo π

$\tan(x)$ non è definita in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, con k intero

ossia non è definita in $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{3}{2}\pi, -\frac{5}{2}\pi, \dots$

$k = 0, 1, 2, \dots, -1, -2, -3, \dots$

Abbiamo i limiti:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$$

e più in generale $\frac{\pi}{2} + k\pi$

Mentre chiaramente

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \tan(x)$$

e

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \tan(x)$$

non esistono

Formule trigonometriche

$$(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$$

$$\sin(-x) = -\sin(x) \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

Le formule di somma permettono di scrivere funzioni trigonometriche di una somma usando prodotti delle funzioni trigonometriche degli addendi:

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

Viceversa, le formule di prostaforezi permettono di passare da prodotti di funzioni trigonometriche a funzioni di somme e differenze dei loro argomenti. Esse si ricavano dalla formula

di somma. Vediamo, per esempio, come scrivere $\sin(x) \cdot \sin(y)$.

$$\textcircled{1} \cos(x+y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \leftarrow \text{f. di somma}$$

$$\cos(x-y) = \cos(x) \underbrace{\cos(-y)}_{\downarrow} - \sin(x) \underbrace{\sin(-y)}_{\downarrow} \leftarrow \begin{cases} \text{scriviamo } -y \text{ al posto} \\ \text{di } y \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \cos(x-y) = \cos(x) \cos(y) + \sin(x) \sin(y)$$

calcolo $\textcircled{2} - \textcircled{1}$

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2 \cdot \sin(x) \sin(y)$$

$$\sin(x) \cdot \sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}$$

Funzioni trigonometriche inverse

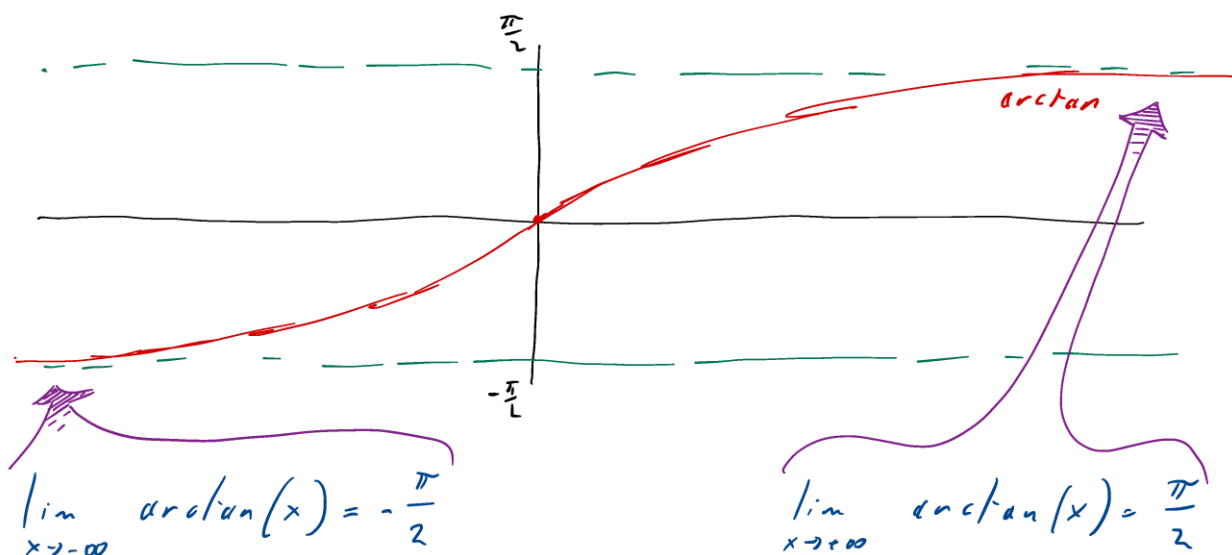
Le funzioni trigonometriche inverse $\arcsin$, $\arccos$ e $\arctan$ servono per ricavare l'angolo noto il suo seno, o il suo coseno, o la sua tangente. Siccome le funzioni trigonometriche sono periodiche, non è possibile determinare l'angolo in maniera univoca dato per esempio, il seno: la funzione $\arcsin(x)$ ci permette di trovare un angolo il cui seno è x , per trovare gli altri bisognerà far riferimento alle proprietà della funzione seno.

Funzione arcotangente

$\arctan(x)$ è quell'angolo compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ la cui tangente vale x . In formule

$$y = \arctan(x) \iff \tan(y) = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$$

è come se portandola dall'altra parte diventasse $\tan \dots$



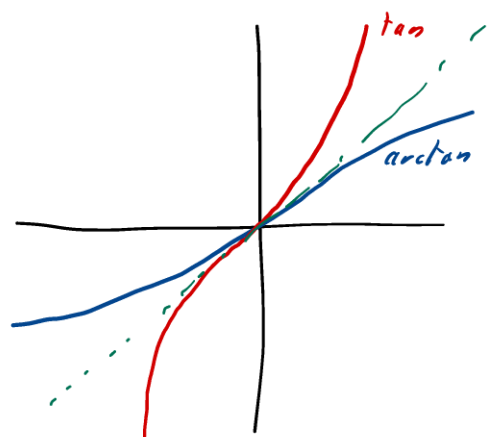
$\arctan(x)$ è limitata inferiormente da $-\frac{\pi}{2}$

—— " —— limitata superiormente da $\frac{\pi}{2}$

L'arcotangente permette di esprimere le soluzioni di un'equazione del tipo $\tan(x) = k$ data con un k fissato. Una delle soluzioni è $x_0 = \arctan(k)$. Le altre si ottengono sommando e sottraendo multipli di π , e si riassumono nella formula

$$x_i = \arctan(k) + i\pi \quad i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$$

Come abbiamo già notato parlando di esponenziale e logaritmo, i grafici di una funzione e della sua inversa sono simmetrici — speculari — rispetto alla diagonale degli assi. Il grafico



di $\arctan$ è il simmetrico del grafico della tangente ristretto alle ascisse fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$.

Funzione arcoseno

$\arcsin(x)$ è quell'angolo compreso fra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ il cui seno vale x . In formule

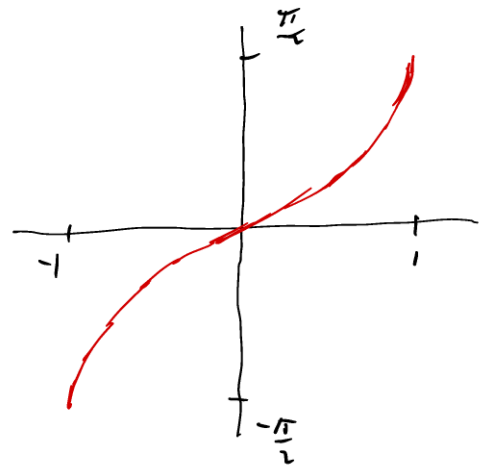
$$y = \arcsin(x) \iff \sin(y) = x \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$$

Volendo risolvere l'equazione

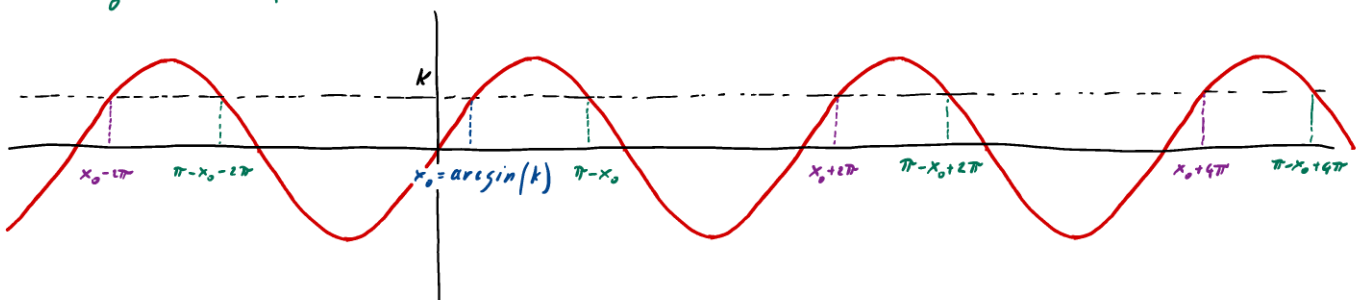
$$\sin(x) = k$$

a patto che $-1 \leq k \leq 1$, altrimenti è chiaro che l'equazione non ha soluzioni, otteniamo innanzitutto la soluzione

$$x_0 = \arcsin(k)$$



A questa, per via della periodicità del seno, si aggiungono tutti i numeri della forma $x_0 + 2k\pi$, ma queste non sono ancora tutte le soluzioni: ci sono anche i numeri della forma $\pi - x_0 + 2k\pi$.



Funzione arcocoseno

$\arccos(x)$ è quell'angolo compreso fra 0 e π il cui coseno vale x . In formule

$$y = \arccos(x) \iff \cos(y) = x \text{ e } 0 \leq y \leq \pi$$

occhio, è diverso da arcsin e arctan

L'equazione

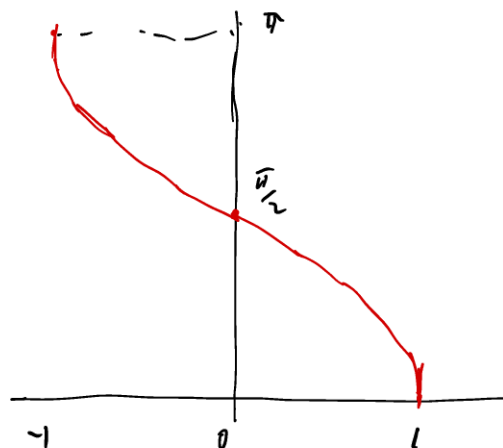
$$\cos(x) = k$$

ha soluzioni solo se $-1 \leq k \leq 1$. Detto

$$x_0 = \arccos(k)$$

queste sono i numeri della forma

$$\pm x_0 + 2k\pi$$



Terminologia

Ricapitoliamo alcuni termini che abbiamo usato nella discussione delle funzioni trigonometriche.

- $f(x)$ è *periodica di periodo T* se

$$f(x+T) = f(x)$$

per ogni valore della x .

Esercizio: qual è un periodo per $f(x) = \sin(x \cdot \sqrt{3})$?

Vogliamo scrivere un'identità del tipo

$$f(x+T) = f(x)$$

$$\sin(\underbrace{(x+T) \cdot \sqrt{3}}_{\textcircled{2}}) = \sin(\underbrace{x \cdot \sqrt{3}}_{\textcircled{1}})$$

noi sappiamo che:

$$\sin(\underbrace{\square + 2\pi}_{\textcircled{2}}) = \sin(\underbrace{\square}_{\textcircled{1}})$$

otterremo quindi l'identità richiesta se ponendo $\square = x \cdot \sqrt{3}$

avessimo $\square + 2\pi = (x+T) \cdot \sqrt{3}$. Ora, sostituendo $\square$ ci serve:

$$\underbrace{x \cdot \sqrt{3}}_{\textcircled{1}} + 2\pi = (x+T) \cdot \sqrt{3} \Rightarrow \cancel{x \cdot \sqrt{3}} + 2\pi = \cancel{x \cdot \sqrt{3}} + T \cdot \sqrt{3}$$

da cui: $\boxed{T = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi}$

Verifichiamo questa soluzione

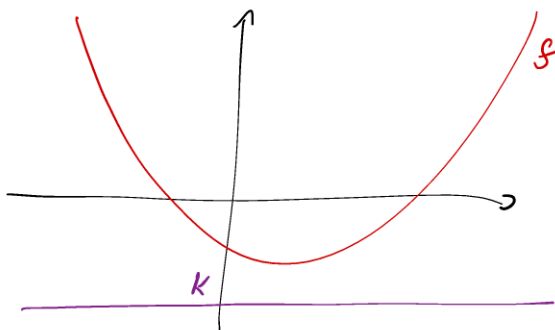
$$f(x+T) = f\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\right) = \sin\left(\left(x + \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\right) \cdot \sqrt{3}\right) = \sin\left(x \cdot \sqrt{3} + 2\pi\right)$$

$$f(x) = \sin(x \cdot \sqrt{3}) \quad \leftarrow \text{= per la periodicit\`a del seno.}$$

- $f(x)$ \u00e8 superiormente limitata se c'\u00e8 un numero k con la propriet\u00e0 che $f(x) \leq k$ qualunque sia il valore di x .
- $f(x)$ \u00e8 inferiormente limitata se c'\u00e8 un numero k con la propriet\u00e0 che $f(x) \geq k$ qualunque sia il valore di x .

Graficamente, $f(x)$ \u00e8 superiormente/inferiormente limitata se il suo grafico sta tutto sotto/sopra una opportuna retta orizzontale.

Esercizio: dire se $f(x) = x^2 - 2x - 3$ \u00e8 sup/inf-riormente limitata.



"la parabola sta sempre sopra k "



" f \u00e8 inferiormente limitata da k "

D'altro canto f non \u00e8 superiormente limitata, perch\u00e9 assume valori arbitrariamente grandi.

Esercizio: dire se $f(x) = \sin(x) + x^2$ sia sup/inf-riormente limitata.

$f(x)$ è inferiormente limitata, infatti

$$f(x) = \underbrace{\sin(x)}_{\geq -1} + \underbrace{x^2}_{\geq 0} \geq -1$$

tuttavia non è superiormente limitata. Se lo fosse, infatti, varrebbe la disequazione

$$f(x) = \sin(x) + x^2 \leq k$$

$$\begin{aligned} & \downarrow \\ -1 & \leq \sin(x) \leq k - x^2 \\ & \swarrow \quad \searrow \\ & x^2 \leq k + 1 \end{aligned}$$

che però non vale, perché x^2 può assumere valori arbitrariamente grandi.

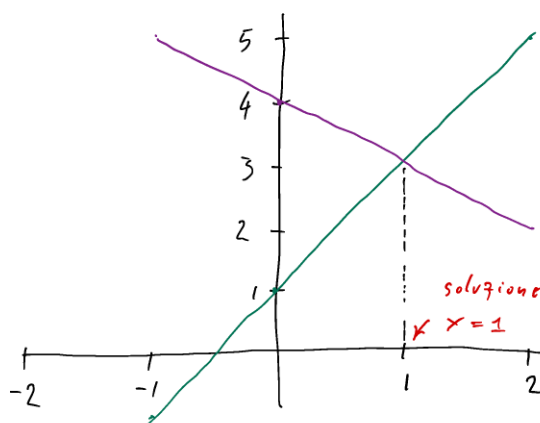
fine l. 15

Soluzione grafica & numerica di equazioni

Risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$ significa trovare le ascisse dei punti di intersezione dei grafici di f e g .

Esempio

$$\underbrace{2x+1}_{f(x)} = \underbrace{4-x}_{g(x)}$$



Algebricamente

$$2x+1 = 4-x$$

$$2x+x = 4-1$$

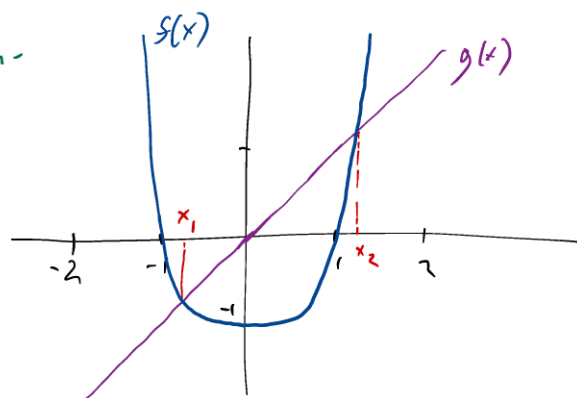
$$3x = 3$$

$$x = 1$$

Esempio Quante soluzioni ha l'equazione $x^4 - 1 = x$?

Se chiamiamo f e g i due membri dell'equazione $x^4 - 1 = x$ e studiamo i

grafici di f e di g , vediamo che ci sono due intersezioni.



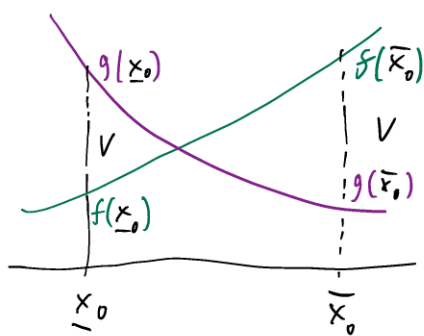
Quindi l'equazione ha due soluzioni.

Calcolo numerico delle soluzioni di $f(x) = g(x)$

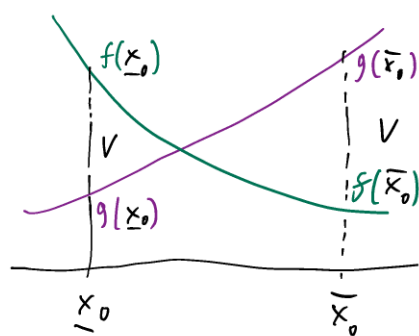
Molte equazioni non possono essere risolte in maniera algebrica — vale a dire per mezzo di formule esatte, come invece capita, per esempio, per le equazioni di primo e secondo grado. In questi casi è possibile stabilire, in maniera approssimativa, dove si trovino le soluzioni avvalendosi di un grafico, oppure di qualche ragionamento ad hoc. Poi, le soluzioni possono essere calcolate in maniera numerica, cioè approssimata.

Il metodo più semplice e più sicuro per risolvere numericamente un'equazione è per bisezione. Si parte da due valori x_0 e $\bar{x}_0$, con $x_0 < \bar{x}_0$, tali che i grafici di f e g abbiano, fra questi due valori, precisamente una intersezione.

Ci troviamo, quindi, in uno dei casi seguenti:



Primo caso



Secondo caso

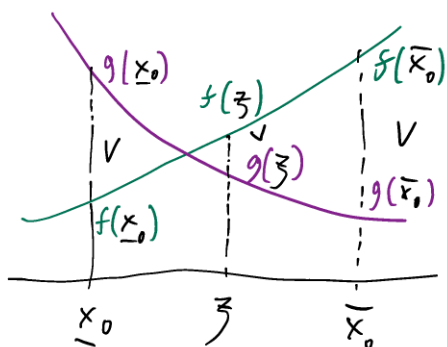
$$f(x_0) < g(x_0) \text{ e } f(\bar{x}_0) > g(\bar{x}_0) \quad f(x_0) > g(x_0) \text{ e } f(\bar{x}_0) < g(\bar{x}_0)$$

si passa dall'uno all'altro scambiando f e g .

Secondo che il grafico di f passi, nel punto di intersezione, da sotto il grafico di g a sopra, o viceversa.

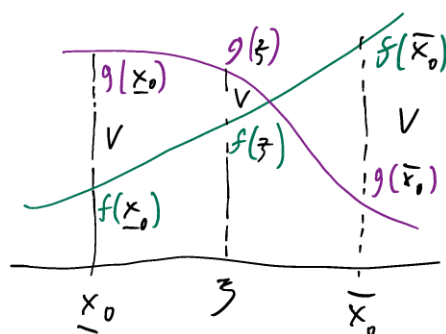
Poniamo di trovarci nel primo caso, altrimenti si procede simmetricamente. Scegliamo un numero ξ fra x_0 e $\bar{x}_0$.

Può capitare che $f(\xi) > g(\xi)$ oppure che $f(\xi) < g(\xi)$.



Prima situazione

$$f(\xi) > g(\xi)$$

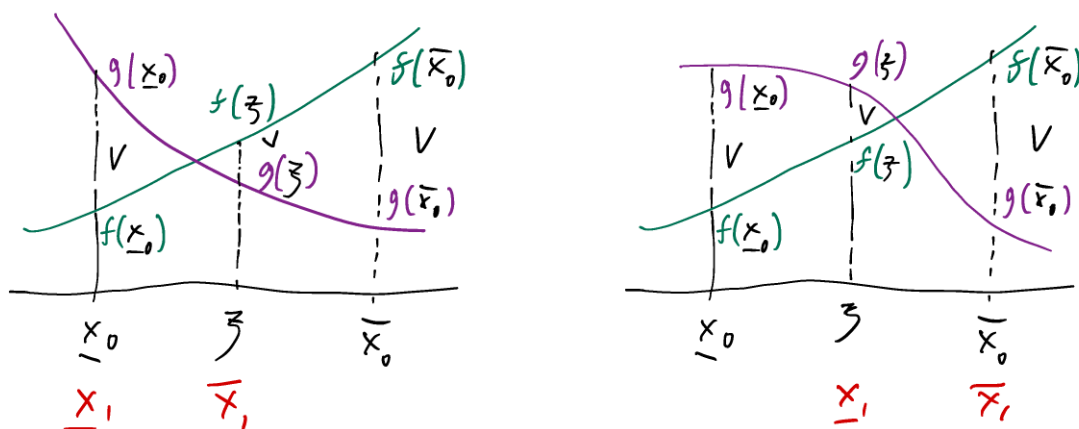


Seconda situazione

$$f(\xi) < g(\xi)$$

Una, la soluzione x è compresa fra x_0 e $\bar{x}_0$, ma noi desideriamo intrappolarla in un intervallo più piccolo.

Nella prima situazione la soluzione x è compresa fra $\underline{x}_0$ e $\bar{z}$, quindi scriviamo $\underline{x}_1 = \underline{x}_0$, $\bar{x}_1 = \bar{z}$. Nella seconda situazione x è fra $\bar{z}$ e $\bar{x}_0$, quindi scriviamo $\underline{x}_1 = \bar{z}$ e $\bar{x}_1 = \bar{x}_0$.



In ambo i casi abbiamo due nuovi valori; $\underline{x}_1$ e $\bar{x}_1$ che racchiudono la soluzione incognita x (poiché le disuguaglianze $f(\underline{x}_1) < g(\underline{x}_1)$ e $f(\bar{x}_1) > g(\bar{x}_1)$ sono invertite l'una rispetto all'altra).

Ripetiamo fino ad ottenere $\underline{x}_n$ e $\bar{x}_n$ così vicini che determinano x entro l'approssimazione desiderata.

Es. Determinare la soluzione positiva della equazione

$$x^4 - 1 = x$$

dell'esercizio precedente approssimata a tre cifre significative.

Soluzione Avvalendoci del grafico, possiamo iniziare da $\underline{x}_0 = 1$, $\bar{x}_0 = 1.4$. Vale $f(\underline{x}_0) = 0$, $g(\underline{x}_0) = 1$, $f(\bar{x}_0) \approx 2.8$, $g(\bar{x}_0) = 1.4$ quindi $f(\underline{x}_0) < g(\underline{x}_0)$ e $f(\bar{x}_0) > g(\bar{x}_0)$.

Scegliamo $\bar{z} = 1.2$ (fra $\underline{x}_0 = 1$ e $\bar{x}_0 = 1.4$). $f(\bar{z}) \approx 1.07$,
 $g(\bar{z}) = 1.2$. Quindi $f(\bar{z}) < g(\bar{z})$. Seguendo il procedimento,
 $\underline{x}_1 = \bar{z} = 1.2$, $\bar{x}_1 = \bar{x}_0 = 1.4$, vale a dire che la soluzione si
trova fra 1.2 e 1.4. Per il passo successivo scegliamo $\bar{z} = 1.3$. Otteniamo $f(\bar{z}) \approx 1.86$, $g(\bar{z}) = 1.3$, quindi
 $f(\bar{z}) > g(\bar{z})$. Ricordando che $f(\underline{x}_1) = f(1.2) \approx 1.07 < 1.2 = g(\underline{x}_1)$,
dobbiamo scegliere $\underline{x}_2 = \underline{x}_1 = 1.2$, $\bar{x}_2 = \bar{z} = 1.3$.

Proseguendo così otteniamo

[illegible]

Quindi la soluzione x è compresa fra $\underline{x}_5 = 1.22$ e $\bar{x}_5 = 1.23$. Per capire se dobbiamo arrotondare x a 1.22 o a 1.23 calcoliamo un ultimo passo ponendo $\bar{z} = 1.225$. Otteniamo $f(\bar{z}) \approx 1.25$, $g(\bar{z}) = 1.225$. Quindi $f(\bar{z}) > g(\bar{z})$. Ricordando che $f(\underline{x}_5) = f(1.22) \approx 1.215$ e $g(\underline{x}_5) = 1.22$, vediamo che $f(\underline{x}_5) < g(\underline{x}_5)$, le disuguaglianze sono invertite, la soluzione è fra $\underline{x}_5 = 1.22$ e $\bar{z} = 1.225$, dunque si approssima $\boxed{x = 1.22}$.

Nota: nella scelta di z , è importante che si prenda un valore compreso fra $\underline{x}$ e $\bar{x}$, ed è conveniente sceglierlo grosso modo a metà fra $\underline{x}$ e $\bar{x}$. Non c'è nessun obbligo, però, di prendere esattamente il valor medio $\frac{\underline{x} + \bar{x}}{2}$.

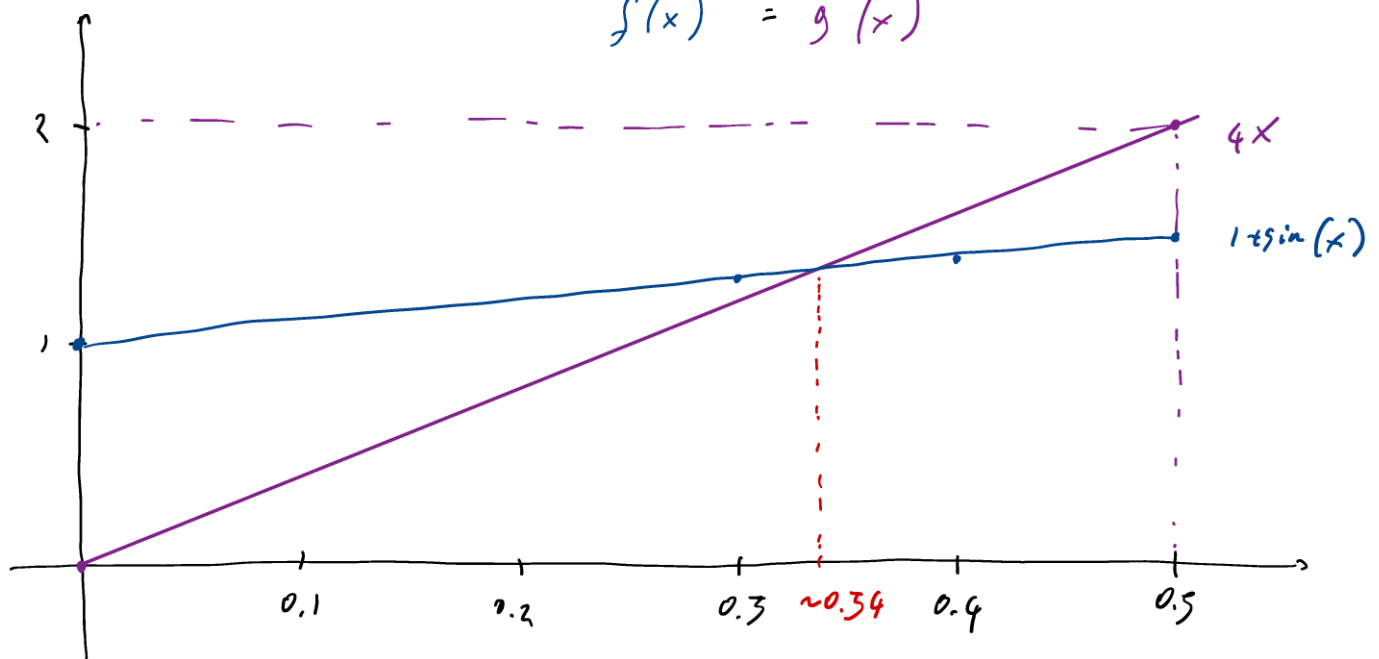
Esempio risolvere l'equazione $1 + \sin(x) = 4x$ con tre cifre significative di precisione.

Soluzione.

Siccome $\sin(x)$ è compreso fra -1 e 1 , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, e possiamo risolvere l'equazione nella forma $\sin(x) = 4x - 1$ abbiamo $-1 \leq 4x - 1 \leq 1$. Risolvendo le due disequazioni separatamente otteniamo $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$. Le soluzioni sono quindi obbligate a stare in questo intervallo, e sono questi i valori della x che dobbiamo studiare.

$$1 + \sin(x) = 4x$$

$$f(x) = g(x)$$



Il grafico ci dice che c'è una sola soluzione, che questa vale forse circa 0.34 e comunque è certamente compresa fra 0.3 e 0.4. Procediamo quindi come nell'esempio precedente a partire da $\underline{x}_0 = 0.3$ e $\bar{x}_0 = 0.4$.

$f(x)$	$g(x)$	x	passo 0	passo 1	passo 2	passo 3	passo 4	passo 5	passo 6
1.3	> 1.2	0.3	-- $\underline{x}_0$	---	---	---	---	---	---
1.324	> 1.320	0.33	---	---	---	---	---	---	---
1.325	> 1.324	0.331	---	---	---	---	---	---	---
1.325	< 1.326	0.3315	---	---	---	---	---	---	---
1.326	< 1.328	0.332	---	---	---	---	---	---	---
1.328	< 1.340	0.335	---	---	---	---	---	---	---
1.34	< 1.40	0.35	---	---	---	---	---	---	---
1.39	< 1.6	0.4	---	---	---	---	---	---	---

Siamo giunti alla conclusione che la soluzione è compresa fra 0.331 e 0.3315. Espressa con tre cifre significative correttamente arrotondate è quindi $\boxed{x = 0.331}$

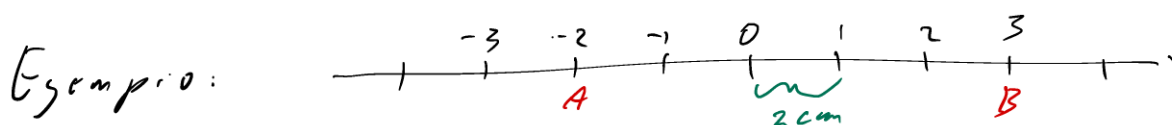
Se, per esempio, fosse risultata compresa fra 0.3315 e 0.332, allora avremmo dovuto arrotondare a $x = 0.332$.

Scale logaritmiche

L'usuale corrispondenza fra i numeri reali e i punti sugli assi di un diagramma cartesiano si chiama *scala lineare*.

Questa maniera di numerare i punti di una retta è definita dalla seguente proprietà.

Scala lineare: la distanza fra due numeri è proporzionale alla loro differenza.



$$\text{dist.}(A, B) : 3 - (-2) = 2 \text{ cm} : 1 - 0$$

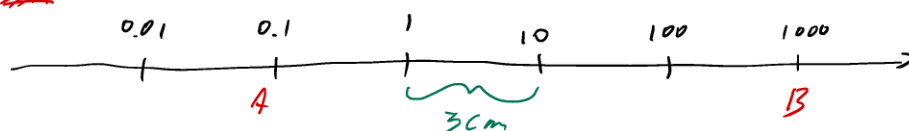
$$\text{dist}(A, B) = \frac{5 \cdot 2 \text{ cm}}{1} = 10 \text{ cm}$$

Un'altra maniera di numerare gli assi che ha interesse pratico è la *scala logaritmica*, definita dalla proprietà seguente

Scala logaritmica: rappresenta solo numeri positivi, e la distanza fra due numeri è proporzionale alla differenza dei loro logaritmi (in una qualsiasi base fissata).

Tipico aspetto di una scala logaritmica

Esempio

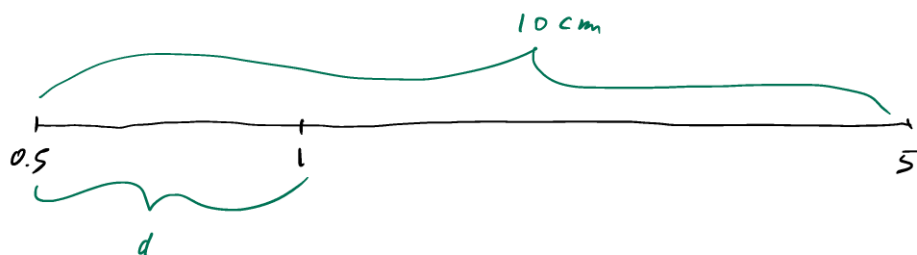


$$\text{dist}(A, B) : \log_{10}(1000) - \log_{10}(0.1) = 3 \text{ cm} : \log_{10}(10) - \log_{10}(1)$$

$$\text{dist}(A, B) = \frac{4 \cdot 3 \text{ cm}}{1} = 12 \text{ cm}$$

Es. Tracciare una scala logaritmica lunga 10 cm che, all'estremo sinistro, ha 0.5 e, a quello destro, ha 5.

Soluzione Come esempio, calcoliamo dove mettere il numero 1 (il calcolo è lo stesso qualunque numero vogliamo riportare sulla scala). Conviene determinare la distanza d del nostro numero dall'estremo sinistro.



$$d : \log_{10}(1) - \log_{10}(0.5) = 10 \text{ cm} : \log_{10}(5) - \log_{10}(0.5)$$

$$\begin{aligned} \boxed{d} &= \frac{(\log_{10}(1) - \log_{10}(0.5)) \cdot 10 \text{ cm}}{\log_{10}(5) - \log_{10}(0.5)} = \\ &= \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot 10 \text{ cm}}{\log_{10}\left(\frac{5}{0.5}\right)} = \frac{\log_{10}(2) \cdot 10 \text{ cm}}{\log_{10}(10)} \approx \boxed{3 \text{ cm}} \end{aligned}$$

Osservazioni sull'esercizio

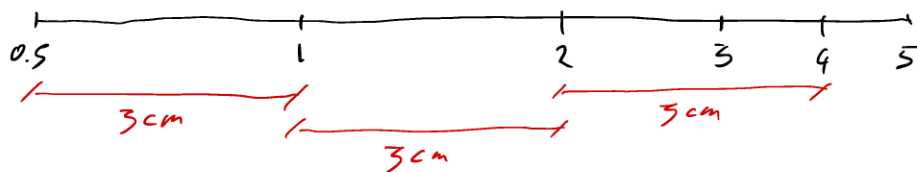
- Se ripetiamo il calcolo in un'altra base otteniamo il medesimo risultato

$$d : \log_e(1) - \log_e(0.5) = 10 \text{ cm} : \log_e(5) - \log_e(0.5)$$

$0 \quad \sim -0.693 \qquad \qquad \sim 1.609 \quad \sim -0.693$

$$d : 0.693 = 10 \text{ cm} : 2.302 \quad \Rightarrow \quad d \approx \frac{0.693 \cdot 10 \text{ cm}}{2.302} \approx 3 \text{ cm}$$

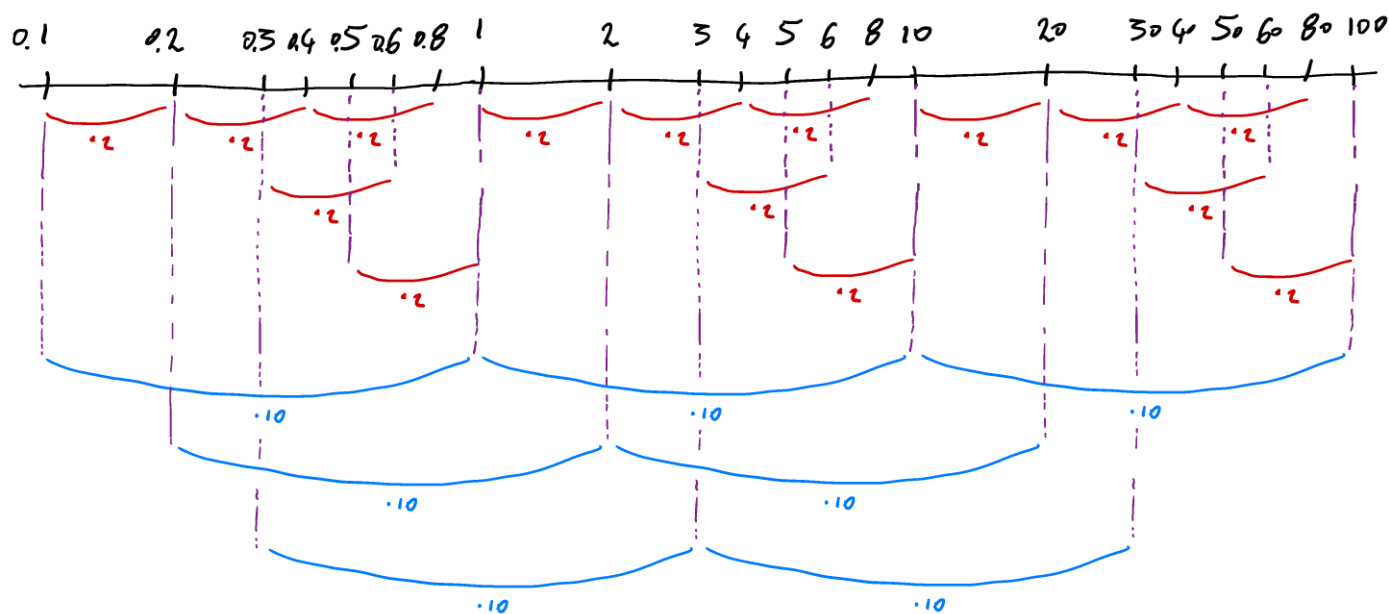
- Riportando altri numeri otteniamo



Notiamo che le distanze fra 0.5 e 1, fra 1 e 2, e fra 2 e 4 sono uguali. Questo accade perché $\frac{1}{0.5} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$.

In generale spostarsi lungo una scala logaritmica di una certa distanza significa moltiplicare per un certo numero (che dipende dalla scala e dalla distanza). Nel nostro esempio, se ci spostiamo verso destra di 3 cm, moltiplichiamo per 2.

Proseguendo questa scala a destra e a sinistra otteniamo



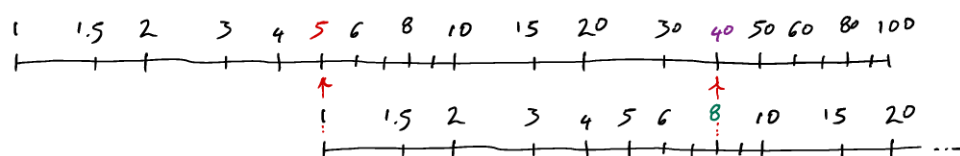
È interessante notare come il gioco di spostamento = moltiplicazione fa sì che gli ordini di grandezza 0.1-1, 1-10, 10-100, etc. siano lunghi uguali, e suddivisi in maniera simile.

Curiosità sulle scale logaritmiche (Suoni: programma)

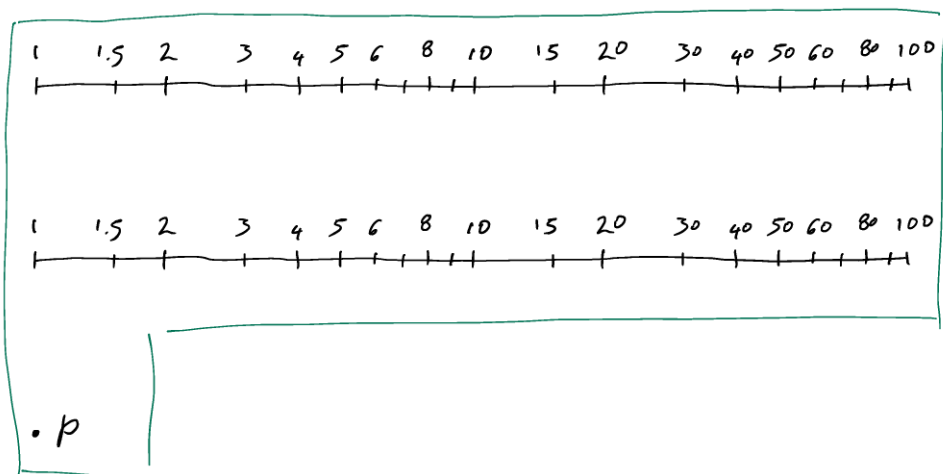
Costruiamo due scale logaritmiche uguali e mobili l'una rispetto all'altra. Supponiamo di voler calcolare un prodotto, per esempio $3 \cdot 5$. Poniamo l'1 della seconda scala in corrispondenza del 3 della prima, il numero della prima scala corrispondente al 5 sulla seconda sarà il prodotto.



Per calcolare una divisione, per esempio $40/8$, mettiamo il divisore sulla seconda in corrispondenza del dividendo sulla prima. L'1 della seconda indicherà il risultato

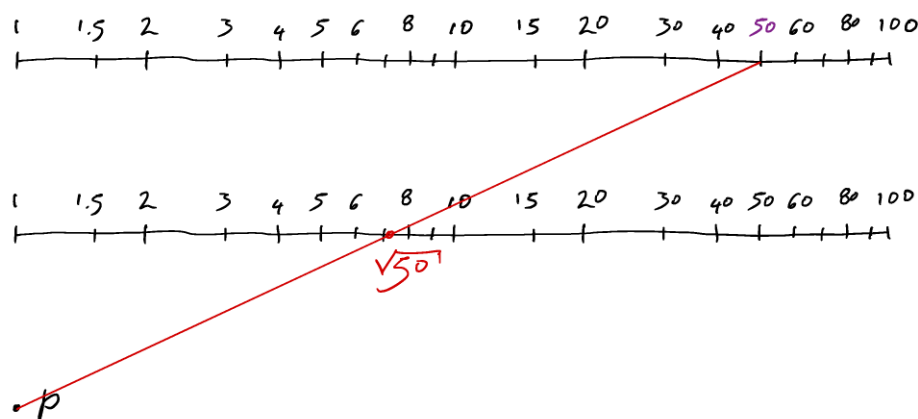


Questo diagramma permette di calcolare le radici quadrate.



Per trovare, per esempio, $\sqrt{50}$, riporto 50 sulla scala superiore,

poi connesso questo punto con P. Il segmento così identificato interseca la scala inferiore in $\sqrt{50}$.



Dagli esercizi per il test (a.a. 2013-20)

(66) Sapendo $\sin(x) = 0.6$, quanto può valere $\cos(x)$?

Ricordo $(\sin(x))^2 + (\cos(x))^2 = 1$

$$(\cos(x))^2 = 1 - (\sin(x))^2 = 1 - 0.6^2 = 1 - 0.36 = 0.64$$

$$\cos(x) = \pm \sqrt{0.64} = \pm 0.8 \rightarrow \begin{cases} 0.8 \\ 0 \\ -0.8 \end{cases}$$

(67) Sapendo $\sin(x) = 0.6$, quanto può valere $\tan(x)$?

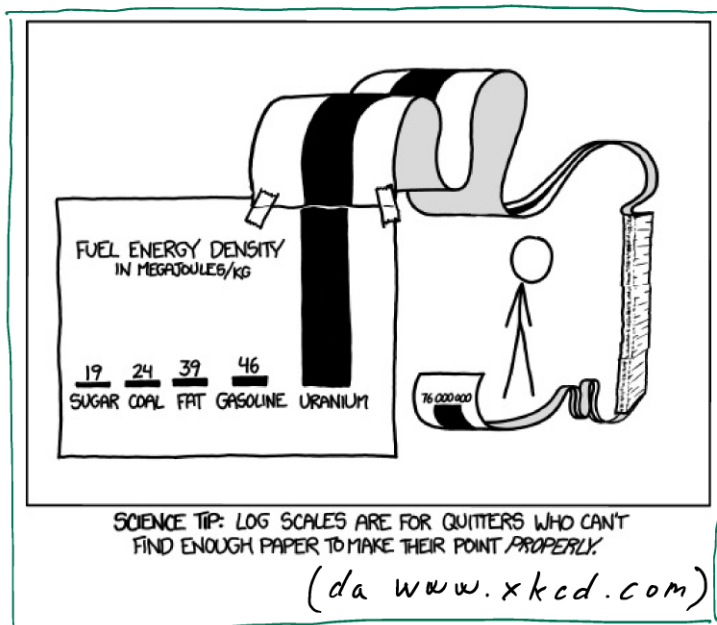
$$\boxed{\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{0.6}{\pm 0.8} \rightarrow \begin{cases} +0.75 \\ 0 \\ -0.75 \end{cases}$$

per definizione

(68) Per che x , $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$ non è definita?

Basta risolvere denominatore = 0

$$e^x - 1 = 0 \rightarrow e^x = 1 \rightarrow x = \log_e 1 \rightarrow \boxed{x = 0}$$



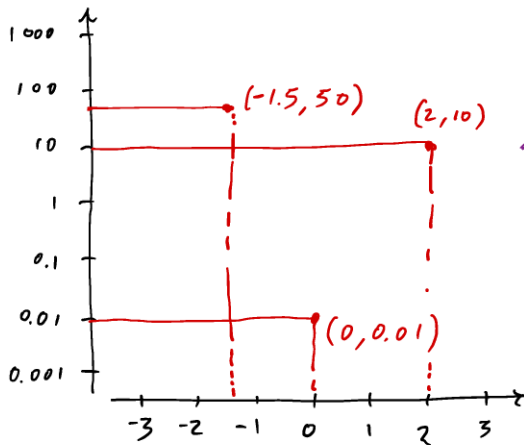
A cosa servono
le scale
logaritmiche?

Una scala logaritmica
permette solo di rap-
presentare quantità

positive. In generale, è conveniente usare una
scala logaritmica per quantità che variano su
più ordini di grandezza. I grafici logaritmici
sono particolarmente utili in quanto evidenzia-
no certe leggi (o funzioni) che si incontrano
di frequente (esponenziali, potenze).

Grafici semi-logaritmici (o lin-log)

Un grafico semi-logaritmico (o lin-log) si
distingue dagli usuali grafici cartesiani poiché
l'asse delle ordinate (questo) è graduato in
scala logaritmica. I punti si identificano
su un grafico logaritmico mediante l'interse-
zione di due linee coordinate, esattamente
nello stesso modo dei grafici cartesiani.

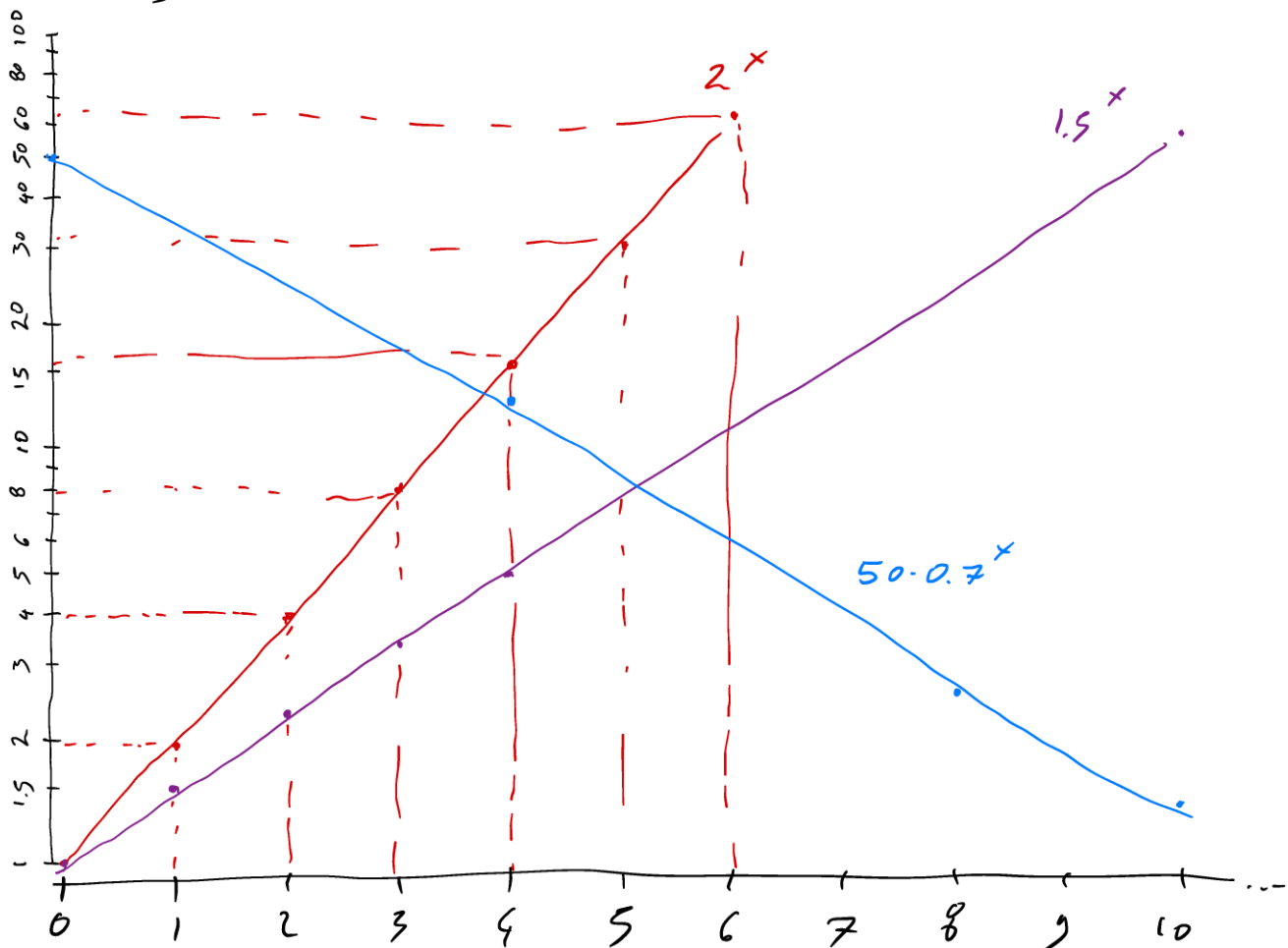


Alcuni punti rappresentati su un grafico semi-logaritmico.

Da notare che l'asse delle ordinate riporta solo valori positivi. L'asse delle ascisse,

invece, può anche rappresentare numeri negativi.

I grafici semi-logaritmici sono importanti per riconoscere le funzioni esponenziali. Infatti un grafico appare rettilineo se e solo se rappresenta un esponenziale.



Da grafico semi-logaritmico a espressione

La forma generale di una funzione esponenziale è $f(x) = a \cdot b^x$. Alternativamente, si può fissare una base convenzionale, per esempio 10, oppure e , e scrivere $f(x) = a \cdot 10^{k \cdot x}$, oppure $f(x) = a \cdot e^{h \cdot x}$.

Ogni funzione esponenziale di variabile reale può essere espressa in ciascuna di queste forme, per esempio.

$$\underbrace{0.7}_a \cdot \underbrace{3}_b^x = \underbrace{0.7}_a \cdot 10^{x \cdot \overbrace{\log_{10} 3}^k} = \underbrace{0.7}_a \cdot e^{x \cdot \overbrace{\log_e 3}^h}$$

Però, conviene fissare una base convenzionale quando la variabile non è adimensionale. Per esempio, la funzione $f(t) = 4.0 \cdot 10^{\frac{t}{45}}$, della variabile t che ha le dimensioni di un tempo, non si può scrivere nella forma $f(t) = 4.0 \cdot b^t$, perché non ha senso elevare a a un tempo (quanto fa 2^{2h} ? e $2^{120 \text{ min}}$?). Questa funzione si può però scrivere nelle forme equivalenti:

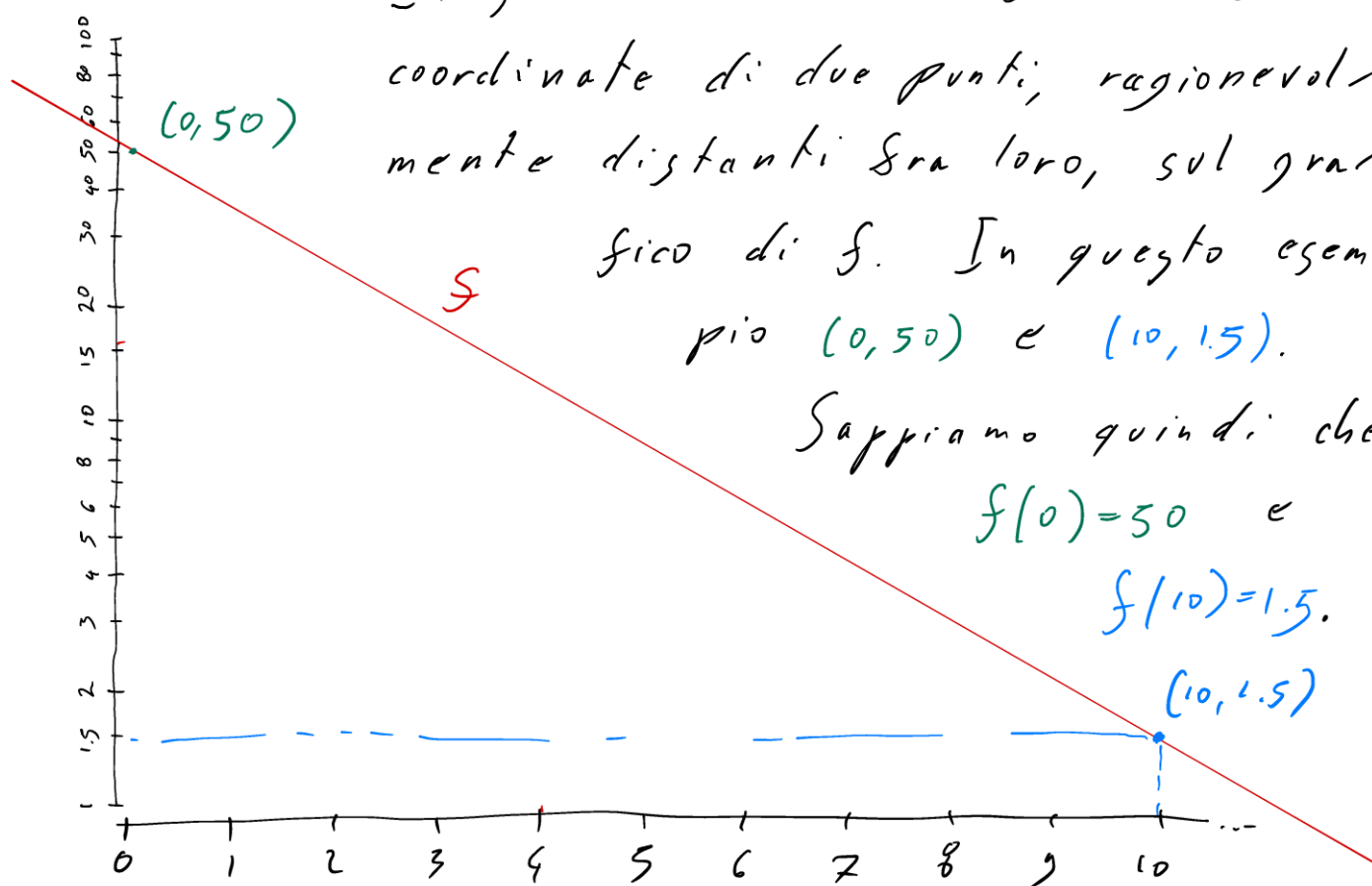
$$f(t) = 4.0 \cdot 10^{t \cdot 0.25 \text{ s}^{-1}} = 4.0 \cdot e^{t \cdot 0.25 \cdot \log_e(10) \text{ s}^{-1}} = 10^{\log_{10}(4.0) + \frac{15}{1 \cdot \text{min}} t}$$

Esercizio: verifica tutte le formule di questa pagina.

Ora, supponiamo di constatare che il grafico di una certa funzione f , in un diagramma semi-logaritmico, è una retta. Sappiamo quindi che f è una funzione esponenziale. Come troviamo l'espressione di $f(x)$?

Iniziamo coll'identificare le coordinate di due punti, ragionevolmente distanti fra loro, sul grafico di f . In questo esempio $(0, 50)$ e $(10, 1.5)$.

Sappiamo quindi che $f(0) = 50$ e $f(10) = 1.5$.



Volendo scrivere f nella forma $f(x) = a \cdot b^x$ vediamo che $f(0) = a \cdot b^0 = 50$ e $f(10) = a \cdot b^{10} = 1.5$. Quindi i parametri a e b soddisfanno il sistema

$$\begin{cases} a \cdot b^0 = 50 \\ a \cdot b^{10} = 1.5 \end{cases}$$

Risolvi il sistema

$$\begin{cases} a \cdot b^0 = 50 \Rightarrow a = 50 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \cdot b^{10} = 1.5 \Rightarrow 50 \cdot b^{10} = 1.5 \Rightarrow b = \left(\frac{1.5}{50} \right)^{\frac{1}{10}} \approx 0.70 \end{cases}$$

Quindi:

$$f(x) = 50 \cdot 0.70^x$$

Altro esempio: cerchiamo una funzione esponenziale $g(x)$ tale che $g(2.5) = 7.6$ e $g(4.0) = 12.0$. Questa volta, usiamo la forma $g(x) = a \cdot 10^{k \cdot x}$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a \cdot 10^{k \cdot 2.5} = 7.6 \Rightarrow a = \frac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \\ a \cdot 10^{k \cdot 4.0} = 12.0 \Rightarrow \frac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \cdot 10^{k \cdot 4.0} = 12.0 \Rightarrow \end{cases}$$

$10^{k \cdot 4.0 - k \cdot 2.5} = 10^{k \cdot 1.5}$

$$\Rightarrow 7.6 \cdot 10^{k \cdot 1.5} = 12.0 \Rightarrow 10^{k \cdot 1.5} = \frac{12.0}{7.6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot 1.5 = \log_{10} \frac{12.0}{7.6} \Rightarrow k = 0.132$$

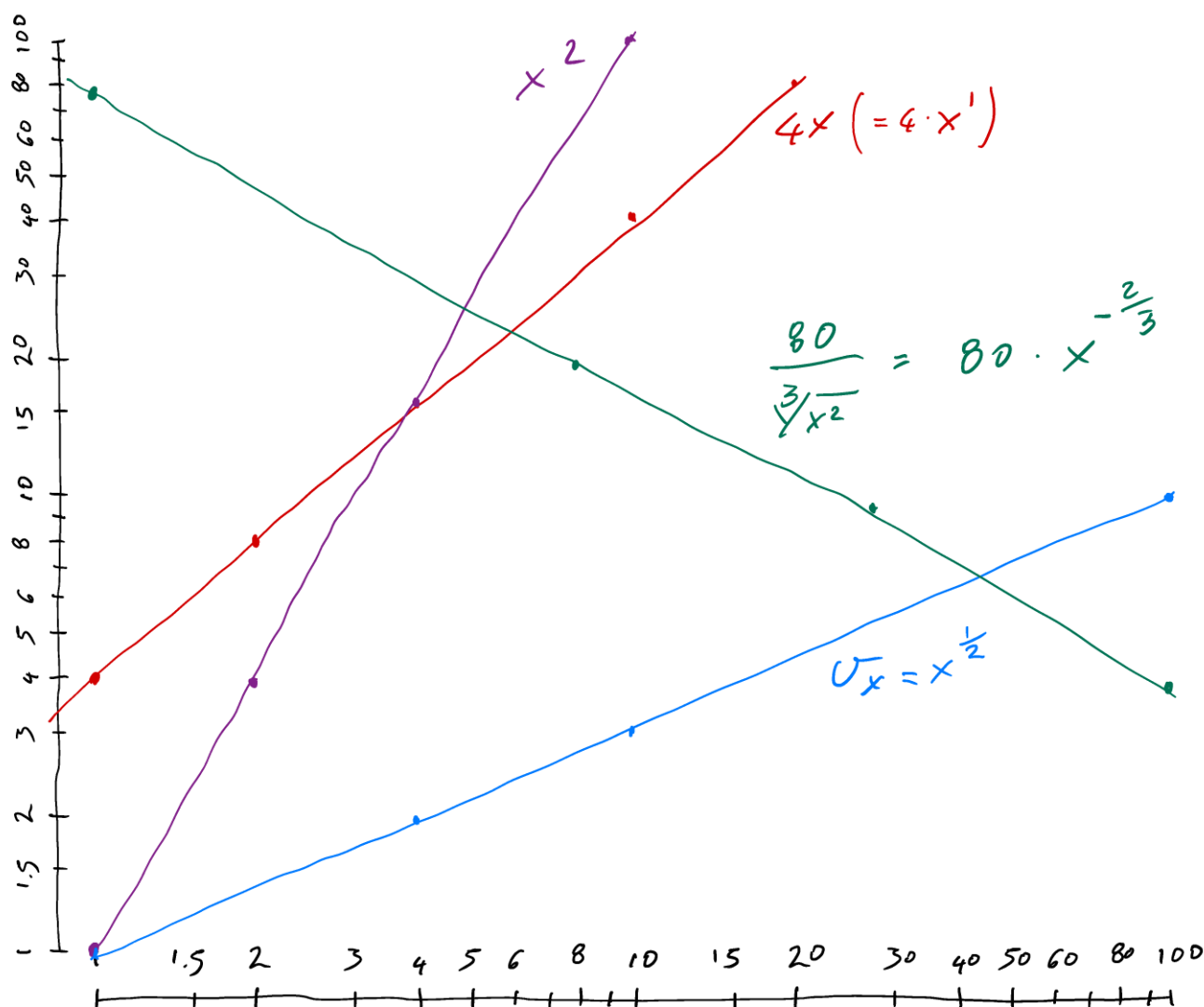
$$a = \frac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} = 3.5$$

Quindi: $f(x) = 3.5 \cdot 10^{0.132 \cdot x}$

Grafici logaritmici (o log-log)

In un grafico logaritmico entrambi gli assi sono in scala logaritmica (va da sé, quindi, che entrambi rappresentano solo numeri positivi).

Questi grafici permettono di riconoscere visivamente le funzioni potenza, ossia quelle della forma $f(x) = a \cdot x^k$ (con k che potrebbe anche non essere un numero intero). Per esempio



Dal grafico logaritmico all'espressione

Il procedimento per ottenere l'espressione di una legge potenza $f(x)$ dal suo grafico è analogo a quello descritto per l'esponenziale.

Esempio. Supponiamo di osservare che una funzione $f(x)$ è rappresentata in un grafico logaritmico da una retta. Sappiamo quindi che $f(x) = a \cdot x^k$ per opportuni a e k . Vediamo anche dal grafico che $f(2.1) = 10$ e $f(30) = 3.7$. Qual è l'espressione di f ?

$$\begin{cases} a \cdot 2.1^k = 10 \\ a \cdot 30^k = 3.7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{10}{2.1^k} \\ \frac{10}{2.1^k} \cdot 30^k = 3.7 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{30}{2.1}\right)^k = \frac{3.7}{10} \Rightarrow$$

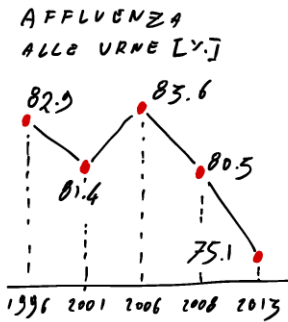
$$\Rightarrow \boxed{k} = \log_{\frac{30}{2.1}} \left(\frac{3.7}{10} \right) = \frac{\log_{10} \frac{3.7}{10}}{\log_{10} \frac{30}{2.1}} \approx \boxed{-0.37}$$

$$\boxed{a} = \frac{10}{2.1^k} = \frac{10}{2.1^{-0.37}} \approx \boxed{13} \quad \text{Quindi } \boxed{f(x) = 13 \cdot x^{-0.37}}$$

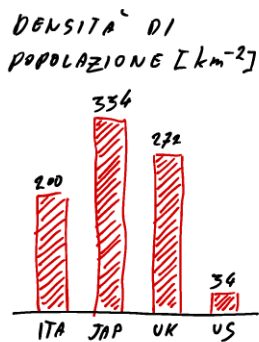
Nota importante: Al termine di calcoli come questo conviene sempre fare la prova calcolando f nei punti dati. $f(2.1) = 13 \cdot 2.1^{-0.37} = 9.88 \approx 10$ ✓

$$f(30) = 13 \cdot 30^{-0.37} = 3.69 \approx 3.7 \quad \checkmark$$

Altri grafici usati in pratica

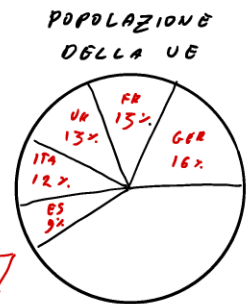


Grafici a spezzata per rappresentare serie temporali di dati, soprattutto quando la variazione nel tempo non è continua. Per esempio l'affluenza alle urne è ben definita solo quando si svolgono delle elezioni (per contro, ad esempio, l'altezza della marea nel porto di Genova è una variabile continua).



Istogrammi per rappresentare collezioni di dati che non formano una sequenza, per cui sono ordinati in un ordine arbitrario o convenzionale.

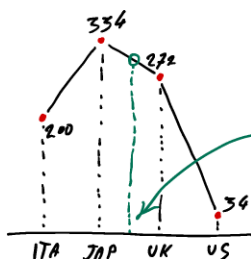
Areogrammi (grafici a torta) per rappresentare la suddivisione di un totale nelle sue parti:



$$\boxed{\text{angolo} : 360^\circ = \text{percentuale} : 100}$$

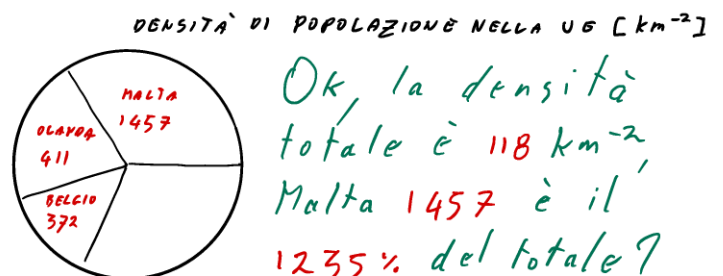
Infamità

⇒ DA NON FARE MAI ⇐



DENSITA' DI
POPOLAZIONE [km⁻²]

Cosa c'è qui?
La Russia?

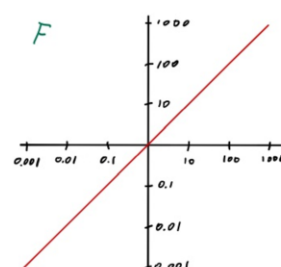
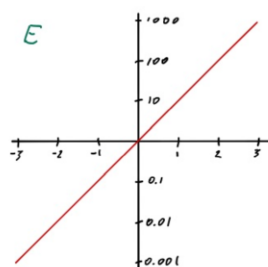
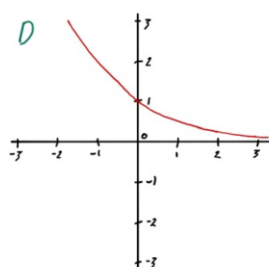
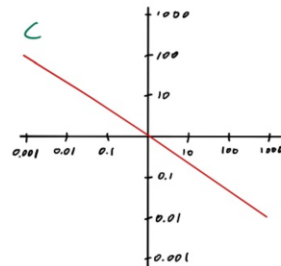
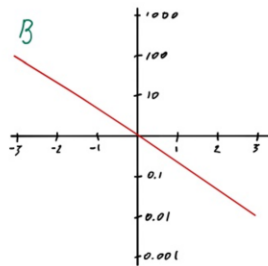
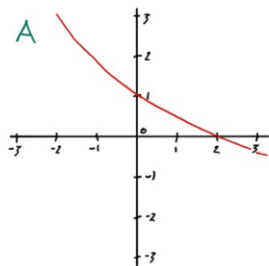


Ok, la densità totale è 118 km⁻²,
Malta 1457 è il
1235% del totale?

sino l.17

ESERCIZIO B (prova online dal 28.V.2020)

Determina quali dei grafici seguenti rappresentano un decadimento esponenziale (3pt), e, per ciascuno di questi, trova il tempo di dimezzamento (3pt). In tutti i grafici le ascisse sono indicate in secondi.



Soluzioni

A - **NO** perché assume anche valori negativi

B - **SÌ** retta su grafico semi-log $\rightarrow$ esponenziale + decrescente

C - **NO** retta su grafico log-log $\rightarrow$ potenza

D - **SÌ** o almeno non c'è ragione di escluderlo

NON È UN
DECADIMENTO

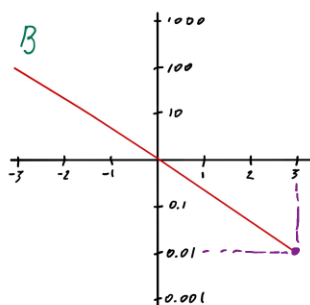
E - **NO** retta su grafico semi-log $\rightarrow$ esponenziale ma crescente

F - **NO** retta su grafico log-log $\rightarrow$ potenza inoltre crescente

Per i tempi di dimezzamento:

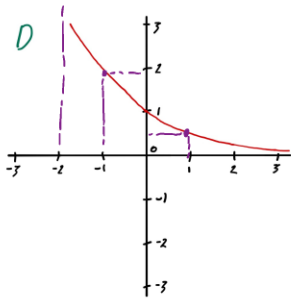
$$f(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}}$$

τ : di dimezzamento



$$\begin{cases} f(0s) = 1 \Rightarrow A = 1 \\ f(3s) = 0.001 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3s}{\tau}} = 0.001 \Rightarrow \tau = \frac{3s}{\log_2 0.001} \approx \boxed{0.45s} \end{cases}$$

$$\tau = \frac{3s}{\log_2 0.001} \approx \boxed{0.45s}$$

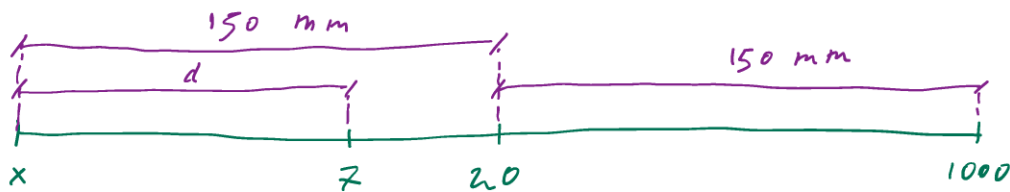


Dal grafico $f(-1s) \approx 2$, $f(0s) \approx 1$, $f(1s) \approx \frac{1}{2}$
 Quindi il valore di f si dimezza grosso modo
 nel tempo di 1s.

ESERCIZIO B (prova online del 24.01.2020)

Vogliamo costruire una scala logaritmica lunga 30 cm. Abbiamo stabilito che il numero 20 si trovi esattamente nel mezzo della scala, mentre il numero 1000 deve trovarsi all'estremo destro. Che numero è indicato sull'estremo sinistro della scala (3 pt.)? A che distanza, in millimetri, dall'estremo sinistro si trova il numero 7 (3 pt.)?

La situazione è come rappresentata in figura



l'esercizio chiede il numero x e la distanza d .

Per x abbiamo la seguente proporzione

$$\log_{10}(1000) - \log_{10}(20) : 150 \text{ mm} = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150 \text{ mm}$$

Da cui calcoliamo

$$\underbrace{(\log_{10}(1000) - \log_{10}(20))}_{\log_{10} \frac{1000}{20}} \cdot \cancel{150 \text{ mm}} = \underbrace{(\log_{10}(20) - \log_{10}(x))}_{\log_{10} \frac{20}{x}} \cdot \cancel{150 \text{ mm}}$$

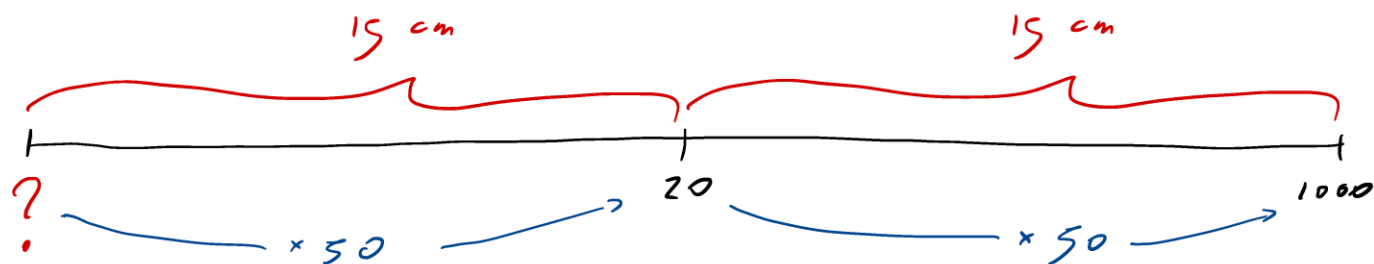
$$\log_{10} \frac{1000}{20} = \log_{10} \frac{20}{x} \Rightarrow \frac{1000}{20} = \frac{20}{x} \Rightarrow \boxed{x = \frac{20 \cdot 20}{1000} = 0.4}$$

Per d abbiamo

$$\log_{10}(7) - \log_{10}(x) : d = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150 \text{ mm}$$

$$\boxed{d} = \frac{\log_{10}(7) - \log_{10}(0.4)}{\log_{10}(20) - \log_{10}(0.4)} \cdot 150 \text{ mm} \approx \boxed{110 \text{ mm}}$$

Un ragionamento più rapido, che però permette di rispondere solo alla prima domanda, è come segue



Siccome lo spostamento di 15 cm che porta dal 20 centrale al 1000 all'estremo destro corrisponde ad una moltiplicazione per 50, l'identico spostamento che porta dall'estremo sinistro al centro deve corrispondere ad una moltiplicazione per lo stesso fattore. A sinistra abbiamo quindi

$$? = \frac{\text{valore centrale}}{50} = \frac{20}{50} = \boxed{0.4}$$

Dalle note dell'a.a. 2014-20

ESERCIZIO A (esame del 31.1.2019)

- A.1 – Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?
- A.2 – Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0 da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?
- A.3 – Se il numero iniziale di individui alla domanda A.2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

Soluzione

A.1 - Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?

Facciamo i calcoli per il 200 000, gli altri casi sono analoghi. Chiamiamo d la distanza fra il punto che rappresenta 100 000 e quello del 200 000.

Abbiamo la proporzione

$$d : \underbrace{\log_{10} 200\,000 - \log_{10} 100\,000}_{\substack{2 \cdot 10^5 \\ \log_{10} \frac{2 \cdot 10^5}{10^5} = \log_{10} 2}} = 10 \text{ cm} : \underbrace{\log_{10} 10\,000\,000 - \log_{10} 100\,000}_2$$
$$d = \frac{(\log_{10} 2) \cdot 10 \text{ cm}}{2} \approx 1.5 \text{ cm}$$

Ripetendo calcoli analoghi per gli altri dati otteniamo

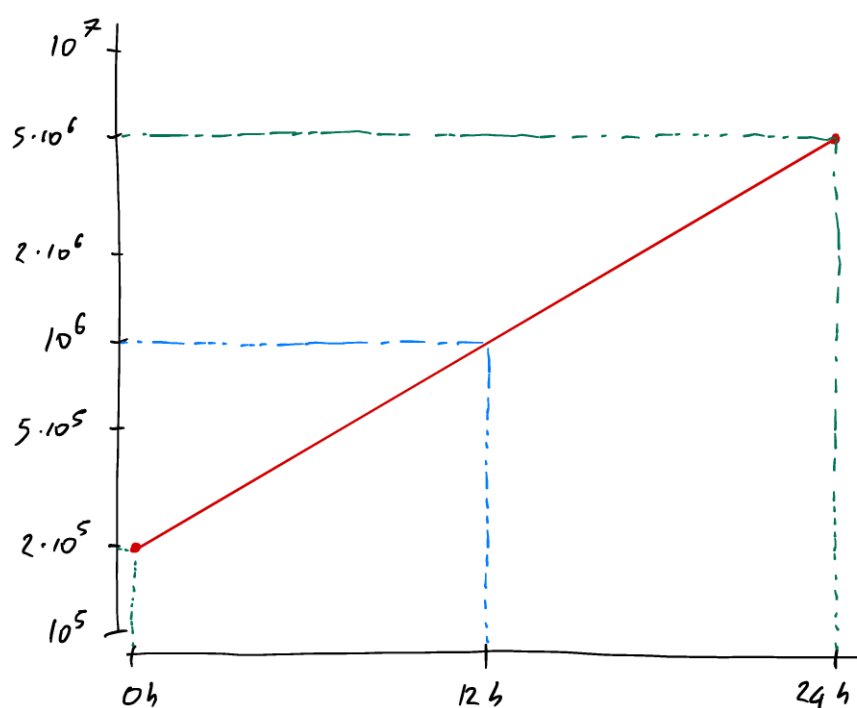
<u>valore</u>	<u>distanza</u>
1 000 000	$\frac{\log_{10}(10) \cdot 10 \text{ cm}}{2} = 5 \text{ cm}$
5 000 000	$\frac{\log_{10}(50) \cdot 10 \text{ cm}}{2} = 8.5 \text{ cm}$
200 000	$\frac{\log_{10}(2) \cdot 10 \text{ cm}}{2} = 1.5 \text{ cm}$

Nota: in queste situazioni sentitevi liberi di scrivere "ripetendo calcoli analoghi". Un esercizio di matematica

non deve essere un esercizio di bella scrittura.

- A.2 - Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0 da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?

Sappiamo dalla teoria che questo grafico è una retta. Basta quindi impostare il diagramma (per esempio sfruttando la scala logaritmica del punto A.1), individuare i punti $(0, 200000)$ e $(24h, 5000000)$, quindi connetterli con un segmento di retta.



Non è difficile stimare, leggendo il grafico, che a 12h ci sono 10^6 individui. Per ottenere questo risultato analiticamente, determiniamo i parametri della funzione

esponenziale $\text{individui} = a \cdot 10^{k \cdot \text{tempo}}$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 10^5 = a \cdot 10^{k \cdot 0h} \\ 5 \cdot 10^6 = a \cdot 10^{k \cdot 24h} \end{cases} \Rightarrow a = 2 \cdot 10^5$$

$$\Rightarrow 5 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{k \cdot 24h} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{K \cdot 24h} = 25 \Rightarrow K = \frac{\log_{10} 25}{24} h^{-1}$$

Sostituendo ora tempo = 12 h

$$\text{indiv} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{\left[\frac{\log_{10} 25}{24} \cdot 12h \right]} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{\frac{\log_{10} 25}{2}} = 2 \cdot 10^5 \cdot 5 = 10^6$$

Annotations: $\log_{10} 25 = 2 \log_{10} 5$, $\log_{10} \sqrt{25}$, $10^{\log_{10} 5} = 5$

Nota: in una soluzione scritta per l'esame, i calcoli in viola non sono necessari. Qui li aggiungo per maggior chiarezza.

A.3 - Se il numero iniziale di individui alla domanda A.2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

Dobbiamo risolvere il punto A2 con $n_1 = 200\,000 \pm 10\,000$ individui al tempo 0 e $n_2 = 5\,000\,000 \pm 250\,000$ individui al tempo 24h. Vogliamo quindi calcolare il massimo e il minimo risultato possibile al variare dei dati nei loro intervalli di incertezza. Dobbiamo considerare quattro casi:

Caso - - : $n_1 = 200\,000 - 10\,000$ $n_2 = 5\,000\,000 - 250\,000$

Caso - + : $n_1 = 200\,000 - 10\,000$ $n_2 = 5\,000\,000 + 250\,000$

Caso + - : $n_1 = 200\,000 + 10\,000$ $n_2 = 5\,000\,000 - 250\,000$

Caso + + : $n_1 = 200\,000 + 10\,000$ $n_2 = 5\,000\,000 + 250\,000$

Possiamo ripetere i calcoli in ciascun caso, oppure anche eseguirli in forma letterale per ottenere una formula che valuteremo in ciascun caso. Seguiamo la seconda strada.

$$\begin{cases} n_1 = a \cdot 10^{K \cdot 0h} \\ n_2 = a \cdot 10^{K \cdot 24h} \end{cases} \Rightarrow a = n_1 \quad \Downarrow \quad \Rightarrow n_2 = n_1 \cdot 10^{K \cdot 24h} \Rightarrow K = \frac{\log_{10} \frac{n_2}{n_1}}{24h}$$

$$\text{individui} = a \cdot 10^{K \cdot 12h} = n_1 \cdot 10^{\frac{\log_{10} \frac{n_2}{n_1}}{24h} \cdot 12h} = n_1 \left(\frac{n_2}{n_1} \right)^{0.5} = \sqrt{n_1 n_2}$$

Quindi:

	n_1	n_2	indiv. = $\sqrt{n_1 n_2}$
Caso - -	$1.9 \cdot 10^5$	$4.75 \cdot 10^6$	$0.95 \cdot 10^6 \leftarrow \text{min}$
Caso - +	$1.9 \cdot 10^5$	$5.25 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$
Caso + -	$2.1 \cdot 10^5$	$4.75 \cdot 10^6$	$1 \cdot 10^6$
Caso + +	$2.1 \cdot 10^5$	$5.25 \cdot 10^6$	$1.05 \cdot 10^6 \leftarrow \text{max}$

$$\text{L'errore assoluto è } \frac{\text{max} - \text{min}}{2} = \frac{1.05 \cdot 10^6 - 0.95 \cdot 10^6}{2} = 0.05 \cdot 10^6$$

$$\boxed{\text{individui} = (1.00 \pm 0.05) \cdot 10^6}$$

Nota: i dati sono forniti con l'errore assoluto, per cui è ragionevole indicare il risultato nella medesima maniera.

Altro metodo

$$\begin{aligned}\text{individui} &= \sqrt{n_1 n_2} = \sqrt{(2.0 \pm 0.1) \cdot 10^5 (5.0 \pm 0.25) \cdot 10^6} \\ &= \sqrt{(2.0 \pm 5\%) \cdot 10^5 (5.0 \pm 5\%) \cdot 10^6} = \\ &= \sqrt{(10 \pm 10\%) 10^{11}} = \sqrt{(1 \pm 10\%) \cdot 10^{12}} \\ &= 10^6 \cdot \sqrt{1 \pm 10\%}\end{aligned}$$

Adesso ci sono due modi per valutare $\sqrt{1 \pm 10\%}$.
Uno è sfruttare la formula seguente (che però non abbiamo visto a lezione).

$$(x \pm \alpha\%)^k = x^k \pm k \cdot \alpha\%$$

Da cui $\sqrt{1 \pm 10\%} = (1 \pm 10\%)^{0.5} = 1^{0.5} \pm 0.5 \cdot 10\% = 1 \pm 5\%$.

L'altro modo è fare massimo e minimo, però ora ci sono solo due casi da considerare anziché quattro. Ad ogni modo

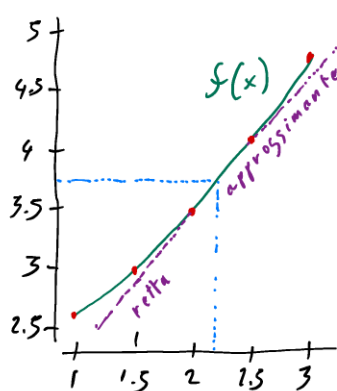
$$\boxed{\text{individui}} = 10^6 \cdot \sqrt{1 \pm 10\%} = (1 \pm 5\%) \cdot 10^6 = \boxed{(1.00 \pm 0.05) \cdot 10^6}$$

Tabella & interpolazione lineare

Può capitare che una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita, liscia, regolare, &c. ci sia data solo sotto forma di tabella. Per esempio

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.6	3.0	3.5	4.1	4.8

In questo caso come possiamo ottenere una stima dei valori non tabulati, ad esempio $f(2.2)$?



Facciamo finta che fra i due valori tabulati più vicini a quello che ci interessa, 2.2, la funzione sia lineare. Non lo è, ma non può discostarsi troppo, se la tabella è costruita bene. In questo caso i due valori sono 2.0 e 2.5. Se la funzione fosse lineare avremmo $f(2.0) = 3.5$, $f(2.5) = 4.1$, e, usando la formula della retta per due punti: $f(x) = 1.1 + x \cdot 1.2$. Sostituendo $f(2.2) = 3.76 \approx 3.7$.

(Nota. Se questo è il risultato del nostro calcolo scriveremo 3.7 con due cifre significative, perché la tabella è data con due cifre significative.

Se però si tratta di un passaggio intermedio con
verrà

mantenere 3.74, e approssimare alla fine.)

In definitiva, se vogliamo interpolare $f(x)$ con x fra x_0 e x_1 , e abbiamo i valori tabulati $f(x_0)=y_0$ e $f(x_1)=y_1$, allora:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

Facendo riferimento alla tabella precedente, sapendo $f(x)=3.1$, quanto vale x ? Dovremo interpolare fra $f(x_0)=3.0$ e $f(x_1)=3.5$.

Primo metodo: risolviamo $3.1 = (x - 1.5) \cdot \frac{3.5 - 3.0}{2.0 - 1.5} + 3.0$

$f(x)$ x_0 y_1 y_0 x_1 x_0

$3.1 = x + 1.5$ $x = 1.6$

Secondo metodo: usiamo la formula scambiando x e y .

$$x = (f(x) - y_0) \frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} + x_0$$

$$x = (3.1 - 3.0) \frac{2.0 - 1.5}{3.5 - 3.0} + 1.5 = 1.6$$

$f(x)$ y_0 x_1 x_0 y_1 y_0 x_0

Giustificazione della formula. Risolviamo il sistema di equazioni per calcolare l'equazione della retta passante per (x_0, y_0) e (x_1, y_1) .

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \Rightarrow b = y_0 - ax_0 \\ ax_1 + b = y_1 \Rightarrow ax_1 + y_0 - ax_0 = y_1 \Rightarrow a = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

$$b = y_0 - ax_0 = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0$$

$$f(x) = ax + b = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x + y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0 = (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

§ 1. 18

Raccolta di esercizi dalle note dell'a.a. 2013-20

ESERCIZIO B Esame del 23.V.2019

La quantità di batteri nella coltura X raddoppia ogni diciotto ore. La quantità di batteri nella coltura Y raddoppia ogni ventiquattro ore. Inizialmente, il numero di individui nella coltura X è un decimo di quello di Y.

B.1 – Dopo quanto tempo le due colture contengono il medesimo numero di individui? Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?

Indichiamo con $X(t)$ e $Y(t)$ rispettivamente il numero di individui nelle colture X e Y al tempo t . Dai dati del problema

$$\underline{X(t) = X_0 \cdot 2^{\frac{t}{18h}}} \quad \underline{Y(t) = Y_0 \cdot 2^{\frac{t}{24h}}} \quad \underline{X(0) = \frac{1}{10} Y(0)}$$

E, chiaramente $X(0) = X_0 \cdot 2^{\frac{0}{18h}} = X_0$, $Y(0) = \dots = Y_0$ quindi la terza equazione equivale a $X_0 = \frac{1}{10} Y_0$.

- Dopo quanto tempo le colture hanno il medesimo numero di individui? Vale a dire: per che

t_* si ha $X(t_*) = Y(t_*)$?

$$X(t_*) = Y(t_*) \Rightarrow X_0 \cdot 2^{\frac{t_*}{18h}} = Y_0 \cdot 2^{\frac{t_*}{24h}} \Rightarrow \frac{1}{10} \cancel{2^{\frac{t_*}{18h}}} = \cancel{2^{\frac{t_*}{24h}}} \cdot 10 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{10} = \frac{2^{\frac{t_*}{24h}}}{2^{\frac{t_*}{18h}}} \Rightarrow \frac{1}{10} = 2^{\frac{t_*}{24h} - \frac{t_*}{18h}} \Rightarrow \frac{1}{10} = 2^{\frac{-t_*}{72h}} \Rightarrow$$

$$\boxed{t_*} = -72 \cdot \log_2\left(\frac{1}{10}\right) h = \boxed{72 \cdot \log_2(10) h} = \frac{72 h}{\log_{10} 2} \boxed{\approx 240 h}$$

quello della domanda precedente

- Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?

Vale a dire: quanto vale $\frac{X(t_*)}{X(0)}$?

$$\boxed{\frac{X(t_*)}{X(0)}} = \frac{\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{t_*}{18h}}}{\cancel{X_0}} = 2^{\frac{72 \cdot \log_2(10) h}{18h}} = 2^{4 \log_2(10)} = \boxed{10^4}$$

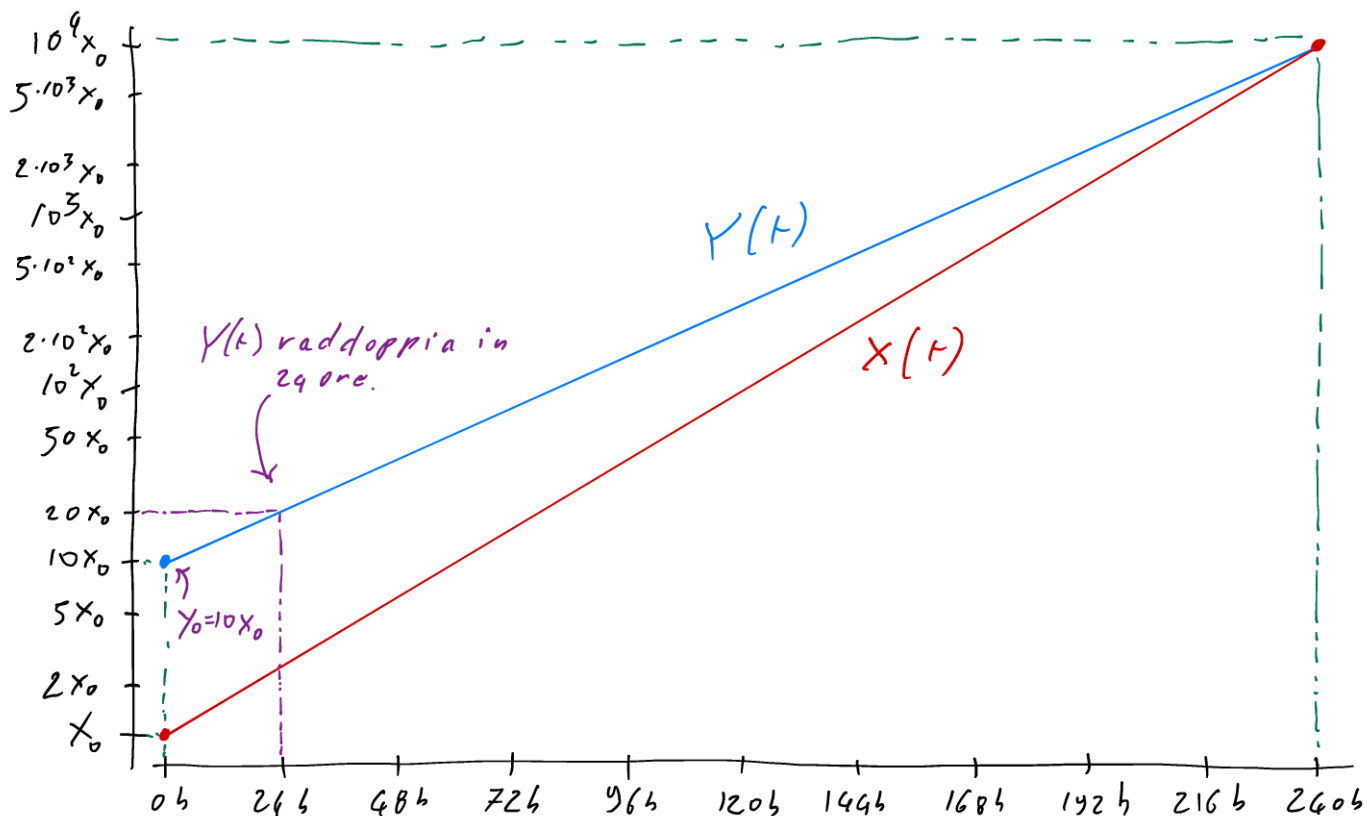
Altro modo

$$\boxed{\frac{X(t_*)}{X(0)}} \approx \frac{X(240 h)}{X(0)} = \frac{\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{240 h}{18h}}}{\cancel{X_0}} = 2^{13.33} \approx \boxed{10000}$$

B.2 - Traccia, scegliendo una rappresentazione grafica adeguata e motivando la tua scelta, l'andamento del numero di individui nelle due colture fra l'istante iniziale e il tempo calcolato al punto precedente.

Trattandosi di funzioni esponenziali, useremo un grafico semilogaritmico. Siccome sappiamo dalla teoria che il grafico di una funzione esponenziale, su un diagramma semilogaritmico, è una retta, basterà calcolare il punto all'inizio e alla fine di ciascun grafico. Bisogna, tuttavia, graduare gli assi. L'asse delle ascisse è semplicemente una scala lineare che va da 0 a t_* (240h, calcolato al punto precedente). Per quanto riguarda l'asse delle ordinate, $X(t)$ cresce da X_0 a $X(t_*) = 10^4 X_0$, mentre $Y(t)$ cresce da $Y_0 = 10 X_0$ a $Y(t_*) = X(t_*)$. Per cui conviene che la scala vada da X_0 a $10^4 X_0$. Se decidiamo, per esempio, che questa scala deve essere lunga 12 cm, possiamo calcolare la posizione dei valori intermedi mediante l'usuale proporzione. Per esempio, detta d la distanza fra X_0 e $10 X_0$ abbiamo

$$\begin{aligned} d : \underbrace{\log_{10}(10 X_0) - \log_{10}(X_0)}_{1 + \log_{10}(X_0)} &= 12 \text{ cm} : \underbrace{\log_{10}(10^4 X_0) - \log_{10}(X_0)}_{4 + \log_{10}(X_0)} \\ \underbrace{1}_{1} & \qquad \qquad \qquad \underbrace{4}_{4} \\ d : 1 &= 12 \text{ cm} : 4 \Rightarrow \underline{d = 3 \text{ cm}} \end{aligned}$$



Nota: la scelta di un grafico cartesiano sarebbe stata meno saggia. Proviamo...

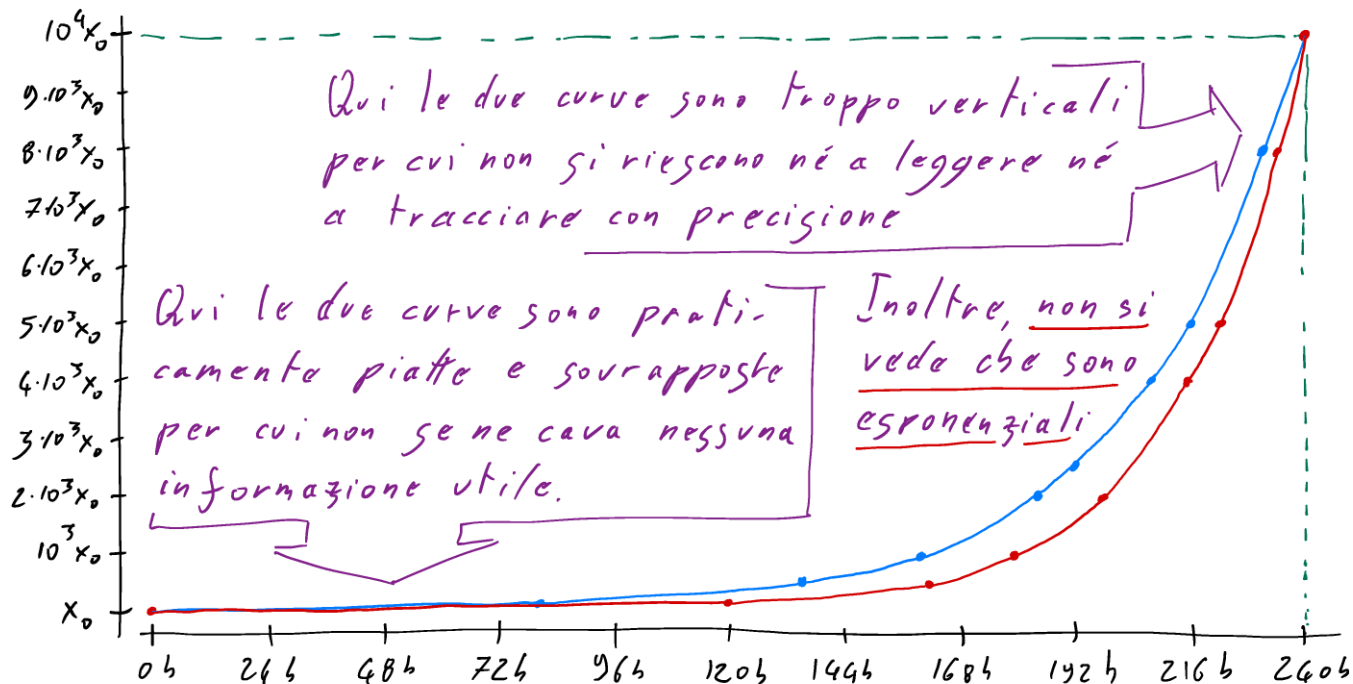


GRAFICO CARTESIANO: CATTIVA IDEA

- B.3** - Si è misurato che, al tempo $t = 0$, una terza coltura Z contiene $(1.5 \pm 0.1) 10^7$ individui. Al tempo $t = 10h \pm 20m$, la medesima coltura ne contiene $(2.5 \pm 0.2) 10^7$. Calcola quanto tempo impiega la coltura Z a raddoppiare, indicando l'errore relativo.

Detto $Z(t)$ il numero di individui in Z al tempo t , abbiamo che la forma generale di $Z(t)$ è $Z(t) = a \cdot 2^{\frac{t}{T}}$ dove T è il tempo cercato. Detti $z_0 = (1.5 \pm 0.1) 10^7$, $z_1 = (2.5 \pm 0.2) \cdot 10^7$, $t_1 = 10h \pm 20m$, dobbiamo trovare T (e, di conseguenza a) in modo tale che $Z(0) = z_0$ e $Z(t_1) = z_1$.

Facciamo il calcolo, innanzitutto, ignorando le incertezze.

$$\begin{aligned} Z(0) &= a \cdot 2^{\frac{0}{T}} \\ Z(t_1) &= a \cdot 2^{\frac{t_1}{T}} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot 2^{\frac{0}{T}} = 1.5 \cdot 10^7 \Rightarrow a = 1.5 \cdot 10^7 \\ a \cdot 2^{\frac{10h}{T}} = 2.5 \cdot 10^7 \Rightarrow 2^{\frac{10h}{T}} = \frac{2.5 \cdot 10^7}{1.5 \cdot 10^7} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{10h}{T} = \log_2 \frac{2.5}{1.5} \Rightarrow T = \frac{10h \cdot \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{2.5}{1.5}} \approx 13.57h$$

Nota strategica: a questo punto siamo a $\frac{5}{6}$ dell'esercizio. Non sarebbe saggio incaponirsi sull'ultimo sesto, che è il più difficile, se, per esempio ci manca ancora un intero esercizio degli altri nel compito...

Per stimare le incertezze, ci conviene, intanto, ripetere il calcolo di T in forma letterale.

$$\begin{cases} a \cdot 2^{\frac{0}{T}} = a_0 \Rightarrow a = a_0 \\ a \cdot 2^{\frac{t_1}{T}} = a_1 \Rightarrow 2^{\frac{t_1}{T}} = \frac{a_1}{a_0} \Rightarrow T = \frac{t_1}{\log_2 \frac{a_1}{a_0}} = \frac{t_1 \cdot \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{a_1}{a_0}} \end{cases}$$

Ora possiamo determinare il massimo e minimo valore di T al variare dei dati nei loro intervalli di incertezza, oppure anche sfruttare le regole di propagazione degli errori.

Con max e min, per rendere T massimo devo prendere il massimo del numeratore $t_1 \cdot \log_{10} 2$, quindi il massimo di t_1 , e il minimo del denominatore $\log_{10} \frac{a_1}{a_2}$, che, a sua volta, è assunto quando a_1 è minimo e a_2 massimo. Quindi:

$$T_{\max} = \frac{(10h + 20m) \cdot \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{(2.5 - 0.2) \cdot 10^7}{(1.5 + 0.1) \cdot 10^7}} \approx 19.74 \text{ h}$$

E, ragionando simmetricamente

$$T_{\min} = \frac{(10h - 20m) \cdot \log_{10} 2}{\log_{10} \frac{(2.5 + 0.2) \cdot 10^7}{(1.5 - 0.1) \cdot 10^7}} \approx 10.20 \text{ h}$$

Non è necessario fare questi ragionamenti, perché T_{max} e T_{min} si possono anche determinare facendo il calcolo in ciascuno degli 8 casi possibili.
Ad ogni modo

$$ERRORE\ ASSOLUTO = \frac{T_{max} - T_{min}}{2} = 4.776$$

Quindi:

$$T = (13.57 \pm 4.77)h = (13 \pm 35\%)h$$

ESERCIZIO A Esame del 19.II.2019

Un negativo fotografico (in bianco e nero) è costituito da un materiale parzialmente trasparente, la cui opacità dipende dall'esposizione alla luce che ha ricevuto prima dello sviluppo. La *trasmissione* di un negativo è definita come la frazione T , della luce incidente sul negativo, che lo attraversa. Per esempio, un negativo completamente opaco ha trasmissione 0, e uno completamente trasparente ha trasmissione 1. Un negativo che abbia trasmissione 0.1 lascia passare un decimo della luce che lo colpisce. La *densità ottica* D è definita in funzione della trasmissione dalla formula:

$$D = -\log_{10} T$$

La tabella seguente lega il logaritmo dell'esposizione H , che assumiamo indicata in lux-secondi ($lx \cdot s$), alla densità che ne risulta (per un certo tipo di pellicola).

$\log_{10} H$	D	$\log_{10} H$	D	$\log_{10} H$	D	$\log_{10} H$	D
-2.20	0.18	-1.30	0.54	-0.40	1.28	0.50	1.83
-1.90	0.25	-1.00	0.78	-0.10	1.55	0.80	1.85
-1.60	0.39	-0.70	1.03	0.20	1.73		

A.1 – Traccia un grafico cartesiano che riporti $\log_{10} H$ in ascissa e D in ordinata. Quale esposizione ha ricevuto un negativo che lascia passare il 5% della luce incidente?

Cominciamo dal calcolo dell'esposizione H .

Il dato del 5% ci dice che $T = 0.05$, quindi

$$D = -\log_{10} T \approx 1.3010 \quad (\text{alla fine esprimeremo il risultato})$$

con 2 o 3 cifre significative, perché questa è la precisione della tabella, quindi, nei passaggi intermedi usiamo qualche cifra in più).

Ora leggiamo dalla tabella

D	1.28	1.3010	1.55	← x
$\log_{10} H$	-0.40	?	-0.10	← y

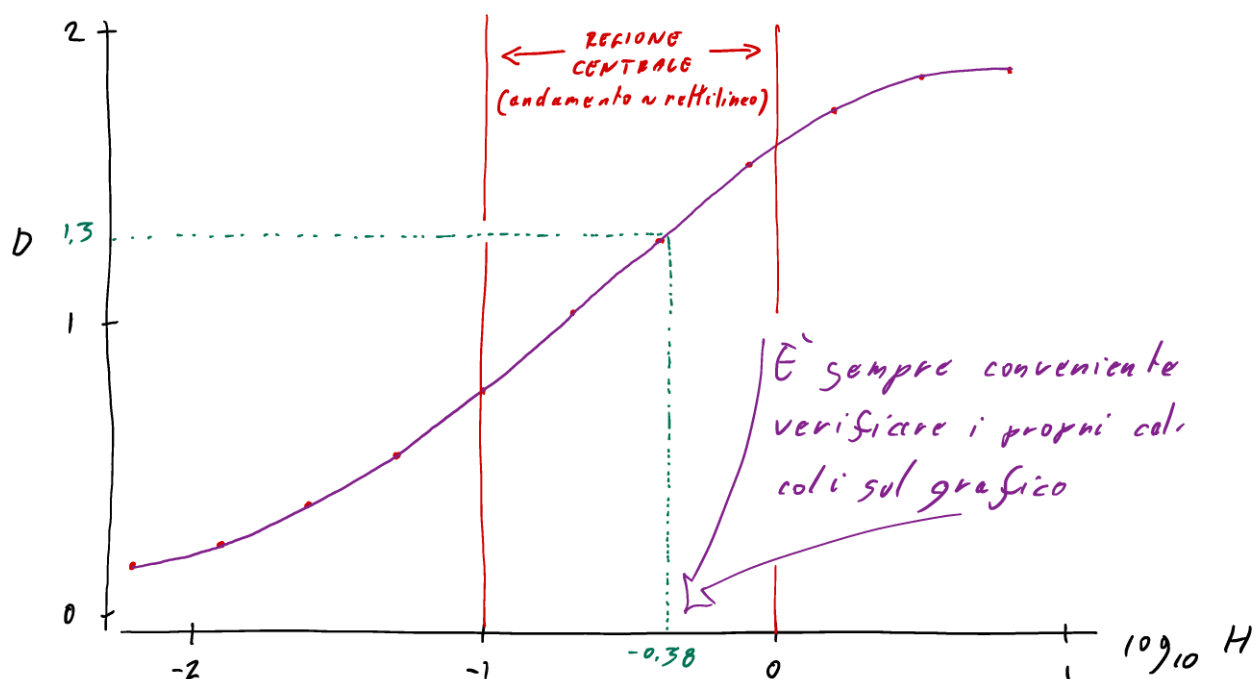
Usando l'interpolazione lineare con la prima riga come x e la seconda come y

$$\log_{10} H = (1.3010 - 1.28) \cdot \frac{-0.10 - (-0.40)}{1.55 - 1.28} + (-0.40) \approx -0.3767$$

Da cui $H = 10^{-0.3767} \approx 0.42$. Ricordandoci che i valori tabulati sono misurati in lxs abbiamo

$$H = 0.42 \text{ lxs}$$

Il grafico richiesto è come segue

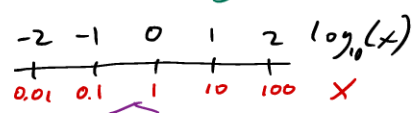


A.2 – Nella regione centrale del grafico, la legge che lega T ad H ha la forma:

$$T = \text{costante} \cdot H^{-\gamma}$$

Determina il valore di γ .

Abbiamo tracciato un grafico cartesiano usando come coordinate $T = -\log_{10} D$ e $\log_{10} H$. Questo stesso grafico, quindi, si può anche vedere come un grafico logaritmico che lega D e H .

Esempio: tracciamo una scala lineare che rappresenti $\log_{10}(x)$  indichiamo ora sotto la scala i valori di x corrispondenti. Come si può osservare abbiamo ottenuto una scala logaritmica in x .

Tutto questo per dire che il grafico di $T = \text{costante} \cdot H^{-\gamma}$, che è una funzione potenza, nelle variabili D e $\log_{10} H$ deve apparire rettilineo, quindi la "regione centrale" dell'esercizio deve riferirsi alla parte di curva indicata nel disegno, che approssima un segmento di retta. Per calcolare i parametri possiamo quindi usare, per esempio, i punti $\log_{10} H_1 = -1.00$, $D_1 = 0.28$ e $\log_{10} H_2 = -0.10$, $D_2 = 1.55$. Partendo dalla relazione data e calcolando il $\log_{10}$ a destra e a sinistra otteniamo

$$\log_{10} T = \log_{10} (\text{costante} \cdot H^{-\gamma})$$

$$-D = \log_{10} (\text{costante}) - \gamma \cdot \log_{10} H$$

Quindi $D = \underbrace{-\log_{10}(\text{costante})}_{\text{chiamiamo questo } c} + \gamma \cdot \log_{10} H$

Sostituendo i punti in questa relazione

$$\begin{cases} D_1 = c + \gamma \log_{10} H_1 \Rightarrow c = D_1 - \gamma \log_{10} H_1 \\ D_2 = c + \gamma \log_{10} H_2 \Rightarrow D_2 = D_1 - \gamma \log_{10} H_1 + \gamma \log_{10} H_2 \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma = \frac{D_2 - D_1}{\log_{10} H_2 - \log_{10} H_1}} = \frac{1.55 - 0.78}{-0.10 - (-1.00)} \approx \boxed{0.86}$$

A.3 – Supponendo di sapere la relazione $T = 0.025 \cdot H^{-0.6}$, se conosci H con un errore relativo del 10%, con quale errore relativo puoi calcolare T ? (Attenzione: la relazione data è puramente ipotetica: 0.6 non è la risposta al punto A.2.)

Supponiamo di conoscere H con una incertezza del 10%. Abbiamo quindi $H = H_0 \pm 10\%$, ossia, algebricamente

$$H_0 (1 - 0.1) \leq H \leq H_0 (1 + 0.1) \quad \text{"con alta probabilità..."}$$

Quindi

$$0.025 (H_0 \cdot 0.9)^{-0.6} \geq 0.025 H^{-0.6} = T \geq 0.025 (H_0 \cdot 1.1)^{-0.6}$$

attenzione: le disuguaglianze si invertono perché $-0.6 < 0$

$$\underbrace{0.025 H_0^{-0.6}}_{T_0} \cdot 0.9^{-0.6} \geq T \geq \underbrace{0.025 H_0^{-0.6}}_{T_0} \cdot 1.1^{-0.6}$$

E, in conclusione, detto $T_0 = 0.025 H_0^{-0.6}$, abbiamo

$$\boxed{T = T_0 \pm T_0 \cdot \frac{0.9^{-0.6} - 1.1^{-0.6}}{2}} = T_0 \pm \left(\frac{0.9^{-0.6} - 1.1^{-0.6}}{2} \cdot 100 \right) \% = \boxed{T_0 \pm 6\%}$$

Nota: se uno non riuscisse a svolgere il calcolo algebricamente, potrebbe anche tentare esperimenti numerici.

ESERCIZIO C

Considera la funzione $f: [0, 10] \rightarrow [0, 10]$ il cui grafico è rappresentato in figura.



- C.1** – Traccia il grafico della funzione $g(x) = \frac{x}{2} + \sqrt{f(x)}$ sul modulo millimetrato che ti è stato fornito. (Per rispondere a questa domanda basta il disegno: non è richiesto che descrivi il tuo procedimento.)

Per comodità, disegniamo la nuova funzione $g(x)$ sullo stesso diagramma di f .

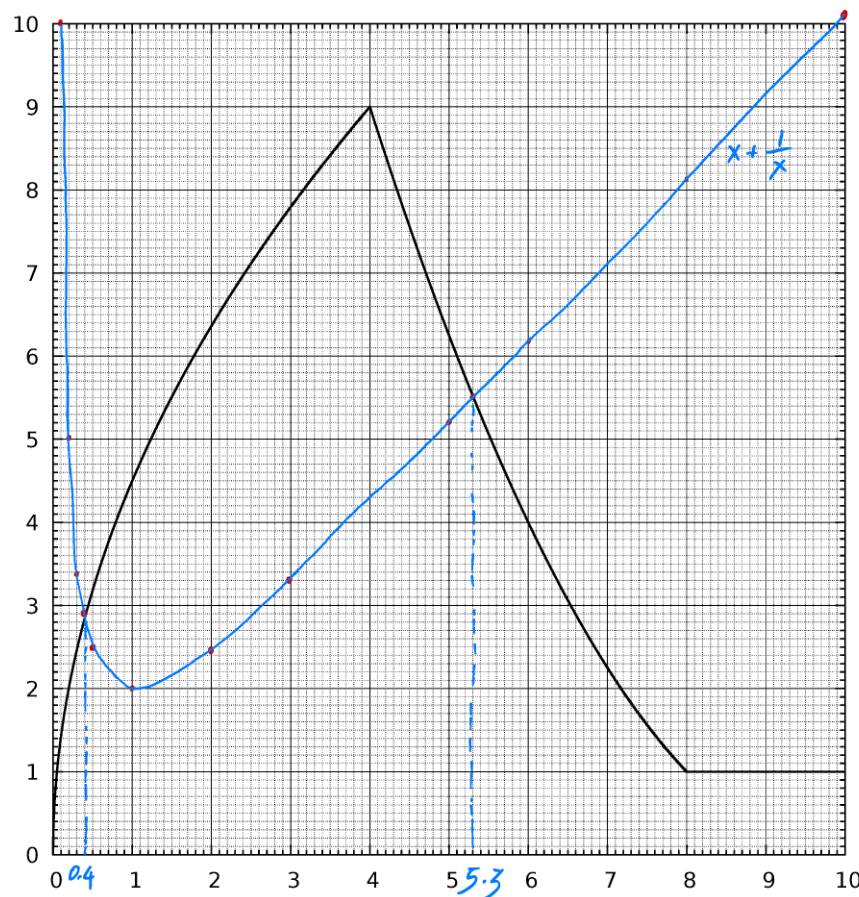
- C.2** – Trova tutte le soluzioni dell'equazione

$$f(x) - x - \frac{1}{x} = 0$$

nell'intervallo $[0, 10]$, approssimando alla prima cifra decimale.

Possiamo riscrivere l'equazione nella forma $f(x) = x + \frac{1}{x}$.
Le soluzioni sono, quindi, le ascisse dei punti di intersezione fra il grafico di $f(x)$ e quello di $x + \frac{1}{x}$.

Notiamo che ci sono due soluzioni in prossimità di $\boxed{0.4}$ e $\boxed{5.3}$.



Per verificare numericamente queste soluzioni, possiamo osservare che esse corrispondono a punti di cambiamento del segno di $f(x) - x - \frac{1}{x}$

x	$f(x)$	$x + \frac{1}{x}$	$f(x) - x - \frac{1}{x}$
0.3	2.4	3.6	-1.2
<u>0.4</u>	<u>2.8</u>	<u>2.9</u>	<u>-0.1</u>
0.5	3.2	2.5	0.7

5.2	5.7	5.4	0.3
<u>5.3</u>	<u>5.5</u>	<u>5.5</u>	<u>0</u>
5.4	5.3	5.6	-0.3

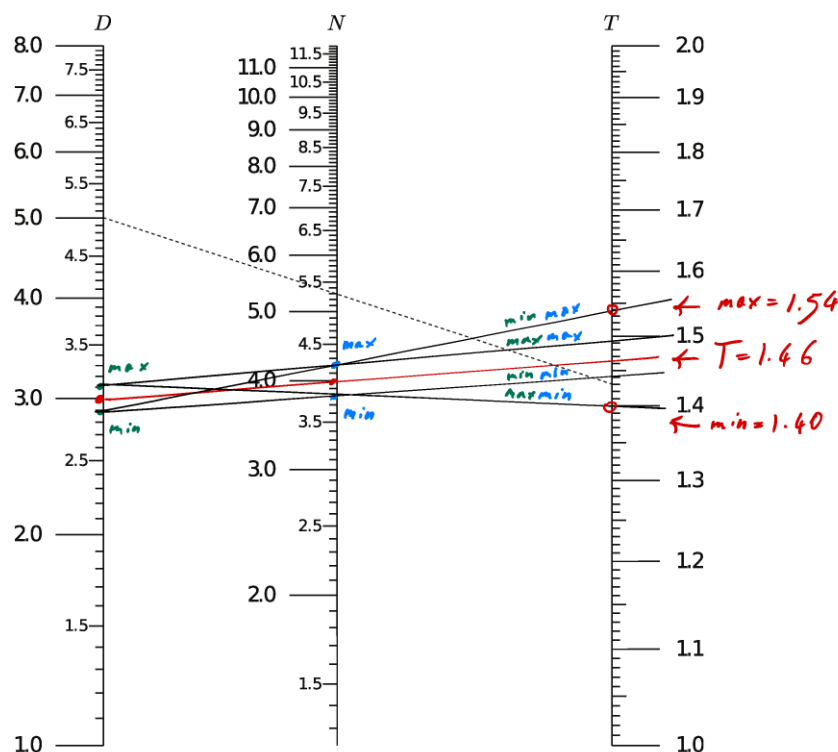
Matematica per CTF

Diciannovesima lezione

ESERCIZIO C

Esame del 2.v.2019

Un *nomogramma* è uno strumento di calcolo grafico che veniva usato durante il ventesimo secolo, e, sebbene raramente, si usa ancora oggi. Il nomogramma disegnato qua sotto rappresenta una relazione che lega tre quantità, D , N , e T . Si usa per calcolare una delle tre quantità, note le altre due. Per esempio, sapendo che $D = 5.0$ e $T = 1.43$, si traccia una linea retta (tratteggiata nella figura) che connette i punti corrispondenti sulle rispettive scale, e, l'intersezione di questa retta con la scala N indica il valore di questa quantità: $N = 5.3$.



C.1 – Supponendo di sapere che $D = 3.0 \pm 0.1$ e $N = 4.0 \pm 0.2$, che valore di T otteniamo, e con quale incertezza?

Questo è in larga misura un esercizio di *comprensione del testo* (quindi, detto per inciso, un esercizio uguale non capiterà più, però potrebbero capitare altri esercizi in cui è fondamentale capire una procedura descritta nel testo).

La procedura descritta, applicata ai dati della domanda, e ignorando, per ora, le incertezze, è come segue:

- segna il punto $D=3.0$ sulla scala D
- segna il punto $N=4.0$ sulla scala N
- la retta passante per questi due punti intersecherà la scala T ad un certo valore
- quello è il risultato cercato.

Questa procedura genera la retta **rossa** sul disegno, quindi $T=1.46$. Per stimare l'incertezza ripetiamo il procedimento usando gli estremi degli intervalli di incertezza

$$D = 3.0 \pm 0.1 \Rightarrow 2.9 \leq D \leq 3.1$$

$$N = 4.0 \pm 0.2 \Rightarrow 3.8 \leq N \leq 4.2$$

Questi estremi si possono combinare in quattro modi (minmin , minmax , maxmin , maxmax), dando luogo a quattro valori di cui il massimo è 1.54 e il minimo 1.40. Abbiamo allora un'incertezza pari a

$$\text{errore} = \frac{\text{max} - \text{min}}{2} = 0.07$$

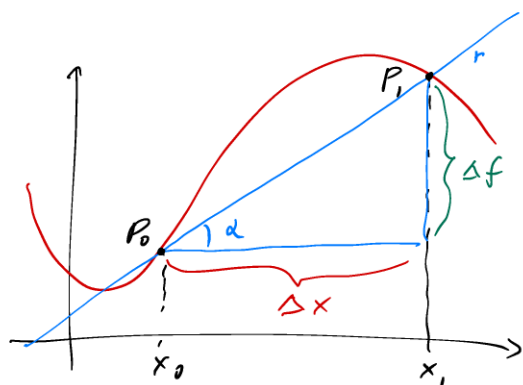
Quindi, in definitiva $T = 1.46 \pm 0.07$

Il rapporto incrementale

inizio l. 19

Data una funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, si chiama rapporto incrementale di f fra x_0 e x_1 , il numero

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \Delta f \\ \leftarrow \Delta x \end{array}$$



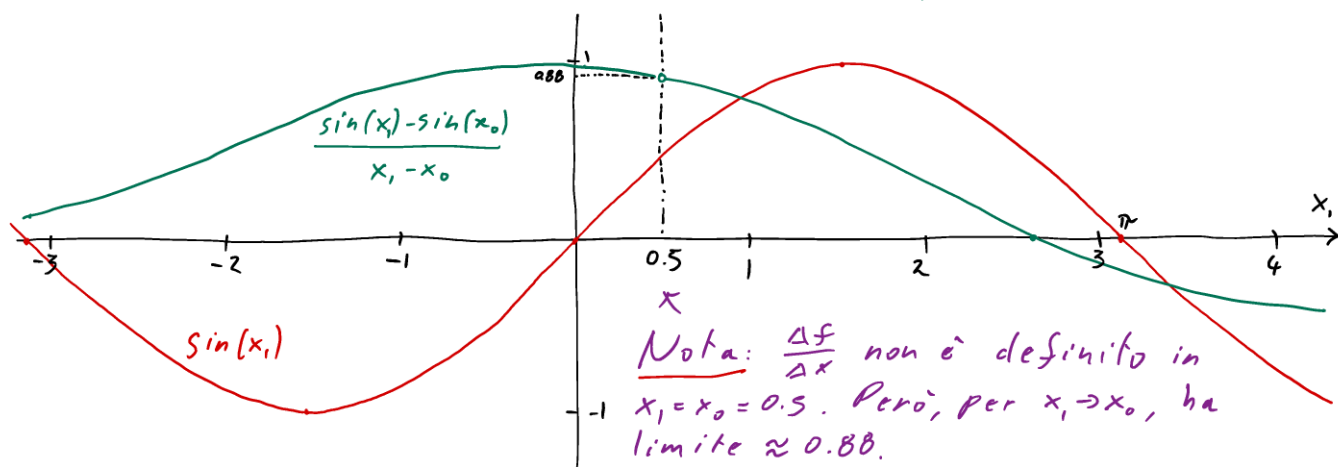
Questo numero può essere altresì descritto come il coefficiente angolare della retta passante per i punti

$P_0(x_0, f(x_0))$ e $P_1(x_1, f(x_1))$.

E, nel disegno (assumendo che le unità sui due assi siano di uguale lunghezza) $\tan \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Esempio. Tracciamo il grafico del rapporto incrementale della funzione $f(x) = \sin(x)$, per $x_0 = 0.5$ fissato, al variare di x_1 .

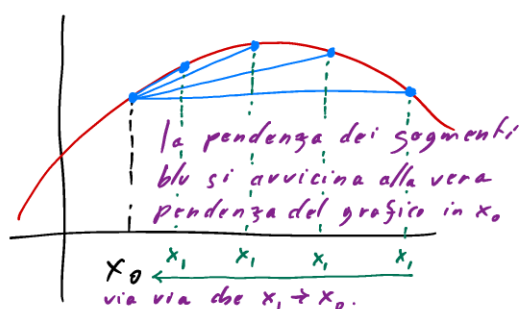
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x_1) - \sin(0.5)}{x_1 - 0.5}$$



Nota: $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ non è definito in $x_1 = x_0 = 0.5$. Però, per $x_1 \rightarrow x_0$, ha limite ≈ 0.88 .

Definizione di derivata

Via via che x_1 si avvicina a x_0 , il rapporto incrementale $\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$ rappresenta la pendenza di rette che approssimano il grafico di f sempre meglio nelle più immediate vicinanze di x_0 . Si definisce quindi la **derivata**



di $f(x)$ in x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

La derivata di f (che indichiamo

con f') può essere calcolata in ogni x_0 , quindi è una nuova funzione che associa a ogni x_0 il valore $f'(x_0)$. Geometricamente, questa funzione rappresenta la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0 . Operativamente, possiamo dedurre l'espressione di f' direttamente dalla espressione di f . Le regole sono alla pagina seguente.

Nota 1: le regole scritte in verde si possono dedurre a partire dalle altre regole: provateci per esercizio.

Nota 2: queste regole illustrano l'importanza del numero e (chiamato alle volte numero di Nepero, alle volte numero di Eulero). Infatti $(10^x)' = 10^x \log_e(10)$. Non è possibile calcolare le derivate di esponenziali e logaritmi in una base qualunque senza fare uso del logaritmo in base e .

Derivate delle funzioni elementari

$$(costante)' = 0 \quad (x^k)' = k x^{k-1} \quad (e^x)' = e^x \quad (\log_e(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad (a^x)' = a^x \log_e(a) \quad (\log_b(x))' = \frac{1}{x \cdot \log_e(b)}$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\tan(x))' = \frac{1}{(\cos(x))^2} = 1 + (\tan(x))^2$$

$$(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Regole di derivazione

$$(f+g)' = f' + g' \quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (f(g(x)))' = g'(x) f'(g(x))$$

$$(f-g)' = f' - g' \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)$$

Esempio di applicazione: $h(x) = \underbrace{\sin(x^2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}$ $h'(x) = ?$

applico $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

$$h'(x) = (\sin(x^2))' \cdot \cos(x) + \sin(x^2) \cdot (\cos(x))' =$$

applico $(f(g(x)))'$

con $f(y) = \sin(y) \Rightarrow f' = \cos(y)$
e $g(x) = x^2$

$$(\sin(x^2))' = (x^2)' \cdot \cos(x^2) = 2 \cdot x \cdot \cos(x^2)$$

uso $(x^k)' = k x^{k-1}$

$$\Rightarrow 2x \cos(x^2) \cos(x) - \sin(x^2) \sin(x)$$

$$\boxed{h'(x) = 2x \cos(x^2) \cos(x) - \sin(x^2) \sin(x)}$$

fine 1.17

Altri esempi di calcolo delle derivate

• $f(x) = (x+1)^2$ $h'(x) = 1$ $g'(y) = 2y$

due modi: 1. $f(x) = g(h(x))$ con $h(x) = x+1$ $g(y) = y^2$

$$\boxed{f'(x)} = h'(x) \cdot g'(h(x)) = 1 \cdot 2(x+1) = \boxed{2x+2}$$

2. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

$$\boxed{f'(x)} = \overset{2x}{(x^2)'} + \overset{2}{(2x)'} + \overset{0}{(1)'} = \boxed{2x+2}$$

• $f(x) = \sin(\sin(\sin(x)))$

Calcoliamo prima ^{$g(x)$} la derivata di $g(x) = \sin(\sin(x))$

$$g'(x) = \sin'(x) \cdot \sin'(\sin(x)) = \cos(x) \cdot \cos(\sin(x))$$

ora $f(x) = h(g(x))$ con $h(x) = \sin(x)$ quindi

$$\boxed{f'(x)} = g'(x) \cdot h'(g(x)) = \boxed{\cos(x) \cdot \cos(\sin(x)) \cdot \cos(\sin(\sin(x)))}$$

• $f(x) = \tan(x)$

Questa derivata è tabulata nello specchietto delle derivate di funzioni elementari. Calcoliamola, però, a partire dalla definizione $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

$$(\tan(x))' = \frac{(\sin(x))' \cdot \cos(x) - \sin(x) (\cos(x))'}{(\cos(x))^2} = \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2}$$

usando $\sin^2 + \cos^2 = 1$

$$= \boxed{\frac{1}{(\cos(x))^2}} \quad \text{oppure} \quad = \frac{(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} + \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = \boxed{1 + (\tan(x))^2}$$

• $f(x) = x^{x^2}$

Siccome non abbiamo una regola per gli elevamenti:

$$\boxed{\text{occhio: } x^{x^2} = x^{(x^2)} \neq (x^x)^2}$$

per esempio $3^{3^2} = 3^9$ $(3^3)^2 = 3^6$

a potenza di funzioni, adoperiamo i logaritmi per portare la funzione ad una forma più maneggevole

$$f(x) = x^{x^2} = (e^{\log_e(x)})^{x^2} = e^{x^2 \cdot \log_e(x)} = g(h(x))$$

$$\text{con } g(y) = e^y \text{ e } h(x) = x^2 \cdot \log_e(x)$$

$$h'(x) = (x^2)' \cdot \log_e(x) + x^2 \cdot (\log_e(x))' = 2x \log_e(x) + x \quad g'(y) = e^y$$

$$\boxed{f'(x)} = h'(x) \cdot g'(h(x)) = (2x \log_e(x) + x) \cdot e^{x^2 \cdot \log_e(x)}$$

$$= \boxed{(2 \log_e(x) + 1) \cdot x^{1+x^2}}$$

Esempi dagli esercizi per il test

71 • $f(x) = x(x-1)(x+1)$

$$= x(x^2 - 1) = x^3 - x$$

$$f'(x) = (x^3)' - (x)' = \boxed{3x^2 - 1}$$

72 • $f(x) = x^4 - \sin(x) + 10^x$

$$f'(x) = (x^4)' - (\sin(x))' + (10^x)'$$

$$= \boxed{4x^3 - \cos(x) + 10^x \log_e 10}$$

73 • $f(x) = \sin(2x) \cos(3x)$

$$f'(x) = (\sin(2x))' \cos(3x) + \sin(2x) (\cos(3x))'$$

$$= \boxed{2 \cos(2x) \cos(3x) - 3 \sin(2x) \sin(3x)}$$

74 • $f(x) = e^x \cos(x)$

$$f'(x) = (e^x)' \cos(x) + e^x (\cos(x))'$$

$$= e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = \boxed{e^x (\cos(x) - \sin(x))}$$

75 • $f(x) = e^{x \cos(x)}$

Questa è una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha} x \cdot \cos(x) \xrightarrow{\beta} e^{x \cdot \cos(x)}$$

$$\alpha: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cdot \cos(\mathbb{R})$$

$$\beta: \Delta \mapsto e^\Delta$$

$$f(x) = \beta(\alpha(x))$$

$$f'(x) = \beta'(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$$

$$\alpha'(x) = (x \cdot \cos(x))' = (x)' \cdot \cos(x) + x \cdot (\cos(x))' = \cos(x) - x \cdot \sin(x)$$

$$\beta'(\Delta) = (e^\Delta)' = e^\Delta$$

$$\boxed{f'(x) = e^{x \cdot \cos(x)} \cdot (\cos(x) - x \sin(x))}$$

76 • $f(x) = x^x = e^{x \log_e x}$

Nuovamente una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha} x \cdot \log_e x \xrightarrow{\beta} e^{x \cdot \log_e x}$$

$$\alpha: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cdot \log_e(\mathbb{R})$$

$$\beta: \Delta \mapsto e^\Delta$$

$$\alpha'(x) = (x)' \log_e x + x (\log_e x)' = \log_e(x) + 1$$

$$\beta'(\Delta) = e^\Delta$$

$$f'(x) = e^{x \log_e x} \cdot (1 + \log_e x) = \boxed{x^x [1 + \log_e x]}$$

77 • $f(x) = \tan(x) + \log_e(x)$

$$f'(x) = (\tan(x))' + (\log_e(x))'$$

$$= \boxed{\frac{1}{(\cos x)^2} + \frac{1}{x}}$$

78 • $f(x) = \sin(x^2) + \log_{10}(x)$

Studiamo separatamente i due addendi

$\sin(x^2)$ è una funzione composta

$$x \longrightarrow x^2 \longrightarrow \sin(x^2)$$

$$(\sin(x^2))' = \underbrace{\cos(x^2)}_{\sin'} \cdot \underbrace{2x}_{(x^2)'}$$

La derivata di $\log_{10}(x)$ è data da una formula mnemonica

$$(\log_b(x))' = \frac{1}{x \cdot \log_e b}$$

Però si può anche ricavare dalla formula di cambiamento di base

$$(\log_b(x))' = \left(\underbrace{\frac{\log_e x}{\log_e b}}_{(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x)} \right)' = \frac{1}{\log_e b} \cdot \underbrace{(\log_e x)'}_{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x \cdot \log_e b}$$

Mettendo le cose insieme

$$f'(x) = (\sin(x^2))' + (\log_{10}(x))' = 2x \cdot \cos(x^2) + \frac{1}{x \cdot \log_e 10}$$

Nota Nei testi si può trovare la formula per la derivata del logaritmo

$$(\log_b x)' = \frac{\log_b e}{x}$$

Questa formula, in realtà è equivalente alla nostra perché vale l'identità

$$\log_{\square} \Delta = \frac{1}{\log_{\Delta} \square}$$

Per renderci conto, a sua volta, di questa, applichiamo

la formula di cambiamento di base per scrivere $\log_{\square} \Delta$ usando la base Δ

$$\log_{\square} \Delta = \frac{\log_{\Delta} \Delta}{\log_{\Delta} \square} = \frac{1}{\log_{\Delta} \square}$$

79 • $f(x) = \log_x 2$

Purtroppo non abbiamo una formula per derivare rispetto alla base. Per uscirne dobbiamo quindi usare la formula di cambiamento di base

$$f(x) = \log_x 2 = \frac{\log_e 2}{\log_e x}$$

Abbiamo ora una funzione composta

$$x \xrightarrow[\alpha: \square \mapsto \log_e(\square)]{} \log_e x \xrightarrow[\beta: \Delta \mapsto \frac{\log_e \Delta}{\Delta}]{} \frac{\log_e 2}{\log_e x}$$

$$f'(x) = -\frac{\log_e 2}{(\log_e x)^2} \cdot \frac{1}{x} = \boxed{\frac{-\log_e 2}{x (\log_e x)^2}}$$

80 • $f(x) = \log_e (x^4)$

Metodo 1 (proprietà dei logaritmi)

$$f(x) = \log_e (x^4) = 4 \cdot \log_e (x) \Rightarrow f'(x) = 4 \cdot (\log_e x)' = \boxed{\frac{4}{x}}$$

Metodo 2 (funzione composta)

$$x \xrightarrow{} x^4 \xrightarrow{} \log_e (x^4)$$

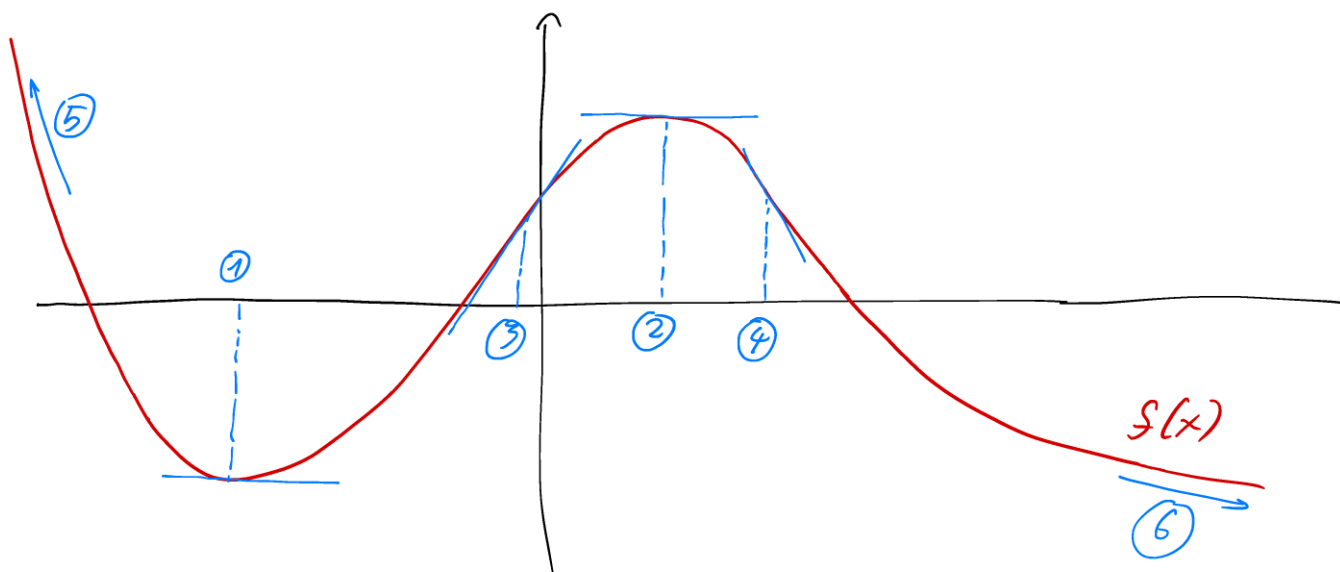
$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{(\log_e)'(x^4)} \cdot \underbrace{4x^3}_{(x^4)'} = \boxed{\frac{4}{x}}$$

Grafici e derivate

Siccome sappiamo che $f'(x_0)$ è la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0 (in un diagramma in cui ascisse e ordinate abbiano la stessa scala), possiamo farci un'idea qualitativa (ossia PRIVA DI ACCURATEZZA NUMERICA) del grafico di f' semplicemente osservando il grafico di f . Conviene tenere a mente questi principi:

- dove il grafico di f è orizzontale, $f' = 0$.
-  "  crescente, $f' > 0$.
-  "  decrescente, $f' < 0$.
- maggiore è l'inclinazione del grafico di f rispetto all'orizzontale, maggiore è $|f'|$.

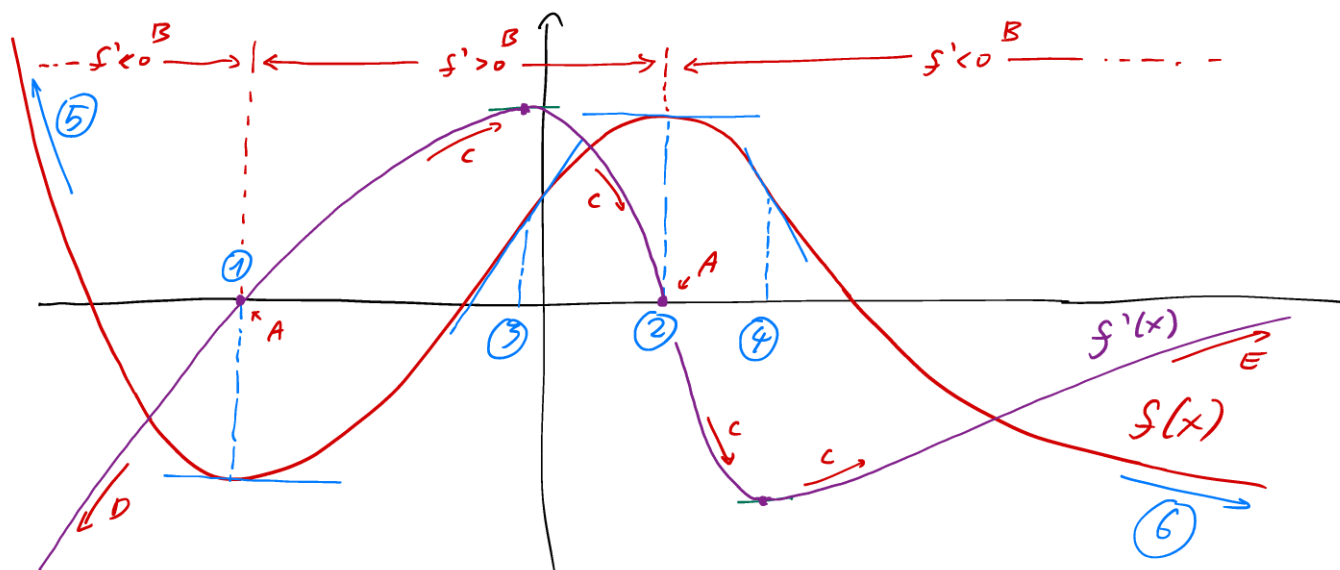
Esempio Tracciare un grafico qualitativo della derivata della funzione $f(x)$ il cui grafico è dato in figura.



Ragioniamo così:

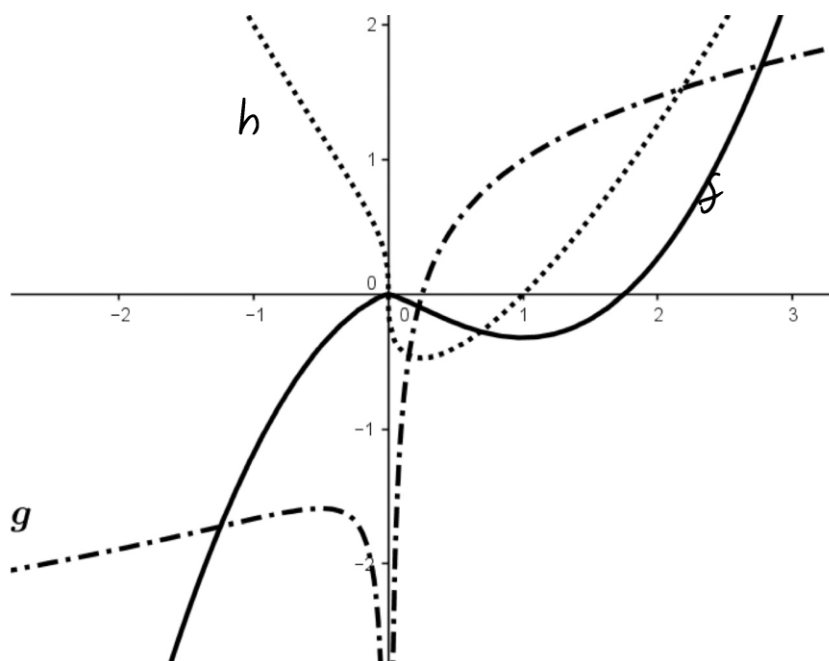
- A Nei punti ① e ② f è orizzontale, quindi $f' = 0$.
- B f decresce a sinistra di ①, cresce fra ① e ②, e decresce a destra di ②. Quindi $f' > 0$ fra ① e ②, e $f' < 0$ altrimenti.
- C I punti ③ e ④ sono punti di massima pendenza per f , detti anche punti di flesso, quindi
 - f' cresce a sinistra di ③
 - f' decresce fra ③ e ④
 - f' cresce a destra di ④.
- D In ⑤ f' pare assumere valori arbitrariamente negativi.
- E In ⑥ il grafico di f sembra essere sempre più orizzontale, quindi f' si avvicina allo zero.

Sfruttando queste considerazioni possiamo ottenere il grafico seguente.

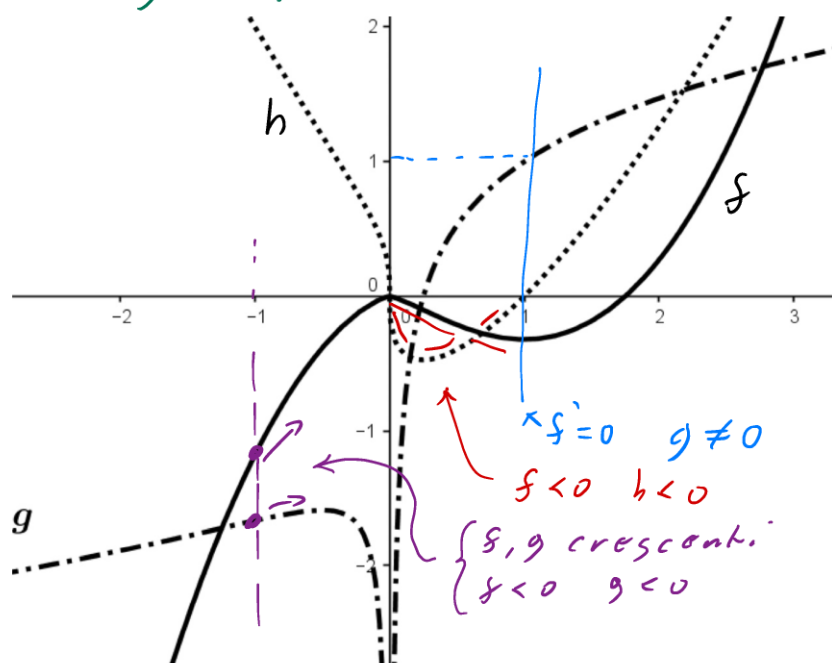


Esercizio (dal corso della prof. Baccaglioni-Frank)

Il grafico seguente rappresenta tre funzioni di cui una è la primitiva, una la derivata, e una la derivata seconda (derivata della derivata). Chi è chi?



Per risolvere l'esercizio consideriamo tre ipotesi:



1. f è la primitiva. Siccome intorno a $x=1$ il

grafico di f è orizzontale, in quei paraggi deve esserci un punto di annullamento di f' . Di certo, però, $g \neq 0$ (infatti, dal grafico $g(1) \approx 1$). In questo caso, l'unica possibilità è, quindi, $f' = h$, e, per esclusione, $h' = g$.

2. g è la primitiva. Vediamo bene che g è crescente nel semiasse positivo. Quindi la derivata dovrebbe essere positiva per $x > 0$. Però, fra 0 e 1 , sia f che h sono negative. Non c'è un candidato valido per la derivata, quindi **dobbiamo escludere questa ipotesi**.

3. h è la primitiva. In questo caso f e g dovrebbero essere una la derivata dell'altra (o f di g , oppure g di f). Però, intorno a $x = -1$, f e g sono entrambe crescenti ed entrambe negative, e questo non può essere, perché quella delle due che è la derivata, essendo derivata di una funzione crescente, dovrebbe essere positiva. Dobbiamo quindi **escludere questa ipotesi**.

In conclusione, deve essere vera l'unica ipotesi che non abbiamo escluso: f è la primitiva, h la derivata e g la derivata seconda.

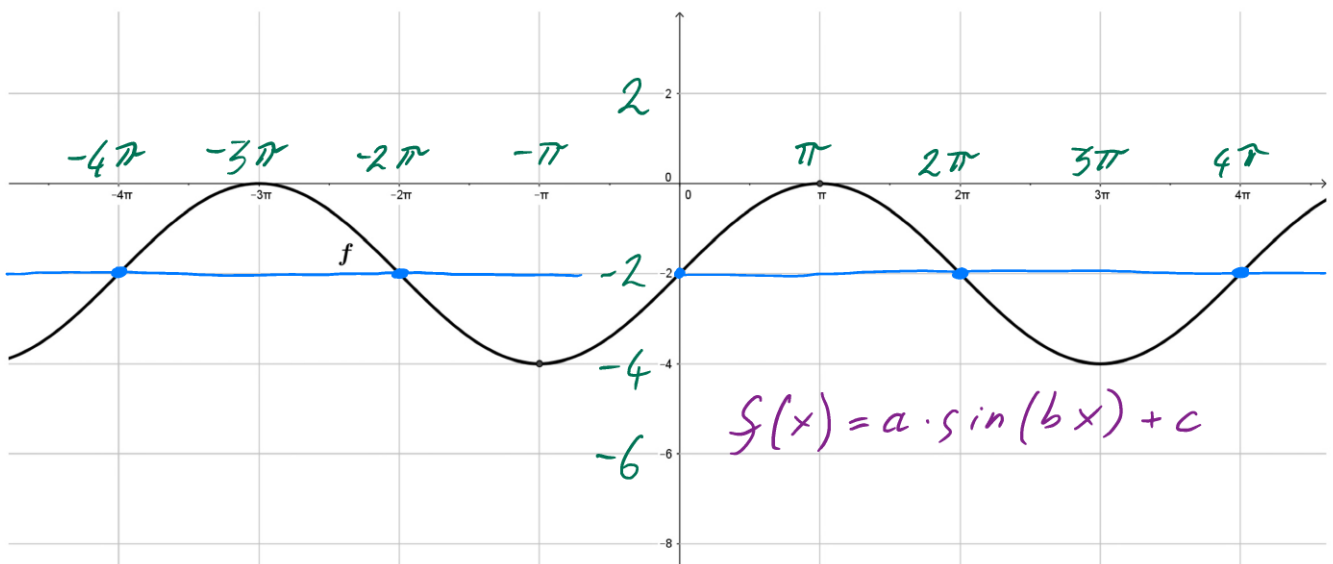
Nota metodologica

Quando ci viene richiesto di identificare il caso vero su una certa lista di casi possibili, non dobbiamo ragionare per conferma, ossia mostrare perché il caso vero è plausibile. Dobbiamo invece ragionare per esclusione, ossia mostrare argomenti incontrovertibili che escludono ciascuno degli altri casi.

Esercizio (un altro esercizio interessante dal corso della prof. Barzaglini-Frank. Non c'entra niente con le derivate)

Interpretare il disegno sottostante come grafico della funzione $f(x) = a \sin(bx) + c$

Trovare il valore dei tre parametri attraverso le informazioni che puoi desumere dal grafico.



Per cominciare notiamo che $f(0) = -2$, quindi

$$-2 = f(0) = \underbrace{a \sin(b \cdot 0)}_{= a \sin(0) = 0} + c = c \Rightarrow f(x) = a \sin(bx) - 2$$

Ora osserviamo che

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow a \cdot \sin(bx) = 0 \Leftrightarrow bx = k\pi \text{ per qualche } k \text{ intero}$$

$$\Leftrightarrow x = \dots -\frac{3}{b}\pi, -\frac{2}{b}\pi, -\frac{1}{b}\pi, \underline{0}, \underline{\frac{1}{b}\pi}, \frac{2}{b}\pi, \frac{3}{b}\pi, \dots$$

Dal grafico, però

$$f(x) = -2 \Leftrightarrow x = \dots -4\pi, -2\pi, \underline{0}, \underline{2\pi}, 4\pi, \dots$$

Queste due liste di numeri devono quindi coincidere, e, in particolare, $\frac{1}{b}\pi = 2\pi \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.

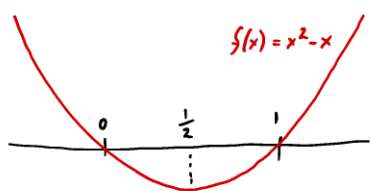
Siamo arrivati a $f(x) = a \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2$, per determinare a ci basta calcolare, per esempio

$$\underbrace{0 = f(\pi)}_{\text{dal grafico}} = a \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}_{=1} - 2 = a - 2 \Rightarrow a = 2$$

Quindi, in conclusione, $\boxed{f(x) = 2 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) - 2}$. fine l. 20

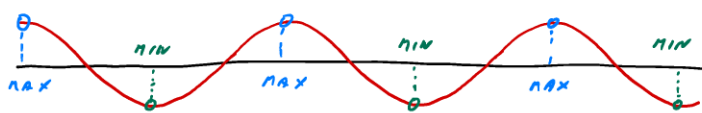
Massimi e minimi di funzioni

Data una funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ definita in un certo dominio D , diciamo che f ha un massimo nel punto $x_{\max} \in D$ se, per ogni $x \in D$, $f(x) \leq f(x_{\max})$ — in altre parole se f assume in $x_{\max}$ il massimo valore possibile fra gli $f(x)$ con $x \in D$. Diciamo che f ha un punto di minimo in $x_{\min} \in D$ se, per ogni $x \in D$, $f(x) \geq f(x_{\min})$ ossia se f assume in $x_{\min}$ il minimo valore possibile.



Per esempio, se $f(x) = x^2 - x$ e $D = \mathbb{R}$, il vertice $x_{\min} = \frac{1}{2}$ della parabola $y = x^2 - x$ è un punto di minimo di $f(x)$.

Nota: l'esempio della funzione seno evidenzia che



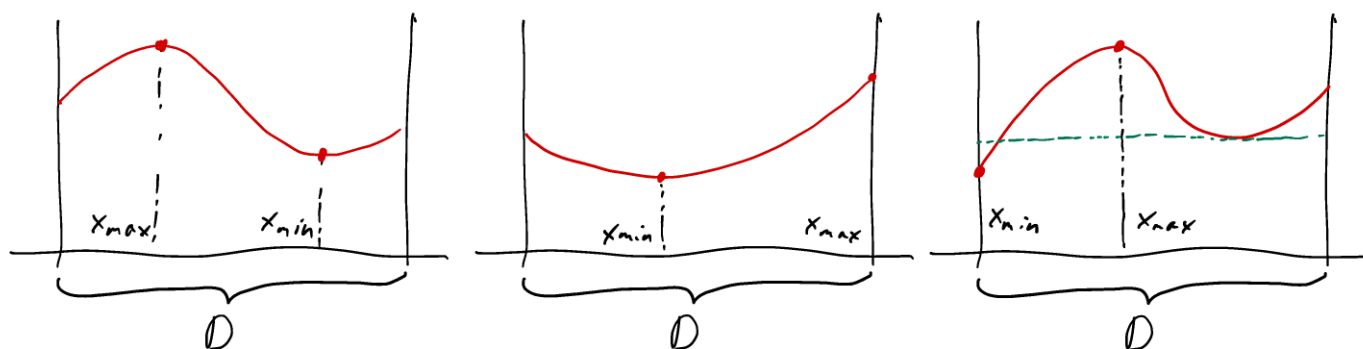
i punti di massimo e minimo non sono sempre unici.

In generale massimi e minimi possono non esistere: basta pensare alla funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



$f(x) = x$. Però se il dominio D è un intervallo chiuso $[a, b]$ e la funzione $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ è continua, allora f ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo in D .

Se abbiamo la derivata f' di f , allora possiamo cercare massimi e minimi di f sfruttando la seguente osservazione: che i punti di massimo o minimo di f si possono trovare solo dove il grafico di f è orizzontale ($f' = 0$) oppure agli estremi del dominio.



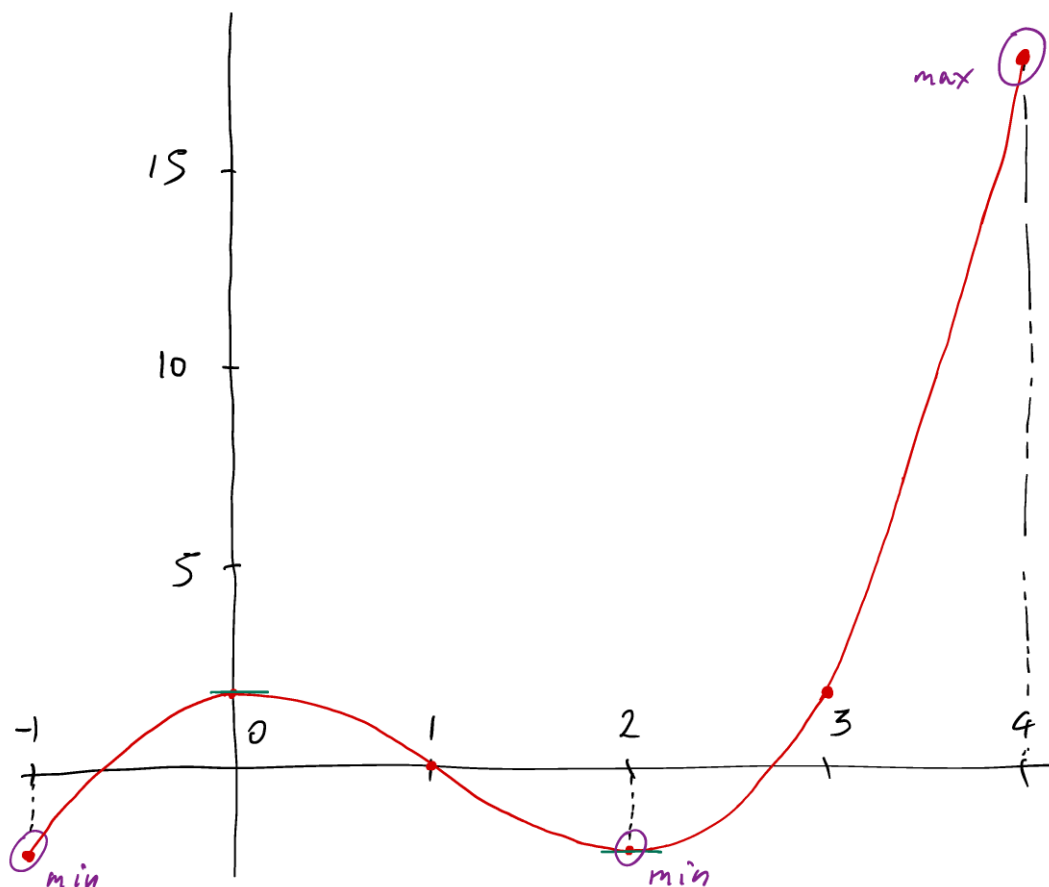
Massimi e minimi in un intervallo chiuso

Data una funzione derivabile $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, per trovarne massimi e minimi ^{questo è l'insieme degli x con $a \leq x \leq b$}

1. calcolo i punti stazionari (ossia risolvo $f'(x)=0$)
ottenendo, diciamo, le soluzioni $x_1 < x_2 < \dots < x_n$
2. calcolo $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_n)$, $f(b)$.
3. quelli fra i punti $a, x_1, x_2, \dots, x_n, b$ in cui f assume il valore più grande sono i punti di massimo, quelli in cui assume il più piccolo i punti di minimo.

Esempio trovare massimi e minimi di $f: [-1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$
con $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ e tracciare un grafico di f .

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$
2. $f(-1) = -2$, $f(0) = 2$, $f(2) = -2$, $f(4) = 18$
3. Il più grande di questi numeri, 18, è assunto da $f(x)$ in $x=4$, il più piccolo, -2, in $x=-1$ e $x=2$.



Quindi: $f(x)$ ha un punto di massimo in $x=4$;

$f(x)$ ha due punti di minimo in $x=-1$ e $x=2$;

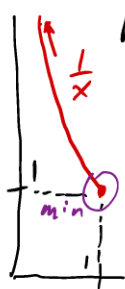
il massimo valore assunto da $f(x)$ è 18;

il minimo valore assunto da $f(x)$ è -2.

Massimi e minimi in generale

Se il dominio della funzione da massimizzare o minimizzare non è un intervallo chiuso (per esempio se è $]a, b[$ ossia l'insieme degli x strettamente compresi fra a e $b \rightarrow a < x < b \rightarrow$ oppure $]a, b]$ ossia gli x con $a < x \leq b$, oppure ancora una semiretta come $[a, +\infty[$ che denota tutti gli $x \geq a$) allora non necessariamente massimi e minimi esistono.

Per esempio la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x$ non ha né un massimo né un minimo. La funzione $f:]0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{x}$ ha un minimo in $x_{\min} = 1$, ma non ha un massimo perché assume valori arbitrariamente grandi all'avvicinarsi di x a 0. (Ci sono, poi, anche i cavilli burocratici come la funzione $f: [0, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = x^2$. Questa non ha massimo perché avrebbe tutte le carte in regola per assumere il valore massimo $f(x) = 1$ in $x = 1$, salvo il punto $x = 1$ non appartiene al dominio $[0, 1[$. Di questi casi



ci preoccupiamo il giusto.) Quando il dominio non è un intervallo chiuso possiamo ancora avvalerci degli zeri della derivata per trovare minimi e massimi, però la procedura si complica leggermente.

1. trovo i punti stazionari ($f'(x)=0$)
2. valuto f nei pt. stazionari e negli estremi del dominio (dove siano inclusi)
3. quelli fra i punti precedenti in cui $f(x)$ assume il massimo valore y_{max} sono candidati massimi quelli dove assume il minimo valore y_{min} sono candidati minimi.
4. per decidere se i candidati massimi siano effettivamente massimi occorre capire se $f(x)$ assume valori più grandi di y_{max} all'avvicinarsi di x agli estremi del dominio. Simmetricamente, per decidere se i candidati minimi siano minimi occorre controllare che $f(x)$ non scenda sotto y_{min} agli estremi del dominio.

Il punto 4 può essere più o meno complicato, e c'è più di un modo per affrontarlo: per esempio sfruttando il grafico di f , o studiando il segno della derivata, oppure ancora calcolando i limiti agli estremi.

Esempio Trovare massimi e minimi di $f:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

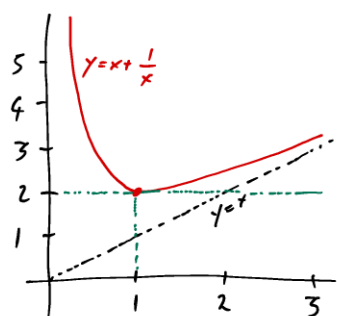
1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow x_1 = 1$ ($x_2 = -1 \notin]0, +\infty[$)

2. $f(x_1) = 2$ (non c'è altro, perché $]0, +\infty[$ non ha estremi)

3. x_1 è l'unico punto che abbiamo, quindi è sia un candidato massimo sia un candidato minimo.

4. usando il segno della derivata possiamo notare che $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ è negativa a sinistra di $x_1 = 1$, nulla in x_1 , e positiva a destra. $\begin{array}{c} f' < 0, f \searrow \\ \hline f' = 0 \\ \hline f' > 0, f \nearrow \end{array}$
Quindi f decresce a sinistra di 1, tocca il minimo in 1, e cresce dopo 1.

altro modo, studiando il grafico vediamo che sia



per x che si avvicina a 0, sia per x grande, il grafico di f resta sopra il valore $f(1) = 2$, quindi f ha un minimo in $x_{\min} = 1$.

Notazioni per le derivate

Abbiamo già visto che la scrittura $f'(x)$ denota la derivata di $f(x)$. La derivata della derivata, detta derivata seconda, si indica con $f''(x)$. Continuando a calcolare derivate successive si ottiene la derivata terza $f'''(x)$, e, più in generale, la derivata n-esima $f^{(n)}(x)$. Nelle

formule $y = f(x)$, $z = f'(x)$, etc. la x si chiama variabile indipendente. Quando è chiaro quale variabile sia la variabile indipendente, si può omettere di indicarla. Per esempio, anziché scrivere $y = f(x) = 3x^2$, $z = f'(x) = 6x$ possiamo abbreviare in $y = 3x^2$, $z = y' = 6x$. Attenzione che non sempre la variabile indipendente è x , per esempio, nella cinematica, x è tendenzialmente una variabile dipendente, mentre la variabile indipendente è il tempo t — potresti quindi incontrare $x = \sin(2t)$, $x' = 2 \cos(t)$.

Un modo di scrivere le derivate comodo, specialmente, quando sono in gioco diverse variabili è

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Questa notazione, che richiama il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (e non va confusa!) ha il vantaggio di indicare la variabile indipendente al denominatore. Inoltre, se, come capita nelle applicazioni, $f(x)$ e x hanno delle dimensioni fisiche (per esempio immaginiamo che x sia una lunghezza misurata in metri $[x] = m$, e che $f(x)$ sia un potenziale elettrico in volt $[f(x)] = V$) la notazione $f' = \frac{df}{dx}$ aiuta a ricordare le dimensioni della derivata. Nell'esempio $[f'] = \frac{[df]}{[dx]} = \frac{V}{m} = V \cdot m^{-1}$, ossia

una intensità di campo elettrico. Altri esempi tipici:

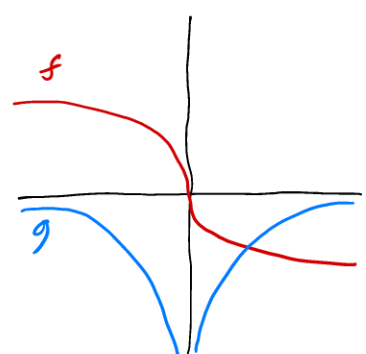
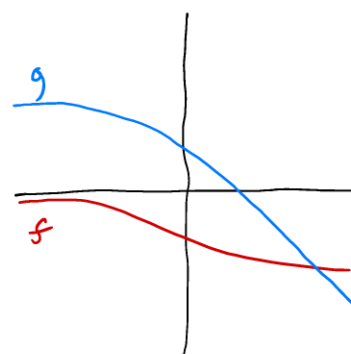
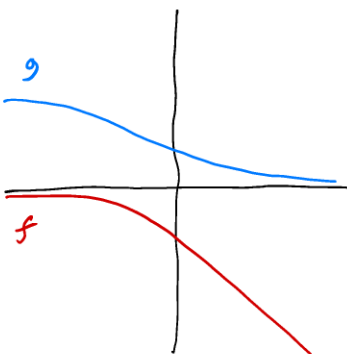
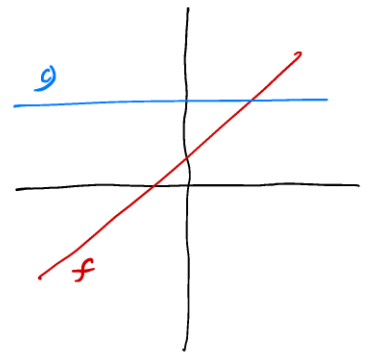
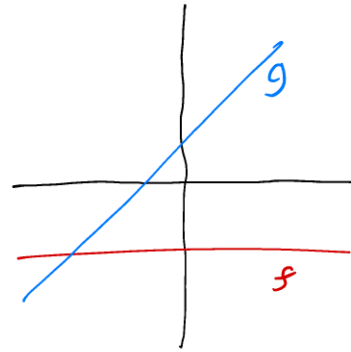
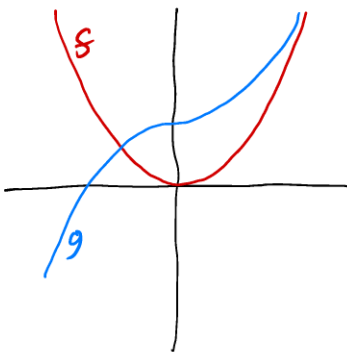
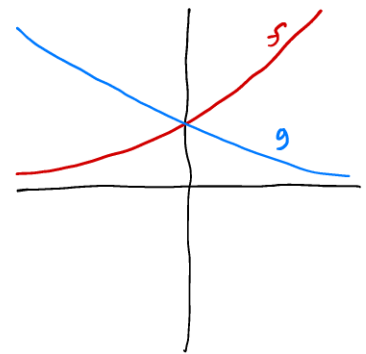
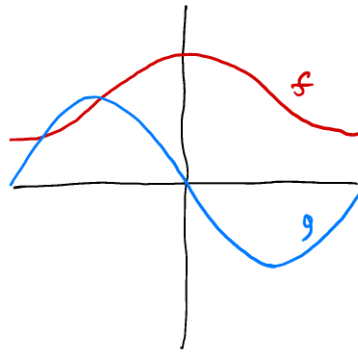
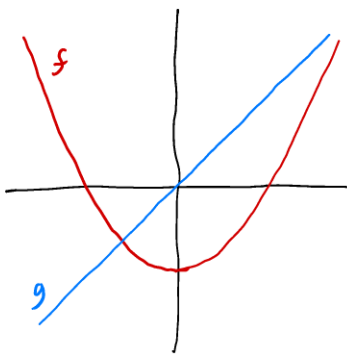
se $[x]=m$ e $[t]=s$, $[x']=m \cdot s^{-1}$, $[x'']=m \cdot s^{-2}$.

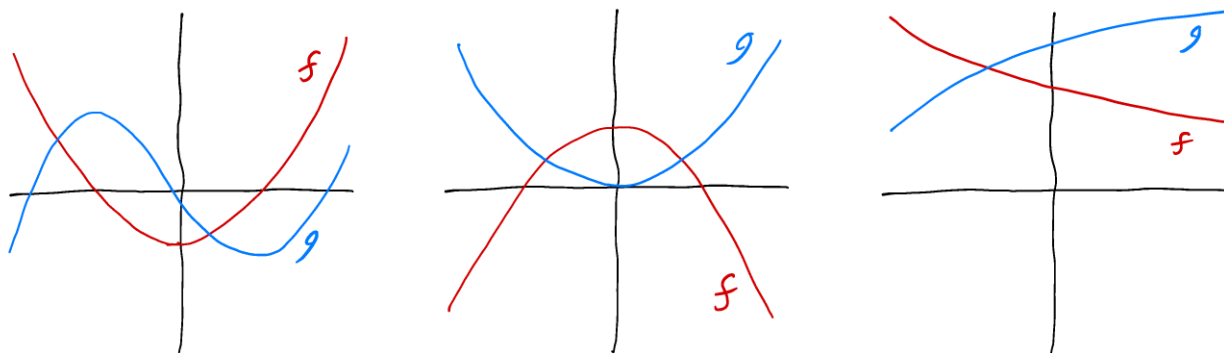
In questo sistema di notazione

la derivata seconda si indica con: $f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$.

Esercizi su grafici e derivate

(A) Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f è la derivata di g , o g quella di f , oppure non si da nessuno di questi due casi.





- (B) Traccia un grafico della funzione $f(x) = x^2 \cdot \log_e(|x|)$ e della sua derivata per x fra -2 e 2.
- (C) Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ tale che $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$ e $f(1) = 0$.
- (D) Traccia il grafico di $f(x) = (1+x)^2(1-x)^5$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -1 e 1, quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale.
- (E) Traccia il grafico di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -5 e 5, quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale, e in quali raggiunge la massima e la minima pendenza.

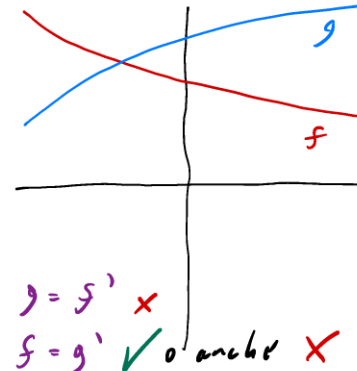
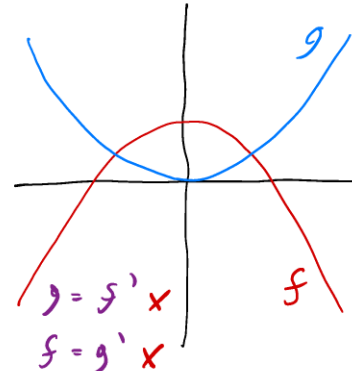
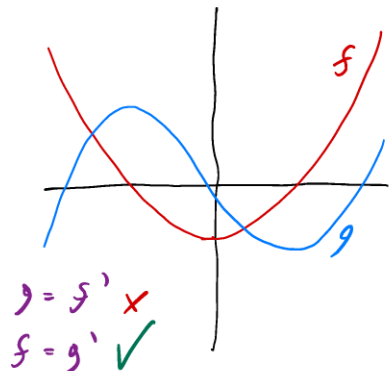
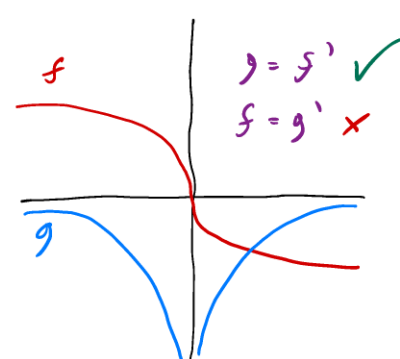
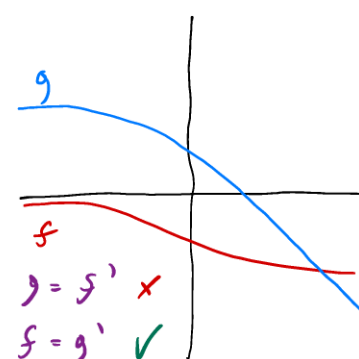
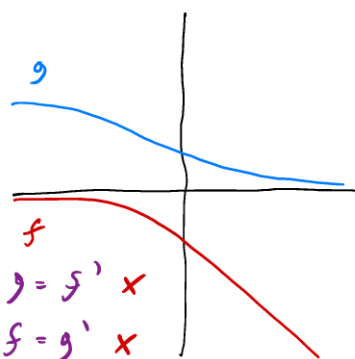
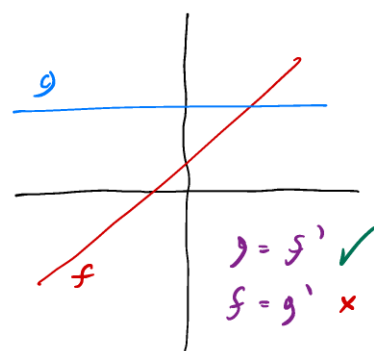
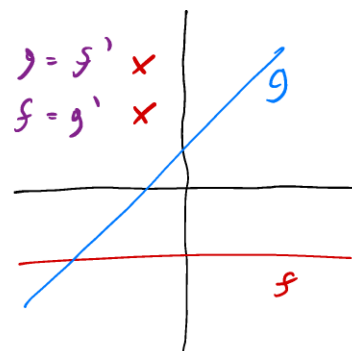
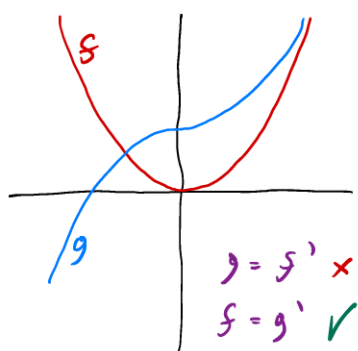
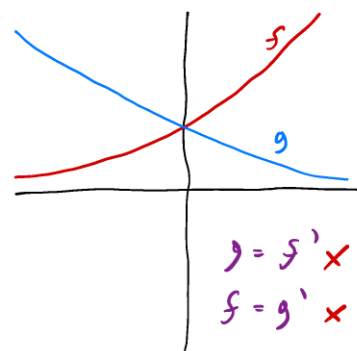
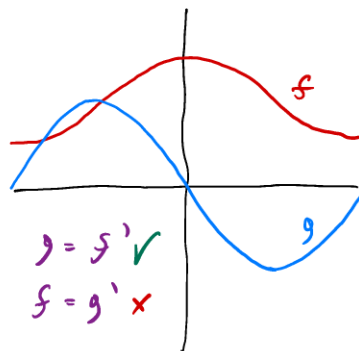
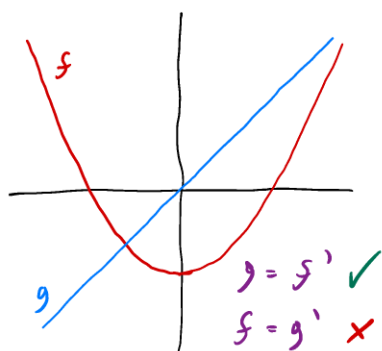
Dal file "Esercizi elementari di analisi matematica", prima parte

- (F) Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg . Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/l , calcola la capienza del fusto.
- (G) Dati i punti $A(-2, -1)$ e $B(0, -1)$, trova il punto $C(x, y)$ sulla retta $x+y=1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

fine l.21

Soluzioni degli esercizi (visti a lezione: A, C, F)

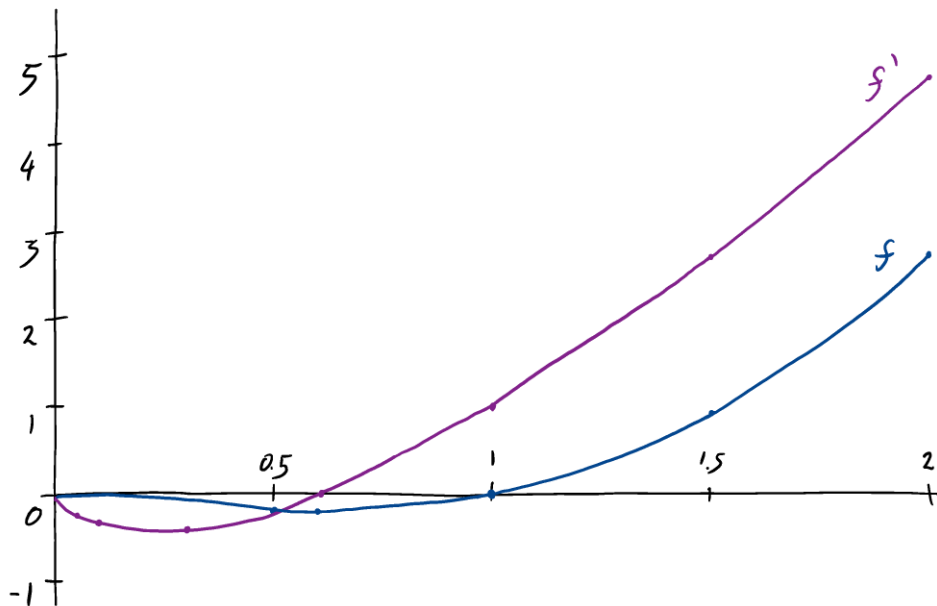
(A) Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f è la derivata di g , o g quella di f , oppure non si da nessuno di questi due casi.



③ Traccia un grafico della funzione $f(x) = x^2 \cdot \log_e(|x|)$ e della sua derivata per x fra -2 e 2.

Studiamo intanto la situazione per x positiva.

$$f(x) = x^2 \cdot \log_e(\underbrace{x}_{1 \times 1}) \quad f'(x) = 2x \log_e x + x = x(1 + 2 \log_e x)$$



Nota: non sempre il medesimo diagramma è appropriato sia per rappresentare una funzione sia per la sua derivata. Conviene, anzi, tenere a mente che spesso è necessario tracciare due grafici distinti, o usare due diverse scale per l'asse delle ordinate nel medesimo diagramma.

Per x negativa ricorriamo

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{(-x)^2} \log_e(\underbrace{-x}_{|x| = -x}) \quad f'(x) = x(1 + 2 \log_e(-x))$$

per $x < 0$

Ora possiamo completare il grafico avvalendoci di queste espressioni, oppure possiamo osservare le seguenti identità

$$f(-x) = f(x)$$

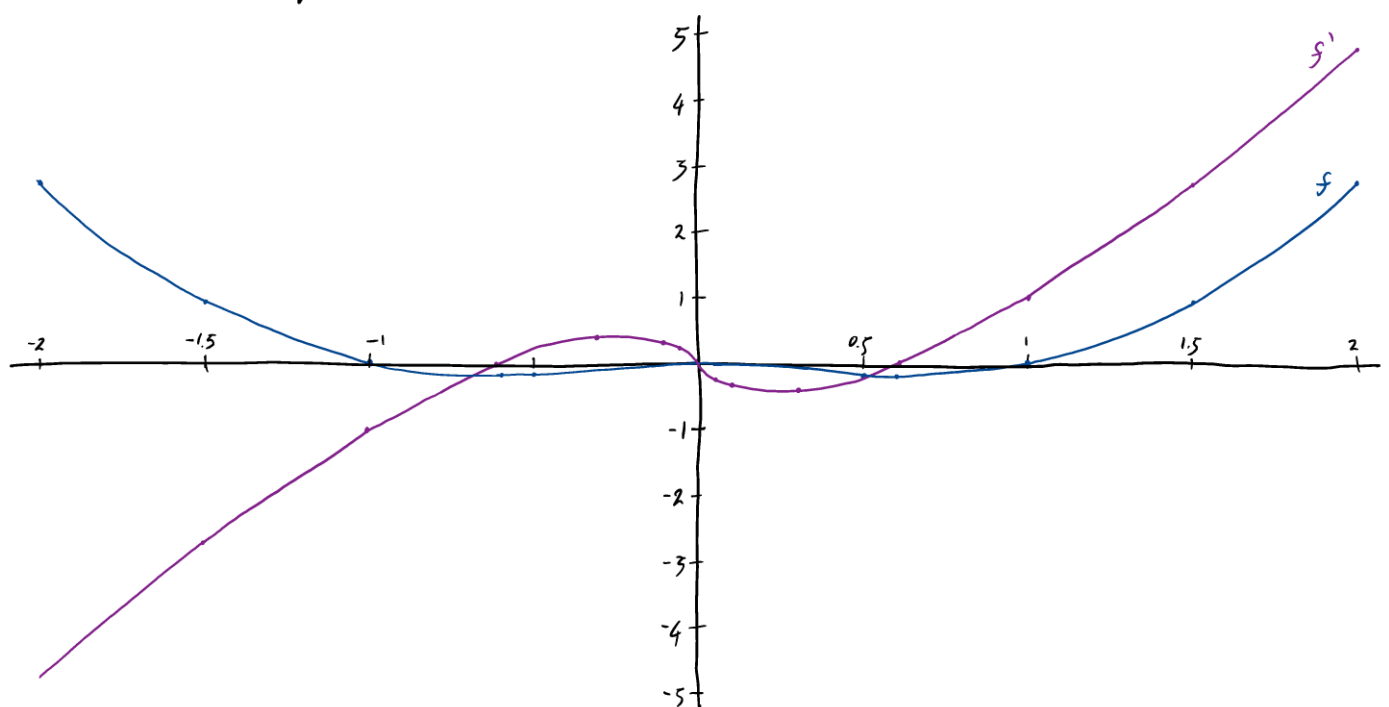
$$f'(-x) = -f'(x)$$

La prima si chiama *simmetria pari*, ci fornisce immediatamente un punto a sinistra dello 0 per ciascuno dei punti a destra che abbiamo già calcolato, ma, ancora meglio, ci dice tout court che il grafico di f è *simmetrico* — *speculare* — rispetto all'asse delle ordinate.

La seconda si chiama *simmetria dispari*, e ci dice che il grafico di f' è *simmetrico* rispetto a un centro di simmetria posto nell'origine.

Nota: capita sempre che:

- se una funzione ha *simmetria pari*, la sua derivata ha *simmetria dispari*
- se una funzione ha *simmetria dispari*, la sua derivata ha *simmetria pari*



(c) Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ tale che $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$ e $f(1) = 0$.

$$f(x) = a x^3 + b x^2 + c x + d \quad \leftarrow \text{generico polinomio di terzo grado}$$

$$f'(x) = 3a x^2 + 2b x + c$$

$$x^2 + \underbrace{3a x^3 + 2b x^2 + c x}_{x \cdot f'(x)} = \underbrace{3a x^3 + 3b x^2 + 3c x + 3d}_{3 f(x)}$$

$$\underbrace{(1-b)}_{=0} x^2 - \underbrace{2c}_{=0} x - \underbrace{3d}_{=0} = 0 \quad \leftarrow \text{questa equazione deve essere soddisfatta per qualunque valore della } x, \text{ di conseguenza i coefficienti sono tutti nulli}^*$$

$$\begin{aligned} 1-b &= 0 & c &= 0 & d &= 0 \\ b &= 1 \end{aligned}$$

Abbiamo quindi $f(x) = a x^3 + x^2$, però dobbiamo ancora sfruttare il dato $f(1) = 0$

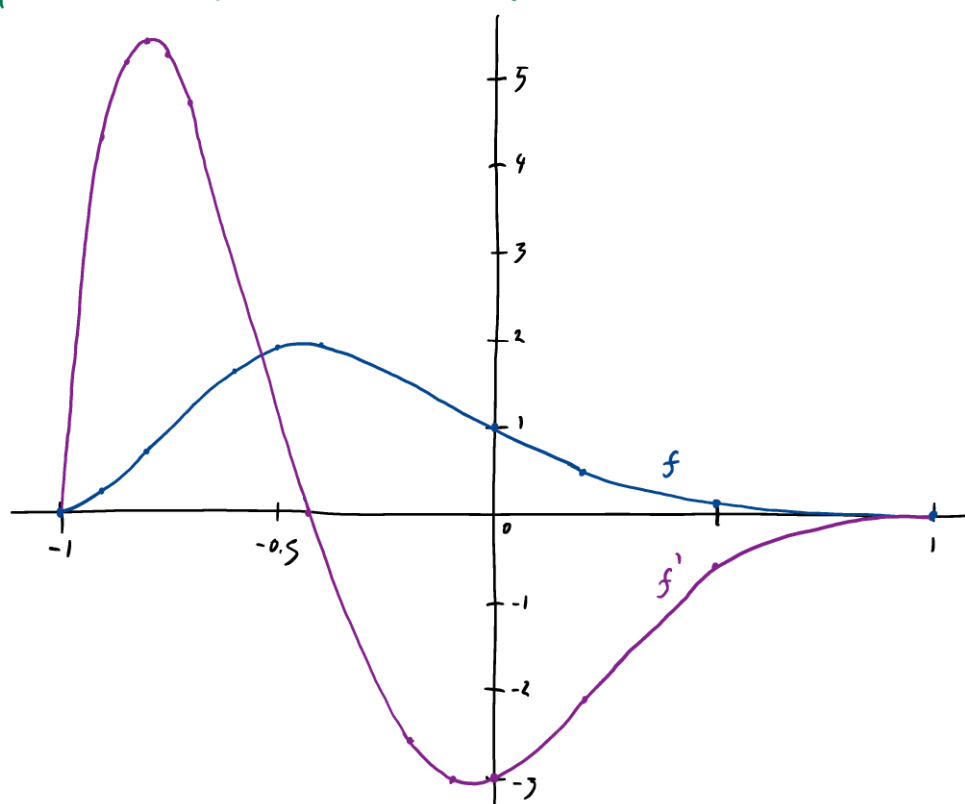
$$0 = f(1) = a + 1 \quad \Rightarrow \quad a = -1$$

In conclusione $f(x) = -x^3 + x^2$

* Se così non fosse, infatti, potremmo risolvere l'equazione, ed otterremmo alcuni specifici valori di x che la soddisfano, mentre tutti gli altri non la soddisfano. Noi vogliamo, però, che qualunque x soddisfi l'equazione, e questo è possibile solo se l'equazione non contiene la x affatto, ossia si riduce a $0=0$. Questa osservazione si chiama principio di identità dei polinomi.

(D) Traccia il grafico di $f(x) = (1+x)^2(1-x)^5$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -1 e 1 , quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale.

$$f'(x) = 2(1+x)(1-x)^5 - 5(1+x)^2(1-x)^4$$



I punti in cui il grafico è orizzontale sono i punti di annullamento della derivata — punti stazionari. Per risolvere l'equazione $f'(x) = 0$, conviene raccogliere il fattore $(1+x)(1-x)^4$ nell'espressione di f' :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1+x)(1-x)^5 - 5(1+x)^2(1-x)^4 \\ &= (1+x)(1-x)^4(2(1-x) - 5(1+x)) \\ &= \underline{(1+x)(1-x)^4} \underline{(-3-7x)} \end{aligned}$$

Quindi:

$$f'(x) = 0 \iff \underbrace{(1+x)}_{x=-1} \underbrace{(1-x)^4}_{x=1} \underbrace{(-3-7x)}_{x=-\frac{3}{7}} = 0 \iff \boxed{\begin{array}{l} x=-1 \text{ oppure } x=1 \\ \text{oppure } x=-\frac{3}{7} \end{array}}$$

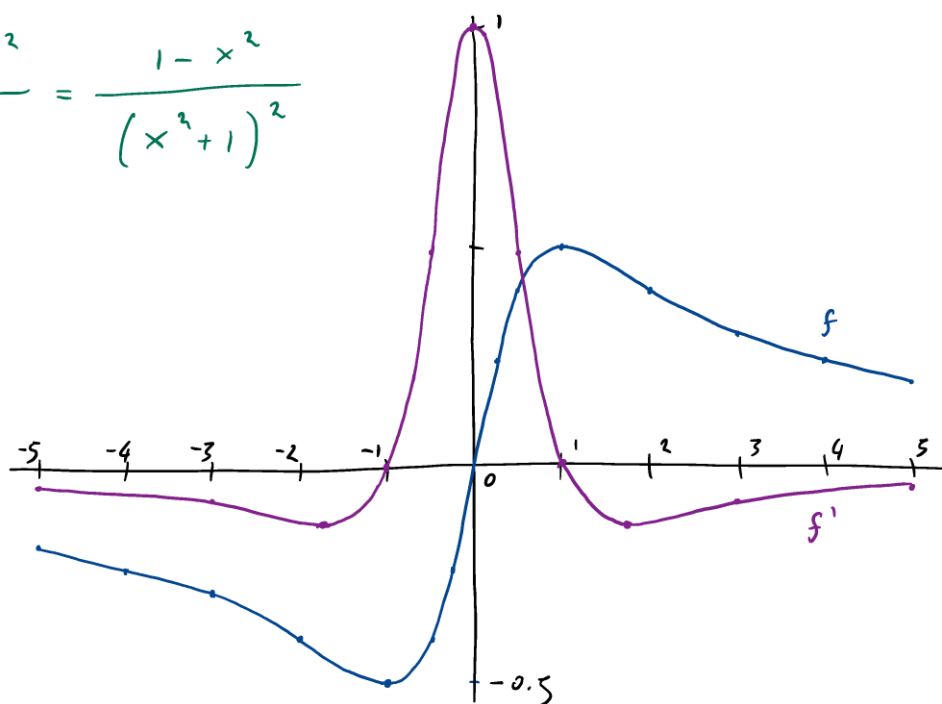
I punti in cui il grafico è orizzontale hanno quindi ascissa -1 , $-\frac{3}{7}$, e 1 .

Nota. Espandere il polinomio f' , anziché raccogliere, cioè scrivere $f'(x) = -7x^6 + 18x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 2x - 7$, e poi tentare di risolvere l'equazione è una cattiva idea.

Usando la regola di Ruffini si può fare, e chiaramente si ottengono le soluzioni corrette, ma i calcoli sono così tanti che è difficilissimo non commettere neanche una disattenzione. E ne basta una per cancellare il valore dell'intero procedimento.

⑤ Traccia il grafico di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -5 e 5 , quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale, e in quali raggiunge la massima e la minima pendenza.

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$$



Il grafico è orizzontale dove $f'(x) = 0$

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm 1}$$

I punti di massima e minima pendenza sono i massimi e minimi della derivata. Conviene quindi calcolare i punti in cui si annulla la derivata seconda.

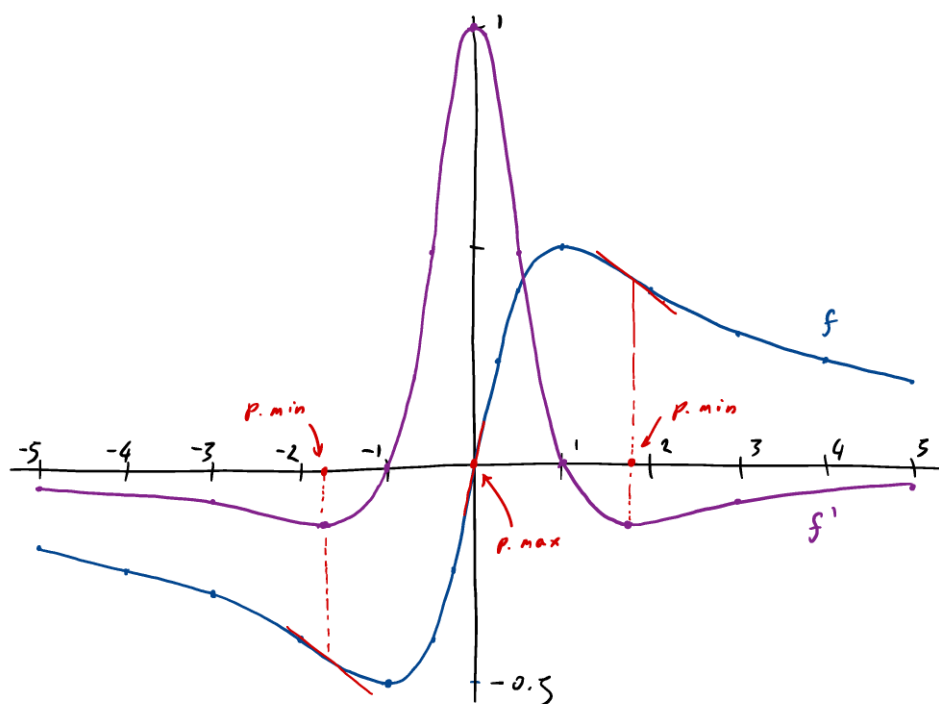
$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4(1-x^2)(x^2+1)x}{(x^2+1)^4} = \frac{x(x^2+1)(2x^2-6)}{(x^2+1)^4}$$

Come nell'esercizio precedente, conviene raccogliere il
 fattore comune $x(x^2+1)$. Le soluzioni dell'equazione $f''=0$
 sono 0 e $\pm\sqrt{3}$, quindi massimi e minimi di f' possono
 trovarsi nei punti seguenti:

x	-5	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	5
$f'(x)$	$-\frac{6}{13^2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{6}{13^2}$
		MIN	MAX	MIN	

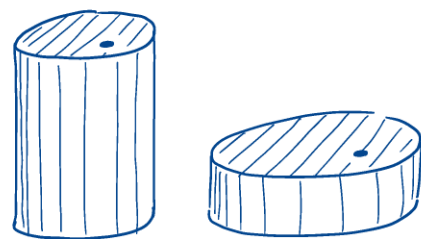
La massima pendenza di $f(x)$ si ha in $x=0$ (pendenza=1),
la minima in $x=-\sqrt{3}$ o $x=\sqrt{3}$ (pendenza $=-\frac{1}{8}$).

Nota: è utile verificare la correttezza dei calcoli usando il
 grafico



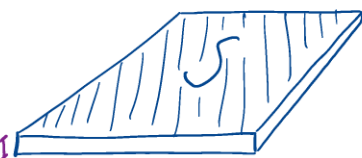
Ⓕ Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg . Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/L , calcola la capienza del fusto.

Le informazioni nel testo sono, verosimilmente, sufficienti a calcolare la quantità di lamiera di cui disponiamo per costruire il fusto. Tuttavia, usando la medesima quantità di lamiera, è possibile costruire fusti cilindrici di proporzioni differenti. Fra tutte le possibilità, l'esercizio ci chiede di identificare quella che produce il fusto più capiente.



Possiamo quantificare la lamiera a nostra disposizione con la misura S della sua superficie, che dovrà coincidere con la misura della superficie esterna del fusto. Per ricavare S dai dati dell'esercizio, consideriamo un foglio

di lamiera di superficie S come un parallelepipedo avente superficie di base S ed altezza 0.90 mm .



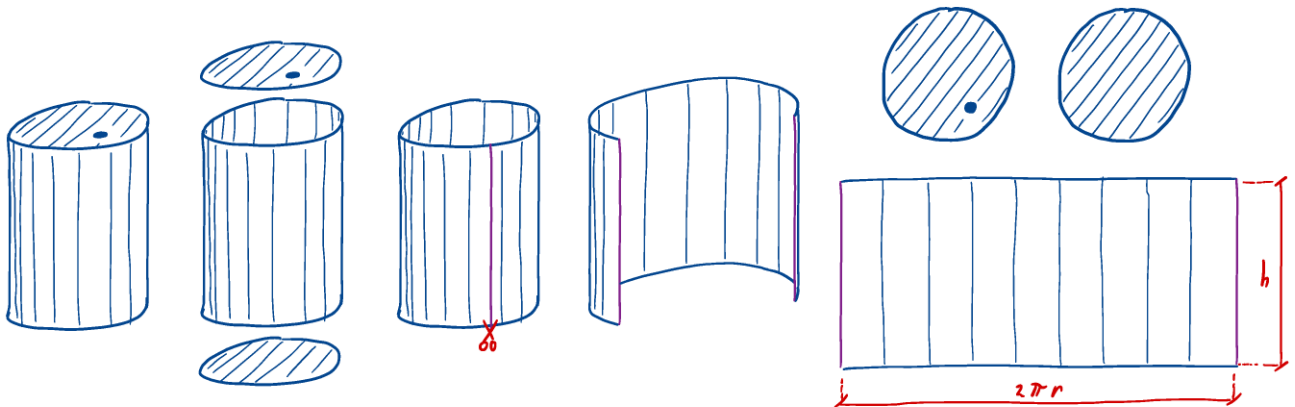
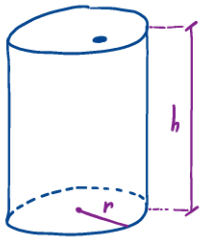
Il volume di acciaio in questo foglio di lamiera è $S \cdot 0.90 \text{ mm}$.

Questo volume peserà quindi $S \cdot 0.90 \text{ mm} \cdot 7.85 \text{ kg/L}$, e questo è il peso del fusto vuoto che deve valere 14 kg .

Abbiamo dunque l'equazione

$$S = 0.90 \text{ mm} \cdot 7.85 \frac{\text{kg}}{\text{L}} = 14 \text{ kg} \quad \Rightarrow \quad S = 1.5816 \text{ m}^2$$

Ora, indichiamo le misure del fusto per mezzo del raggio di base r e dell'altezza h . Il valore che, abbiamo calcolato, di S impone un vincolo che lega r ad h . Per esplicitare questo vincolo occorre calcolare la superficie del fusto in funzione di r e di h .



Questa superficie è costituita da due cerchi di raggio r e da un rettangolo $2\pi r$ per h :

$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{cerchi}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{rettangolo}} = 2\pi r(r+h)$$

Stante il vincolo su S , possiamo ora ricavare h in funzione di r o, viceversa, r in funzione di h . Siamo liberi di scegliere come procedere, quindi facciamo la scelta più comoda. Per ricavare r bisogna risolvere un'equazione di secondo grado, per ricavare h una di primo: quindi r sarà la nostra variabile indipendente

$$S = 2\pi r(r+h) \quad \Rightarrow \quad h = \frac{S}{2\pi r} - r$$

A noi interessa il massimo del volume, esprimiamo quindi il volume in funzione di r e h , quindi, tenuto conto del vincolo, solo di r

$$V = \underbrace{\pi r^2}_{\text{a. base}} \underbrace{h}_{\text{altezza}} = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right) = \frac{S}{2} r - \pi r^3$$

Per trovare il massimo calcoliamo la derivata di V rispetto a r

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

Questa derivata si annulla in $r=r_0=\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, è positiva per $0 < r < r_0$ e negativa per $r > r_0$, quindi V è una funzione crescente di r per $r < r_0$ e decrescente per $r > r_0$, che, di conseguenza, ha un massimo assoluto in $r=r_0$. Il volume corrispondente è

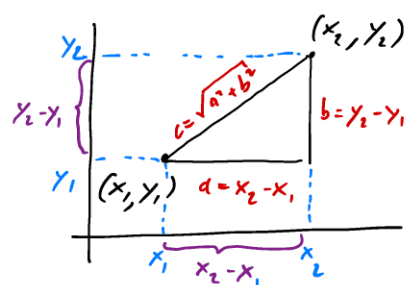
$$V_{\max} = \frac{S}{2} r_0 - \pi r_0^3 = \frac{S}{2} \sqrt{\frac{S}{6\pi}} - \pi \frac{S}{6\pi} \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = 0.214 \text{ m}^3$$

$= 214 \text{ l}$

⑥ Dato i punti $A(-2, -1)$ e $B(0, -1)$, trova il punto $C(x, y)$ sulla retta $x+y=1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

Cominciamo col ricordare la formula (dalla geometria analitica delle scuole medie superiori) per esprimere la distanza fra $P_1(x_1, y_1)$ e $P_2(x_2, y_2)$:

$$\text{distanza}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Ora, noi vogliamo trovare il punto C che minimizza il perimetro

$$\begin{aligned} \text{perimetro}(ABC) &= \underbrace{\text{distanza}(A, B)} + \underbrace{\text{distanza}(A, C)} + \underbrace{\text{distanza}(B, C)} = \\ &= 2 + \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2} \end{aligned}$$

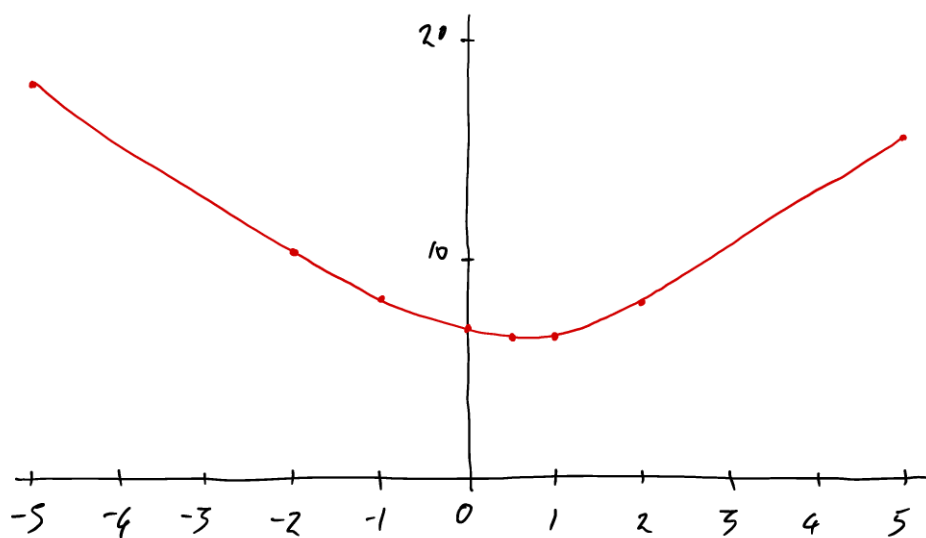
Questa quantità dipende dalle coordinate x e y di C , che, però sono legate fra di loro dalla richiesta che C appartenga alla retta $x+y=1$. Volendo applicare la teoria, che sappiamo, per trovare i minimi di una funzione in una variabile, converrà quindi che esplicitiamo la y in funzione di x , sostituendo $y=1-x$ nella formula.

$$\text{perimetro}(ABC) = 2 + \sqrt{(x+2)^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + (2-x)^2} =: f(x)$$

(chiamiamo il perimetro $f(x)$): stiamo cercando i minimi di questa funzione. Conviene fare le semplificazioni algebriche sotto le radici.

$$f(x) = 2 + \sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Avendo una funzione scritta esplicitamente, tracciarne un grafico non può essere l'idea peggiore. Nel nostro caso, siccome le ascisse dei punti dati sono -2 e 0, è ragionevole immaginare che troveremo il punto C in quei paraggi, per cui potremmo tracciare il grafico per x fra -5 e 5.



Alla luce del grafico ci aspettiamo che il perimetro sia minimo per qualche x fra 0 e 1, e che questo sia l'unico punto stazionario di f .

Proviamo ad indagare la situazione rigorosamente...

$$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 8}} + \frac{4x - 4}{2\sqrt{2x^2 - 4x + 4}}$$

Notiamo intanto che i denominatori non si possono annullare, quindi questa derivata è ben definita per qualunque valore della x . Cerchiamo i punti stazionari di $f(x)$.

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{4x}{2\sqrt{2x^2+8}} + \frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+4}} = 0$$

$$\frac{\cancel{4}x}{\cancel{2}\sqrt{2x^2+8}} = - \frac{\cancel{4}x-\cancel{4}^1}{\cancel{2}\sqrt{2x^2-4x+4}}$$

$$x\sqrt{2x^2-4x+4} = -(x-1)\sqrt{2x^2+8}$$

Ora eleviamo al quadrato ambo i membri. Questo passaggio potrebbe introdurre delle soluzioni spurie — perché elevando al quadrato cose diverse, alle volte, diventano uguali: $-2 \neq 2$ ma $(-2)^2 = 2^2$ —, però noi non ce ne curiamo. Alla fine, separeremo il grano dal loglio controllando quali delle soluzioni trovate soddisfanno l'equazione originale.

$$x^2(2x^2-4x+4) = (x-1)^2(2x^2+8)$$

$$\cancel{2}x^4 - \cancel{4}x^3 + 4x^2 = \cancel{2}x^4 - \cancel{4}x^3 + 10x^2 - 16x + 8$$

$$6x^2 - 16x + 8 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ \frac{2}{3} \end{cases}$$

Facciamo la verifica

$$f'(2) = 1 + 1 = 2 \quad \times \text{ soluzione spuria}$$

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0 \quad \checkmark \text{ punto stazionario}$$

La funzione f ha quindi il solo punto stazionario $x = \frac{2}{3}$, che ovviamente è il minimo cercato, per cui C è $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Per averne una verifica completamente formale notiamo che il segno della derivata è negativo prima di $\frac{2}{3}$ e positivo dopo.

Questo si verifica facilmente perché, siccome $\frac{2}{3}$ è il solo punto di annullamento, basta controllare il segno in un punto arbitrario prima ed in un punto arbitrario dopo.

Abbiamo già visto che $f'(2) = 2 > 0$. Per il prima $f'(0) = -1 < 0$. Questi segni della derivata implicano che $f(x)$ è decrescente prima di $\frac{2}{3}$ e crescente dopo, quindi assume in $\frac{2}{3}$ il valore minimo.

fine L. 22

Esercizio Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $x^3 - x + k = 0$ ha una soluzione positiva?

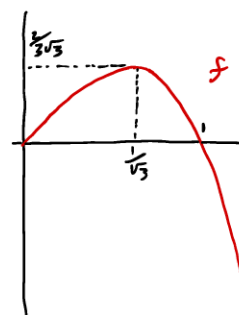
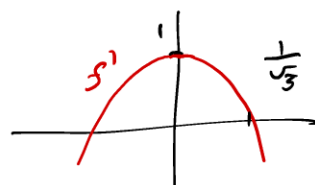
Soluzione: riscriviamo l'equazione nella forma

$$\underbrace{-x^3 + x}_{f(x)} = k$$

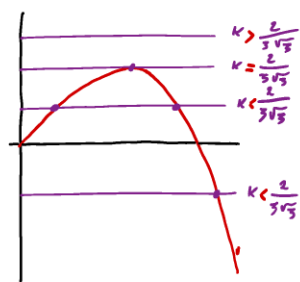
l'esercizio chiede: per quali k il grafico di $f(x)$ interseca la retta $y=k$ in un punto di ascissa positiva?

Sfruttiamo la derivata $f'(x) = -3x^2 + 1$ per studiare il grafico di $f(x)$. Siccome ci interessano le x positive, osserviamo che:

- per $0 \leq x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x) > 0$, $f(x)$ è crescente
- per $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $f'(x) = 0$
- per $\frac{1}{\sqrt{3}} < x$, $f'(x) < 0$, $f(x)$ è decrecente



Inoltre, siccome il coefficiente di grado massimo è negativo, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ossia f scende sotto qualsiasi soglia fissata.

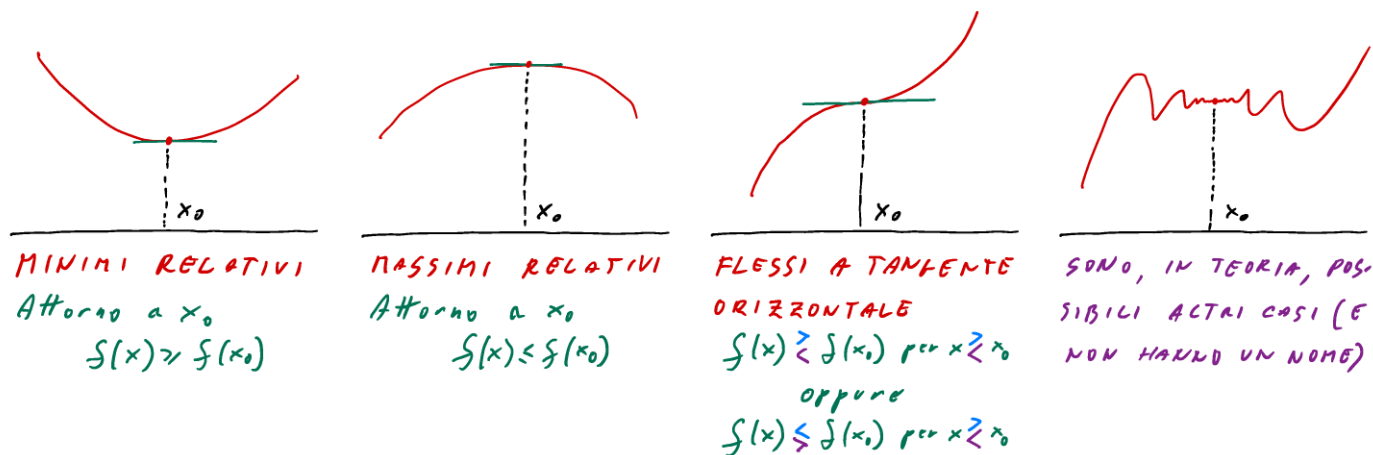


Il grafico così ottenuto mostra che la retta $y=k$ interseca $y=f(x)$ in un $x > 0$ quando $k \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Di conseguenza, l'equazione data ha una soluzione positiva se e solo se

$$\boxed{k \leq \frac{2}{3\sqrt{3}}}$$

Classificazione dei punti stazionari

I punti stazionari di $f(x)$, ossia quelli in cui $f'(x) = 0$, sono classificati in quattro categorie:



Principalmente, si tratta di nomenclatura, ma questa classificazione può anche venire in aiuto quando si vuole disegnare il grafico di una funzione.

Procedura per classificare un punto stazionario x_0

1. calcolo $f''(x_0)$, $f'''(x_0)$, ..., $f^{(n)}(x_0)$ servandomi alla prima derivata $\neq 0$.
2. se questa è la derivata n -esima ($f^{(n)}(x_0) \neq 0$) allora:
 - n è dispari $\Rightarrow$ FLESSO
 - n è pari e $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow$ MINIMO REL.
 - n è pari e $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow$ MASSIMO REL.

Per esempio se la derivata seconda è positiva, $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un MINIMO RELATIVO, se la derivata seconda è negativa $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un MASSIMO RELATIVO.

sino l.23

Equazioni differenziali

Un'equazione differenziale è un'equazione funzionale* che coinvolge una funzione incognita $f(x)$ e le sue derivate.

* un'equazione funzionale è un'equazione la cui incognita non è un singolo numero bensì un'intera funzione.

Esempio: l'esercizio C che abbiamo appena risolto:

$$x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$$

Tutti i polinomi $f(x) = ax^3 + x^2$ risolvono l'equazione

Verifica (del fatto che $f(x)$ risolve l'equazione)

Basta sostituire $f(x)$ nei due membri e constatare che si ottiene un'identità

$$\begin{aligned} x^2 + x \cdot (ax^3 + x^2)' &\stackrel{?}{=} 3 \cdot (ax^3 + x^2) \\ x^2 + x \cdot (3ax^2 + 2x) &\stackrel{?}{=} 3ax^3 + 3x^2 \\ \cancel{x^2} + \cancel{3ax^3} + \cancel{2x^2} &\stackrel{?}{=} \cancel{3ax^3} + \cancel{3x^2} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Inoltre si potrebbe dimostrare che non ci sono altre soluzioni. L'espressione $f(x) = ax^3 + x^2$ — che rappresenta una famiglia di funzioni parametrizzata da a — è, quindi, detta soluzione generale dell'equazione.

La soluzione generale di un'equazione differenziale è sempre una famiglia di funzioni, ciascuna delle quali è una soluzione particolare. Per esempio, l'esercizio D chiedeva di trovare la soluzione particolare tale che $f(1) = 0$.

Integrali indefiniti

Supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale $f'(x) = x^4$. Potremmo notare che $(x^5)' = 5x^4$, quindi $(\frac{1}{5}x^5)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4$, e, di conseguenza, $f(x) = \frac{1}{5}x^5$ è una soluzione particolare della nostra equazione. Ricordando che la derivata di una costante è nulla, vediamo che qualunque funzione del tipo $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$ è una soluzione, questa è infatti la soluzione generale di $f'(x) = x^4$.

In generale l'equazione $f'(x) = g(x)$, con $g(x)$ una funzione fissata — ne abbiamo appena visto un esempio con la funzione $g(x) = x^4$ — è così importante che c'è un simbolo apposta per indicare la sua soluzione generale:

$$\int g(x) dx \quad \text{letto: "integrale di } g(x) \text{ in } dx"$$

Per cui, tornando all'esempio $\int x^4 dx = \frac{1}{5}x^5 + C$.

Detto altrimenti: $\int g(x) dx$ è la famiglia di quelle funzioni $f(x)$ tali che $f'(x) = g(x)$. Queste funzioni, che sono le soluzioni particolari di $f' = g$, si chiamano anche primitive di g .

Data una primitiva $f(x)$ di $g(x)$, tutte le funzioni del tipo $f(x) + C$ sono, a loro volta, primitive di $g(x)$, e si può dimostrare che non ce ne sono altre. Quindi,

$$\underline{\int g(x) dx = f(x) + C} \quad \text{con } f(x) \text{ una qualunque primitiva di } g(x).$$

Integrali delle funzioni elementari

FORMULE DA SAPERE

$$\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad \text{per } a \neq -1 \quad \leftarrow \text{In particolare}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log_e(x) + C \quad \leftarrow \text{caso } a = -1 \text{ del precedente}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C \quad \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + C \quad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + C$$

Regole di integrazione

- $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$ formula $\int x^a dx$

es $\int 2 \cdot x^2 dx = 2 \cdot \int x^2 dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) = \frac{2}{3} x^3 + \underline{2C}$

Siccome la costante di integrazione C rappresenta "un numero qualunque", anche il $+2C$ che abbiamo ottenuto è semplicemente un numero qualunque. Quindi siamo giustificati a scrivere

$$\int 2x^2 dx = \frac{2}{3} x^3 + \underline{C}$$

- $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$ $\int -1 \cdot \sin(x) dx = -1 \cdot \int \sin(x) dx$

es $\int x - \sin(x) dx = \int x dx + \int -\sin(x) dx = \int x dx - \int \sin(x) dx =$

$$= \left(\frac{1}{2} x^2 + \underline{C_1} \right) - \left(-\cos(x) + \underline{C_2} \right) = \frac{1}{2} x^2 + \cos(x) + \underline{C_1 - C_2}$$

sono due integrali separati,
e ciascuno ha la sua costante

Ora si ripete il discorso della costante di integrazione.

Siccome $C_1 - C_2$ è semplicemente un numero qualunque (scritto in maniera fantasiosa) siamo giustificati a chiamarlo C .

$$\int x - \sin(x) dx = \frac{1}{2} x^2 + \cos(x) + C$$

Da notare che se anziché C_1 e C_2 avessimo scritto solo C e C al posto di $C_1 - C_2$ ci sarebbe venuto $\cancel{C} - \cancel{C}$ e avremmo ottenuto un risultato sbagliato (senza costante di integrazione).

Nota la costante di integrazione conduce a discorsi un po' complicati, però, essenzialmente, è solo burocrazia. Alla fine otterremo sempre un risultato del tipo $\int \text{funzione } dx = \text{primitiva} + C$

All'atto pratico, non serve mai, anzi, al di fuori di un corso di matematica, sarebbe goffo scrivere discorsi del genere.

(Potrebbe essere apprezzato, però, che non scriviate cose false tipo $x^2 = x^2 + C$)

Rispetto alle derivate, gli integrali sono più complicati per via di un guaio: non esiste una regola per $\int f(x) \cdot g(x) dx$

Ci sono, tuttavia, due regole che, talvolta, ossia solo in determinate circostanze, permettono di calcolare integrali di questo tipo:

- la regola di sostituzione
- la regola di integrazione per parti

Anche queste non sono che l'inizio, e si potrebbe dire molto e molto ancora, ma sarebbe oltre gli scopi di questo corso.

Regola di sostituzione

$$\text{Se } \int f(y) dy = F(y) + C$$

$$\text{allora } \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

es. Calcolare $\int x \cdot \sin(x^2) dx$

Soluzione Usando la regola con $f(y) = \sin(y)$ e $g(x) = x^2$

$$\int f(y) dy = \int \sin(y) dy = -\cos(y) + C$$

quindi prendiamo $F(y) = -\cos(y)$

$$\int \sin(x^2) \cdot 2x dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = -\cos(x^2) + C$$

Per risalire all'integrale cercato basta quindi moltiplicare e dividere per 2

$$\boxed{\int x \cdot \sin(x^2) dx} = \int \frac{1}{2} \sin(x^2) \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int \sin(x^2) \cdot 2x dx =$$

(ricordando le solite considerazioni su C) $\rightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \cos(x^2) + C}$

es. Calcolare $\int \cos(x+1) dx$

Soluzione Usiamo $f(y) = \cos(y)$ e $g(x) = x+1$.

$$\int f(y) dy = \sin(y) + C \text{ quindi } F(y) = \sin(y), \text{ inoltre } g'(x) = 1$$

$$\text{Quindi } \boxed{\int \cos(x+1) dx} = \int \cos(x+1) \cdot 1 dx = \boxed{\sin(x+1) + C}$$

Verifica della regola di sostituzione

Dobbiamo controllare che la derivata di $F(g(x)) + C$ sia la funzione integranda.

$$(F(g(x)) + C)' = \underline{F}'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = \underline{f}(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$F' = f \text{ poich\u00e9 } \int f(x) dx = F(x) + C$$



Caso particolare della regola di sostituzione

Il caso seguente si presenta con grande frequenza, per cui conviene tenere a mente la formula (*).

$$\text{Se } \int f(y) dy = F(y) + C$$

$$\text{allora } \int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (*)$$

Infatti, usando la regola con $g(x) = ax+b$, otteniamo

$$\int f(ax+b) dx = \int \frac{1}{a} \cdot a f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int g'(x) f(g(x)) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

es Calcolare $\int \frac{1}{2x+3} dx$

Soluzione Usando la formula con $f(y) = \frac{1}{y}$ otteniamo

$$\int f(y) dy = \int \frac{1}{y} dy = \log_e(y) + C \quad \text{quindi } F(y) = \log_e(y)$$

ora abbiamo $a=2$ e $b=3$ (siccome vogliamo $2x+3 = ax+b$)

$$\text{allora } \boxed{\int \frac{1}{2x+3} dx} = \int f(2x+3) dx = \boxed{\frac{1}{2} \log_e(2x+3) + C}$$

es. Calcolare $\int 7^x dx$

Soluzione

Per applicare la regola conviene ricordare che $7^x = e^{x \cdot \log_e(7)}$

applicando la formula per $f(y) = e^y$, $a = \log_e(7)$ e $b=0$

$$\boxed{\int 7^x dx} = \int e^{x \cdot \log_e(7)} dx = \frac{1}{\log_e(7)} e^{x \cdot \log_e(7)} + C = \boxed{\frac{1}{\log_e(7)} \cdot 7^x + C}$$

fino 1.34

Dagli esercizi di preparazione al test

(84) $\int \sin(2x) + x^2 dx =$

$$= \underbrace{\int \sin(2x) dx}_{-\frac{1}{2} \cos(2x) * } + \underbrace{\int x^2 dx}_{\frac{1}{3} x^3} = \boxed{-\frac{1}{2} \cos(2x) + \frac{1}{3} x^3 + C}$$

(85) $\int e^{3x} - \cos(1-x) dx =$

$$= \underbrace{\int e^{3x} dx}_{\frac{1}{3} e^{3x} *} - \underbrace{\int \cos(1-x) dx}_{-\sin(1-x) *} = \boxed{\frac{1}{3} e^{3x} + \sin(1-x) + C}$$

(86) $\int \frac{x-1}{x} dx =$

$$= \int 1 - \frac{1}{x} dx = \underbrace{\int 1 dx}_x - \underbrace{\int \frac{1}{x} dx}_{\log_e x} = \boxed{x - \log_e(x) + C}$$

Nota: $\int 1 dx = \int x^0 dx = \frac{1}{0+1} x^{0+1} + C = x + C$

Più in generale $\int k dx = k \cdot x + C$

(88) Trova una primitiva di $f(x) = e^{2+3x}$

$$\int e^{2+3x} dx = \frac{1}{3} e^{2+3x} + C \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{1}{3} e^{2+3x}}$$

* Formula $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

89 Trova una primitiva di $f(x) = 2\sqrt[3]{3x}$

$$\begin{aligned}\int 2\sqrt[3]{3x} dx &= \int 2\sqrt[3]{3} \cdot \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{x^{\frac{1}{3}}} dx \\ &= 2\sqrt[3]{3} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{3}} \cdot x^{1+\frac{1}{3}} + C = \boxed{\frac{2\sqrt[3]{3}}{2} \cdot x^{\frac{4}{3}} + C}\end{aligned}$$

90 Calcola la soluzione generale dell'equazione

$$f'(x) = x^3 + \cos(x)$$

$$\int x^3 + \cos(x) dx = \underbrace{\int x^3 dx}_{\frac{1}{4}x^4} + \underbrace{\int \cos(x) dx}_{\sin(x)} = \boxed{\frac{1}{4}x^4 + \sin(x) + C}$$

Regola di integrazione per parti:

$$\text{Se } \int f(x) dx = F(x) + C$$

$$\text{allora } \int \underbrace{f(x)}_{\substack{\text{la } f \text{ si integra} \\ \uparrow}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{la } g \text{ si deriva} \\ \downarrow}} dx = \underbrace{F(x)}_{\substack{\text{la } f \text{ si integra} \\ \uparrow}} \cdot \underbrace{g(x)}_{\substack{\text{la } g \text{ si deriva} \\ \downarrow}} - \int F(x) \cdot \underbrace{g'(x)}_{\substack{\text{da non confondersi con } + \\ \uparrow}} dx$$

es. Calcoliamo $\int x \cdot \sin(x) dx$

La difficoltà nell'applicare la formula per parti risiede nella scelta di quale parte debba giocare il ruolo di f e quale di g . Supponiamo di scegliere $f(x) = x$ e $g(x) = \sin(x)$. Otteniamo $F(x) = \frac{1}{2}x^2$ quindi

$$\int x \cdot \sin(x) dx = \frac{1}{2}x^2 \sin(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cos(x) dx$$

Questa formula non è sbagliata, però siamo caduti dalla padella nella brace, perché adesso dobbiamo calcolare $\int \frac{1}{2} x^2 \cos(x) dx$, che è più complicato dell'integrale di partenza. *Non abbiamo scelto f e g in maniera saggia.* Proviamo di nuovo. Questa volta scegliamo

$f(x) = \sin(x)$ e $g(x) = x$. Così $F(x) = -\cos(x)$, $g'(x) = 1$, e

$$\boxed{\int x \cdot \sin(x) dx} = -x \cos(x) - \int -\cos(x) dx = \boxed{-x \cos(x) + \sin(x) + C}$$

Suggerimento: è facile commettere errori di calcolo negli integrali, per cui conviene spesso verificare il risultato calcolandone la derivata. derivata = funzione integranda $\rightarrow$ OK

$$(-x \cos(x) + \sin(x) + C)' = -\cancel{\cos(x)} + x \sin(x) + \cancel{\cos(x)} + 0 = x \sin(x)$$

es. Calcolare $\int x^2 e^x dx$

In modo simile all'esercizio precedente, conviene derivare la parte x^2 e integrare la parte e^x . L'idea è che derivando x^2 otteniamo una potenza di x minore, $2 \cdot x^1$, quindi, in qualche senso, il problema si semplifica.

Scegliamo $f(x) = e^x$ e $g(x) = x^2$, chiaramente $F(x) = e^x$.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \quad (*)$$

Non abbiamo risolto l'esercizio, ma ci siamo ricondotti a calcolare $\int x e^x dx$, che verosimilmente è più facile perché la x compare alla prima anziché al quadrato. Insistiamo quindi con la formula per parti ($f(x) = e^x$, $g(x) = x$)

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

Sostituendo in (*) $-2 \int x e^x dx$

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 x e^x + 2 e^x - 2C$$

e, per la solita considerazione, possiamo scrivere

$$\boxed{\int x^2 e^x dx = e^x (x^2 - 2x + 2) + C}$$

Es Calcolare $\int \log_e(x) dx$

A prima vista, la funzione integranda non ha l'aspetto di un prodotto $f(x) \cdot g(x)$. C'è però, un trucco: $\log_e(x) = 1 \cdot \log_e(x)$. Scegliamo quindi $f(x) = 1$ e $g(x) = \log_e(x)$, allora $F(x) = x$

$$\boxed{\int \log(x) dx = x \cdot \log_e(x) - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \log_e(x) - x + C}$$

Giustificazione della formula di integrazione per parti

Calcoliamo la derivata del membro di destra

$$\begin{aligned} (F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g'(x) dx)' &= (F(x) \cdot g(x))' - (\int F(x) g'(x) dx)' = \\ &= \underbrace{f(x)}_{=f(x) \text{ perché } \int f(x) dx = F(x) + C} \cdot g(x) + F(x) \cdot \underbrace{g'(x)}_{=F(x) \cdot g'(x) \text{ per definizione}} - F(x) \cdot g'(x) = f(x) \cdot g(x) \end{aligned}$$

il risultato è la funzione integranda. $\square$

Es Calcolare $\int 2 \sin(x) \cos(x) dx$

metodo 1 Applichiamo la formula di sostituzione con

$f(y) = 2y$ e $g(x) = \sin(x)$, quindi $\int f(y) dy = 2 \cdot \frac{1}{2} y^2 + C$, $F(y) = y^2$

$$\boxed{\int 2 \sin(x) \cos(x) dx = \int f(g(x)) g'(x) dx = (\sin(x))^2 + C}$$

metodo 2 Ricordiamo che $2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x)$, quindi

$$\boxed{\int 2\sin(x)\cos(x) dx = \int \sin(2x) dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + C}$$

Come è possibile che, calcolando il medesimo integrale in due maniere diverse, siamo pervenuti a due risultati differenti?

Intanto, possiamo riscrivere il secondo risultato usando la formula di duplicazione per il coseno $\cos(2x) = 1 - 2(\sin(x))^2$

$$\int 2\sin(x)\cos(x) dx = -\frac{1}{2}(1 - 2(\sin(x))^2) + C = (\sin(x))^2 - \frac{1}{2} + C$$

Ora si vede bene che il secondo risultato è uguale al primo salvo che la costante C è rimpiazzata da $-\frac{1}{2} + C$. I due risultati sono quindi identici — rappresentano la stessa famiglia di funzioni — e non differiscono che per il modo in cui sono scritti.

fine 1.25

E5. Calcolare $\int x \cdot 7^x dx$

metodo 1 (per parti). $f(x) = 7^x$, $g(x) = x$.

$$\int 7^x dx = \frac{7^x}{\log_e(7)} + C$$

$$\int x \cdot 7^x dx = \frac{7^x}{\log_e(7)} x - \int \frac{7^x}{\log_e(7)} dx = \frac{x \cdot 7^x}{\log_e(7)} - \frac{7^x}{(\log_e(7))^2} + C$$

metodo 2 (per sostituzione) $\int y \cdot e^y dy = (y-1)e^y + C$

$$y = ax + b = \log_e(7) \cdot x$$

$$\int \log_e(7) \cdot x \cdot \underbrace{e^{\log_e(7) \cdot x}}_{7^x} dx = \frac{1}{\log_e(7)} (\log_e(7) \cdot x - 1) \underbrace{e^{\log_e(7) \cdot x}}_{7^x} + C$$

$$\int x \cdot 7^x dx = \int \frac{1}{\log_e(7)} \cdot \log_e(7) \cdot x \cdot 7^x dx = \frac{\log_e(7) \cdot x - 1}{(\log_e(7))^2} \cdot 7^x + C$$

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

Già sappiamo la soluzione generale di questa equazione nel caso $a=0$. Infatti abbiamo $f'(x) = b$ e

$$f(x) = \int b \, dx = b x + C$$

Se $a \neq 0$, aiuta ricordare il caso particolare $b=0$:

$$f(x) = C \cdot e^{ax}$$

Verifica: $f'(x) = C \cdot a \cdot e^{ax} = a \cdot C \cdot e^{ax} = a \cdot f(x)$ $\square$

Trucco per ricordare la soluzione: basta ricordare che f è una funzione esponenziale. Scrivendo un esponenziale generico $f(x) = \alpha \cdot e^{\beta x}$ otteniamo $f'(x) = \alpha \beta e^{\beta x}$ quindi $\alpha \beta e^{\beta x} = f'(x) = a f(x) = \alpha a e^{\beta x}$ e $\beta = a$, mentre non vi sono condizioni su α . Quindi la soluzione generale è $f(x) = \alpha \cdot e^{ax}$.

Nel caso generale, sempre assumendo $a \neq 0$, abbiamo

$$f(x) = C \cdot e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Metodo per ricavare questa soluzione

- Si parte dall'equazione omogenea associata $f' = a f$ (ottenuta cancellando il $+b$). Abbiamo già visto che la soluzione generale di questa è $f(x) = C \cdot e^{ax}$.
- Si cerca una soluzione particolare dell'equazione data. Per esempio possiamo cercarla costante, $f(x) = k$, da

cui $0 = f'(x) = a \cdot k + b$, $k = -\frac{b}{a}$, $f(x) = -\frac{b}{a}$.

- La soluzione generale dell'equazione data si ottiene sommando la soluzione particolare trovata, alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Verifica della soluzione generale

$$f'(x) = \left(C e^{ax} - \frac{b}{a} \right)' = C \cdot a \cdot e^{ax}$$

$$a f(x) + b = a \cdot C e^{ax} - \cancel{a} \frac{b}{\cancel{a}} + b = a \cdot C \cdot e^{ax} \quad \square$$

Esercizio: Un corpo si muove lungo l'asse x . Al tempo $t=0$ esso si trova in $x=0$ ^A e ha velocità $\frac{dx}{dt}=1$ ^B. Ad ogni istante il corpo è sottoposto ad una accelerazione $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}$ ^C (attrito viscoso). In che posizione si trova il corpo in funzione del tempo t ?

Soluzione

In questo esercizio, t , il tempo, è la variabile indipendente, mentre x , la posizione, dipende da t , possiamo quindi scrivere $x(t)$ per la posizione, $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ per la velocità e $x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ per l'accelerazione. Scriviti così, i dati dell'esercizio sono:

$$(a) \ x(0) = 0 \quad (b) \ x'(0) = 1 \quad (c) \ x''(t) = -x'(t)$$

Per affrontare l'equazione (c) conviene introdurre una nuova funzione: $v(t) := x'(t)$. In questo modo $v'(t) = x''(t)$ e l'equazione diventa

$$v'(t) = -v(t)$$

Questa è un'equazione del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti, la cui soluzione generale è $v(t) = C \cdot e^{-t}$.

Ci resta da trovare $x(t)$. Siccome $x'(t) = v(t) = C \cdot e^{-t}$,

$$x(t) = \int C \cdot e^{-t} dt = -C e^{-t} + D \leftarrow D \text{ perché } C \text{ è già usata.}$$

Questa è la soluzione generale dell'equazione (c). Per trovare la soluzione particolare che rappresenta la legge del moto del corpo dato, dobbiamo determinare le costanti C e D usando le condizioni (A) e (B).

$$0 \stackrel{(A)}{=} x(0) = -C e^{-0} + D = D - C \Rightarrow D = C$$

$$1 \stackrel{(B)}{=} x'(0) = v(0) = C \cdot e^{-0} = C \Rightarrow C = 1$$

Quindi, in definitiva $\boxed{x(t) = 1 - e^{-t}}$.

Osservazione L'equazione (c) coinvolge derivate che arrivano fino alla seconda, si tratta quindi di un'equazione del secondo ordine. La soluzione generale di una equazione dell' n -esimo ordine è una famiglia di funzioni con n parametri; ed è per questo che la soluzione che abbiamo trovato dipende da due costanti (C e D). In generale, per fissare una soluzione particolare di un'equazione di n -esimo ordine servono n condizioni (in questo caso ne avevamo infatti due).

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine

$$f''(x) = a f'(x) + b f(x) + c$$

① Soluzione dell'omogenea: $f''(x) = a f'(x) + b f(x)$.

Provvisoriamente cerchiamo $f(x) = e^{\lambda x}$.

Mettiamo $f'(x) = \lambda \cdot e^{\lambda x}$, $f''(x) = \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$ nell'equazione.

$$\cancel{\lambda^2 \cdot e^{\lambda x}} = f''(x) = a f'(x) + b f(x) = a \lambda \cancel{e^{\lambda x}} + b \cancel{e^{\lambda x}}$$

$$\lambda^2 - a\lambda - b = 0 \quad (*)$$

- Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, l'equazione di secondo grado $(*)$ ha due soluzioni λ_1 e λ_2 , e la soluzione generale dell'omogenea è $f(x) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 x} + C_2 \cdot e^{\lambda_2 x}$.
- Se $\Delta = 0$, l'equazione $(*)$ ha una sola soluzione λ , e la soluzione generale è $f(x) = (C_1 x + C_2) e^{\lambda x}$.
- Se $\Delta < 0$ la soluzione generale dell'omogenea è $f(x) = e^{\frac{a}{2}x} \cdot (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))$ con $\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$.

② Soluzione particolare.

- Se $c = 0$, $f(x) = 0$ è una soluzione particolare.
- Se $b \neq 0$, $f(x) = -\frac{c}{b}$ è una soluzione particolare.
- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, $f(x) = -\frac{c}{a}x$ è una soluzione part.
- Se $b = a = 0$, $f(x) = \frac{c}{2}x^2$ è una soluzione particolare.

③ La soluzione generale si ottiene sommando una soluzione particolare e la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Non è importante che si sappia a memoria il metodo per risolvere questo tipo di equazioni. È importante sapere che le soluzioni hanno, in generale, comportamenti esponenziali e oscillanti variamente combinati (a seconda dei coefficienti). Ed è importante sapere (libro o appunti alla mano) come applicare il metodo.

Eg. $f'' = 3f' - 2f$

1 - omogenea: $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$

$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$

2 - soluzione particolare: $C = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

3 - $\boxed{f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}}$

Eg. $f'' = 2f' - 2f + 6$

1 - omogenea: $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \Delta = -4 < 0$

$$f(x) = e^x (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x))$$

2 - soluzione particolare: $f(x) = 3$

3 - $\boxed{f(x) = e^x (C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)) + 3}$

Eg. $f'' = 2f' - f - 7$

1 - omogenea: $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$

$$f(x) = e^x (C_1 x + C_2)$$

2 - soluzione particolare: $f(x) = -7$

3 - $\boxed{f(x) = e^x (C_1 x + C_2) - 7}$

E5 $f'' = f' + 1$

1 - omogenea: $\lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$

$$f(x) = C_1 + C_2 e^x$$

2 - soluzione particolare: $f(x) = -x$

3 - $\boxed{f(x) = C_1 + C_2 e^x - x}$

Esercizio: Verifica ciascuna delle soluzioni date negli esempi precedenti calcolando i due membri dell'equazione.

Possiamo ripetere l'esercizio seguente, sfruttando, questa volta l'equazione del secondo ordine

Esercizio: Un corpo si muove lungo l'asse x . Al tempo $t=0$ esso si trova in $x=0$ e ha velocità $\frac{dx}{dt}=1$. Ad ogni istante il corpo è sottoposto ad una accelerazione $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}$ (attrito viscoso). In che posizione si trova il corpo in funzione del tempo t ?

Soluzione

La funzione incognita è $x(t)$. Dobbiamo risolvere la equazione $x''(t) = -x'(t)$. Questa equazione è omogenea, ossia non c'è il termine noto, dobbiamo quindi risolvere l'equazione di secondo grado $\lambda^2 + \lambda = 0$. Otteniamo $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, quindi $x(t) = C_1 e^{-1 \cdot t} + C_2 e^{0 \cdot t} = C_1 e^{-t} + C_2$. Proseguiamo, ora, come nella soluzione precedente per trovare C_1 e C_2 .
fine l.26

Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono a variabili separabili le equazioni della forma

$$f'(x) = g(x) \cdot h(f(x))$$

in cui f è la funzione incognita, mentre g e h sono funzioni dato. Queste equazioni si possono risolvere con un trucco che non è formalmente ineccepibile, ma funziona.

① Scriviamo l'equazione nella forma

$$\frac{df}{dx} = g(x) \cdot h(f)$$

② Riordiniamo i termini dell'equazione

$$\frac{df}{h(f)} = g(x) dx$$

③ Calcoliamo l'integrale indefinito di ambo i membri

$$A(f) + C_1 = \int \frac{df}{h(f)} = \int g(x) dx = B(x) + C_2$$

④ Raccogliamo le costanti C_1 e C_2 in $C := C_2 - C_1$

$$A(f) = B(x) + C$$

⑤ Ricaviamo f da quest'ultima equazione.

Così troviamo una famiglia di funzioni, dipendente dal parametro C , e questa è la soluzione generale.

Eg. $f' = 3 \times f$

1 - $\frac{df}{dx} = 3 \times f$

2 - $\frac{df}{f} = 3 \times dx$

3 - $\int \frac{df}{f} = \int 3 \times dx$

$$\log_e(f) + C_1 = \frac{3}{2} x^2 + C_2$$

4 - $\log_e(f) = \frac{3}{2} x^2 + C$

5 - $f = e^{\frac{3}{2} x^2 + C}$
 $= \underbrace{e^C}_K \cdot e^{\frac{3}{2} x^2}$

Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$\boxed{f(x) = K \cdot e^{\frac{3}{2} x^2}}$$

Verifica della soluzione

$$f'(x) = K \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot e^{\frac{3}{2} x^2} = K 3x e^{\frac{3}{2} x^2} = 3 \times K e^{\frac{3}{2} x^2} = 3 \times f(x)$$

Eg. $x'(t) = \frac{3 \times(t)}{t}$

1 - $\frac{dx}{dt} = \frac{3x}{t}$

2 - $\frac{dx}{x} = 3 \frac{dt}{t}$

3 - $\int \frac{dx}{x} = \int 3 \frac{dt}{t}$

$$\log_e(x) + C_1 = 3 \log_e(t) + C_2$$

4 - $\log_e(x) = 3 \log_e(t) + C$

5 - $x = e^{3 \log_e(t) + C}$

$$= \underbrace{e^C}_K \underbrace{e^{3 \log_e(t)}}_{t^3} = K t^3$$

Quindi

$$\boxed{x(t) = K t^3}$$

Esercizio: verifica la soluzione precedente

Integrali definiti

Se $\int f(x) dx = F(x) + C$ definiamo la seguente notazione

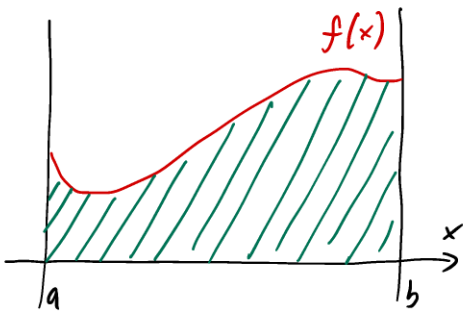
$$\int_a^b f(x) dx := F(b) - F(a) = \underbrace{[F(x)]_a^b}_{\text{maniera buffa di scrivere } F(b) - F(a)}$$

numeri chiamati "estremi di integrazione"

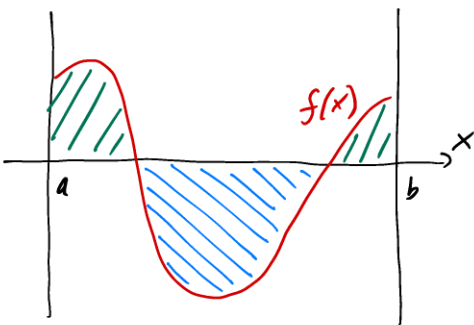
si legge "integrale da a a b di $f(x)$ in dx "

Teorema fondamentale del calcolo integrale

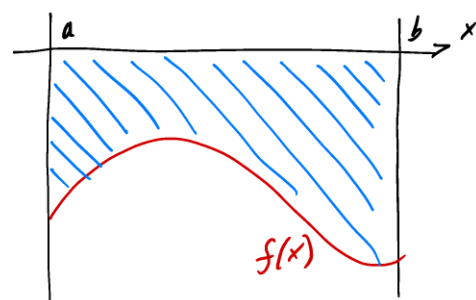
$\int_a^b f(x) dx$, con $a \leq b$, è l'area della superficie di piano compresa fra il grafico di $f(x)$ e l'asse x , fra l'ascissa $x=a$ e l'ascissa $x=b$, contata positivamente nel semipiano superiore e negativamente nel semipiano inferiore.



$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(\text{green shaded area})$$



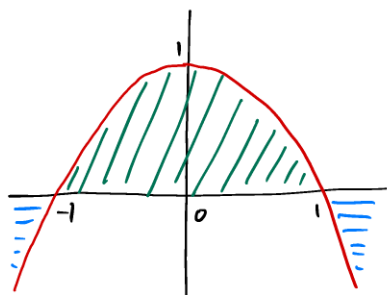
$$\int_a^b f(x) dx = \text{Area}(\text{green}) - \text{Area}(\text{blue})$$



$$\int_a^b f(x) dx = -\text{Area}(\text{blue shaded area})$$

Se $b < a$, $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$ *"si invertono gli estremi cambiando segno all'integrale"*

Eg. Calcola l'area della regione limitata di piano compresa fra il grafico di $f(x) = 1 - x^2$ e l'asse x .



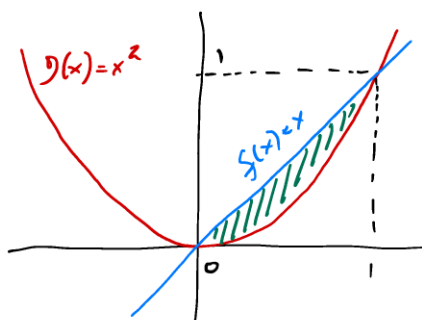
Soluzione L'area richiesta è quella tratteggiata in verde . Nel grafico è possibile identificare anche altre aree (tratteggiate in blu ) ma queste non sono limitate, quindi non è a queste che si riferisce il testo.

Applicando il teorema fondamentale del calcolo

$$\int 1 - x^2 dx = x - \frac{1}{3} x^3 + C$$

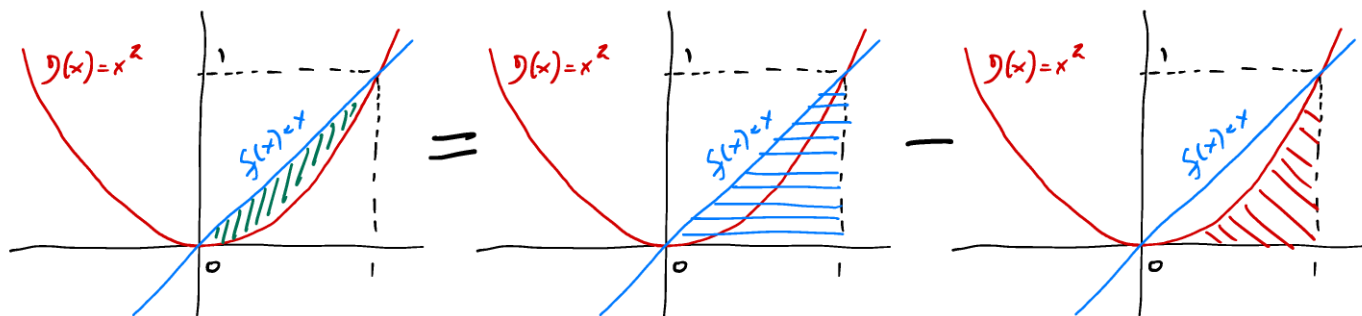
$$\boxed{\text{Area}(\text{green hatched})} = \int_{-1}^1 1 - x^2 dx \stackrel{H}{=} \left[x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-1}^1 = \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \boxed{\frac{4}{3}}$$

Eg. Calcolare l'area della regione limitata compresa fra i grafici di $f(x) = x$ e $g(x) = x^2$.



Soluzione L'area in questione è quella tratteggiata in verde  nella figura. Siccome il teorema fondamentale del calcolo non è applicabile direttamente

a questa situazione, scomponiamo l'area  in una differenza di due aree più semplici.



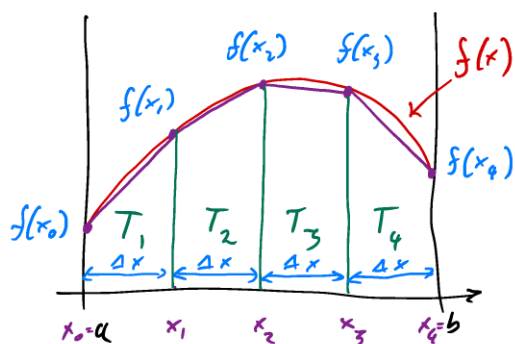
$$\begin{aligned}
\boxed{\text{Area}(\text{green box})} &= \text{Area}(\text{blue box}) - \text{Area}(\text{red box}) \\
&= \int_0^1 f(x) dx - \int_0^1 g(x) dx \\
&= \int_0^1 x dx - \int_0^1 x^2 dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{6}}
\end{aligned}$$

Calcolo numerico di integrali

fine l. 27

Il teorema fondamentale del calcolo ci permette di dare un senso anche a quegli integrali che non riusciamo a calcolare in forma chiusa — e ce ne sono che non si possono proprio calcolare mediante una formula, per esempio $\int \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Sfruttando la connessione fra integrale e area, possiamo approssimare numericamente un integrale stimando il valore dell'area che esso rappresenta.



Per esempio, supponiamo di voler calcolare $\int_a^b f(x) dx$. Potremmo approssimare il grafico di $f(x)$ con la spezzata in viola nel disegno. L'area

sotto questa spezzata, che sarà la nostra stima dell'integrale, è la somma delle aree dei trapezi T_1, T_2, T_3 e T_4 (le cui basi sono disposte in verticale).

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(T_1) &= \text{Area} \left(\text{trapezoid with bases } f(x_0) \text{ and } f(x_1) \text{ and height } \Delta x \right) = \text{Area} \left(\text{trapezoid with bases } \Delta x \text{ and } f(x_1) \text{ and height } f(x_0) \right) = \\
 &= \frac{\text{base}_1 + \text{base}_2}{2} \cdot \text{altezza} = \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \Delta x
 \end{aligned}$$

Alla stessa maniera $\text{Area}(T_2) = \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \cdot \Delta x$ etc.

Quindi, mettendo insieme queste formule

$$\begin{aligned}
 \text{Area}(\text{spezzata}) &= \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} \cdot \Delta x + \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \Delta x + \\
 &\quad + \frac{f(x_2) + f(x_3)}{2} \Delta x + \frac{f(x_3) + f(x_4)}{2} \Delta x = \\
 &= \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + \frac{f(x_4)}{2} \right)
 \end{aligned}$$

Ora, abbiamo usato solo quattro trapezi, ma questo è un numero troppo piccolo in pratica. Conviene generalizzare la formula ad un numero arbitrario n di trapezi. Siccome l'intervallo $[a, b]$ è diviso in n lunghezze, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$.

Abbiamo allora la formula

$$\int_a^b f(x) \approx \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}) + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

con $x_0 = a$, $x_1 = a + \Delta x$, $x_2 = a + 2 \cdot \Delta x$, $x_3 = a + 3 \cdot \Delta x$, ..., $x_n = b$.

Chiaramente più grande sarà il numero n dei trapezi, migliore sarà l'approssimazione così ottenuta.

E5 è facile calcolare che $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \approx 2.67$ (salvo per esercizio). Facciamo però finta di non saper fare questo calcolo, e troviamo un'approssimazione col metodo dei trapezi.

Uuseremo $n=4$ trapezi, quindi $\Delta x = \frac{2-0}{4} = 0.5$. Gli altri dati sono: $f(x)=x^2$, $a=0$, $b=2$.

$x_0 = 0$	$x_1 = 0.5$	$x_2 = 1$	$x_3 = 1.5$	$x_4 = 2$
$f(x_0) = 0$	$f(x_1) = 0.25$	$f(x_2) = 1$	$f(x_3) = 2.25$	$f(x_4) = 4$

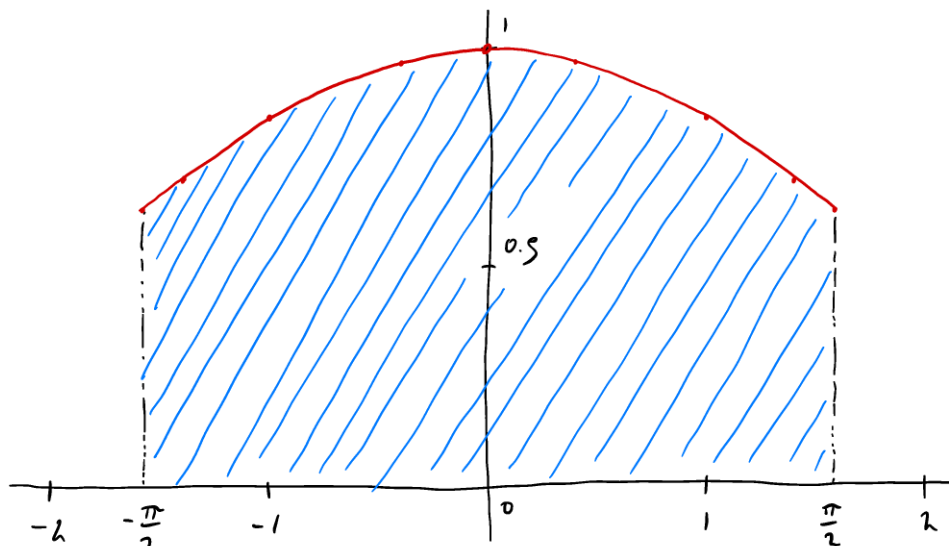
$$\int_0^2 x^2 dx \approx 0.5 \cdot \left(\frac{0}{2} + 0.25 + 1 + 2.25 + \frac{4}{2} \right) = 2.75$$

Come possiamo notare, anche con soli quattro trapezi, abbiamo ottenuto un risultato vicino al valore esatto 2.67.

Esercizio (I dal file "esercizi di analisi")

Calcola un'approssimazione numerica di: $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{x} dx$

Soluzione (non è stata illustrata a lezione)



Notiamo che l'area indicata dall'integrale è simmetrica rispetto all'asse y , ossia la funzione integranda $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ ha simmetria pari — $f(-x) = f(x)$ — Quindi ci basta calcolare la metà fra 0 e $\frac{\pi}{2}$, e poi moltiplicare per due.

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$$

Nota: questo passaggio non è necessario, però ci permette di ottenere il medesimo risultato facendo metà del lavoro.

Ora si presenta un nuovo guaio, che si sarebbe presentato in ogni caso: la funzione integranda non è definita in 0. La soluzione — che può essere giustificata teoricamente, ma la giustificazione esula dagli argomenti di questo corso — è di completare la funzione integranda con il suo limite nel punto in cui non è definita. Siccome vediamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

possiamo immaginare, allo scopo di calcolare l'integrale, che questa funzione valga 1 in $x=0$.

Procediamo ad applicare il metodo dei trapezi. Potremmo decidere di usare $n=10$, ossia 10 trapezi fra 0 e $\frac{\pi}{2}$: otterremo il medesimo risultato che si vorrebbe con 20 trapezi totali.

Poniamo

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \quad n=10 \quad \Delta x = \frac{\frac{\pi}{2}}{10} \approx 0.15708$$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0.1571	0.3142	0.4712	0.6283	0.7854	0.9425	1.0996	1.2566	1.4137	1.5708
$f(x_i)$	1	0.9959	0.9836	0.9634	0.9355	0.9003	0.8584	0.8103	0.7568	0.6986	0.6366

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \approx \Delta x \cdot \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_9) + \frac{f(x_{10})}{2} \right)$$

≈ 1.3699 8.7212

Quindi: $\boxed{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx} = 2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \approx 2.7399 \approx \boxed{2.74}$

Nota: il valore esatto è 2.741524...

Nota FUORI PROGRAMMA

È possibile stimare l'errore nel metodo dei trapezi mediante la formula seguente

$$\underbrace{\text{approssimazione} - \int_a^b f(x) dx}_{\text{errore}} \approx \Delta x^2 \frac{f'_b - f'_a}{12}$$

Nel nostro caso $f'(x) = \left(\frac{\sin x}{x} \right)' = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$, $f'(-\frac{\pi}{2}) = 0.4053$

$f'(\frac{\pi}{2}) = -0.4053$, quindi

$$\text{errore} \approx 0.1571^2 \frac{-0.4053 - 0.4053}{12} \approx -0.0017$$

Questa stima conferma che le prime due cifre decimali della nostra approssimazione sono corrette, anzi suggerisce valore esatto ≈ 2.742

Esercizio (H dal file "esercizi di analisi")

L'energia termica irradiata nell'unità di tempo da un corpo nero alla temperatura T (nella scala assoluta) è

$$\frac{dQ}{dt} = -\sigma A T^4$$

dove A indica l'area della superficie del corpo e $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8} \text{ J} \cdot \text{m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}$.

La variazione di temperatura di una massa M di ferro è legata alla variazione di energia termica da

$$\frac{dQ}{dt} = c M \frac{dT}{dt}$$

con $c = 0.4495 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Infine la densità del ferro è $\rho = 7.874 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$.

Soluzione (non è stata illustrata a lezione)

Dalle due equazioni date otteniamo

$$c M \frac{dT}{dt} = \frac{dQ}{dt} = -\sigma A T^4$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{-\sigma A}{c M} T^4$$

Chiamiamo questa costante α

$$T' = -\alpha T^4$$

Questa è un'equazione a variabili separabili; la cui soluzione generale è ALVA PAGINA SEGUENTE...

$$\int \frac{dT}{T^4} = \int -\alpha dt$$

Qui si sarebbe potuto scrivere anche $-\alpha t + C$: i calcoli verranno diversi ma il risultato finale no.

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{T^3} = -\alpha(t+C)$$

Ricordando che la domanda è "dopo quanto tempo..." conviene ricavare t .

$$t = \frac{1}{3\alpha T^3} - C$$

Dobbiamo ora calcolare α e C . Per poter applicare $\alpha = \frac{\sigma A}{c M}$ sappiamo già σ , c e M , mentre ci manca la superficie A della sfera. Detto r il raggio e V il volume:

$$M = \rho V \quad V = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad A = 4 \pi r^2$$

Da cui si deduce

$$V = \frac{M}{\rho} \quad r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}} \quad A = \sqrt[3]{36\pi \frac{M^2}{\rho^2}}$$

Quindi

$$\alpha = \frac{\sigma A}{c M} = \frac{\sigma}{c} \sqrt[3]{\frac{36\pi}{M \rho^2}} =$$

$$= \frac{5.6704 \cdot 10^{-8} \text{ J m}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-4}}{0.4435 \text{ J g}^{-1} \text{ K}^{-1}} \cdot \sqrt[3]{\frac{36\pi}{10^3 \text{ kg} \cdot 7.874^2 \text{ g cm}^{-3}}}$$

$$= \frac{5.6704}{0.4435} \sqrt[3]{\frac{36\pi}{7.874^2}} \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-3} = 15.414 \cdot 10^{-14} \text{ s}^{-1} \text{ K}^{-3}$$

Detta $T_0 = 500 \text{ K}$ la temperatura al tempo $t=0$, possiamo calcolare C da

$$0 = \frac{1}{3\alpha T_0^3} - C \Rightarrow C = \frac{1}{3\alpha T_0^3}$$

Detta $T_1 = 10 \text{ K}$ e t il tempo cercato abbiamo

$$t = \frac{1}{3\alpha T_1^3} - C = \frac{1}{3\alpha} \left(\frac{1}{T_1^3} - \frac{1}{T_0^3} \right) = 2.1625 \cdot 10^9 \text{ s} \\ = \underline{\underline{68.53 \text{ anni}}}$$

Assumendo 1 anno = 365.25 giorni

Esercizio (L dal file "esercizi di analisi")
(= A esame del 2.V.2019)

Considera la funzione $f(x) = \frac{L}{1+e^{-k(x-x_0)}}$, dove L , k , e x_0 sono parametri fissati.

1. Verifica che la funzione data risolve l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{k}{L}f(x)(L - f(x))$$

2. Fissa $L = 6$, $k = 0.5$, e $x_0 = 5$. Traccia il grafico di $f(x)$ per x che varia fra 0 e 10.

3. Con i parametri fissati al punto precedente, calcola precisamente il valore, se riesci, altrimenti dai una stima ragionevolmente accurata, dell'integrale $\int_0^{10} f(x) dx$.

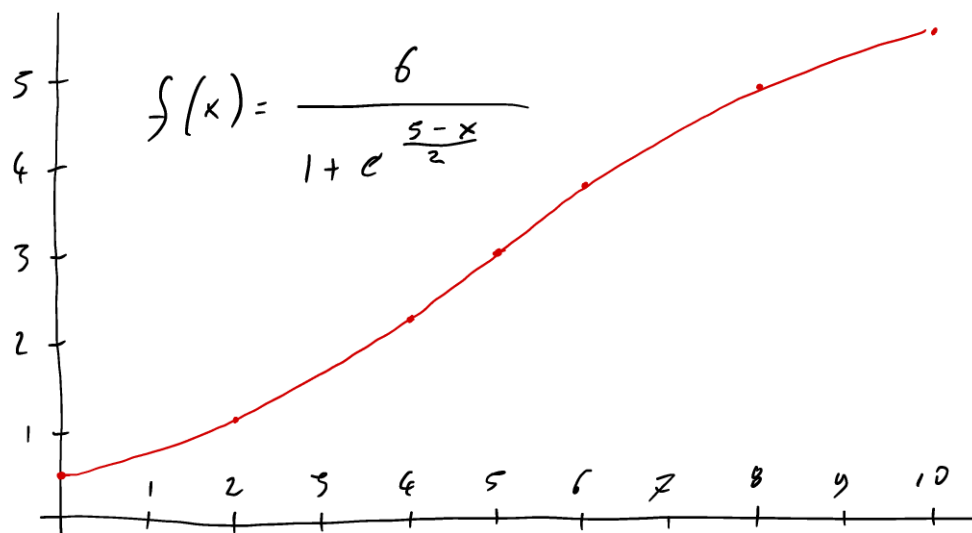
Soluzione (non è stata illustrata a lezione)

$$\textcircled{1} \quad \frac{df}{dx} = +k e^{-k(x-x_0)} \frac{+L}{(1+e^{-k(x-x_0)})^2}$$

$$\frac{k}{L} f(x)(L-f(x)) = \frac{k}{L} \frac{\cancel{L}}{1+e^{-k(x-x_0)}} \frac{L e^{-k(x-x_0)}}{1+e^{-k(x-x_0)}}$$

Le due espressioni ottenute valutando i due membri della equazione si equivalgono, quindi l'equazione è soddisfatta.

2.



3. Per applicare la definizione di integrale definito, dovremmo prima calcolare l'integrale indefinito $\int \frac{6}{1 + e^{\frac{5-x}{2}}} dx$. Questo si può fare, ma non è facile usando i metodi del corso. Innanzitutto notiamo che, usando la formula $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$, possiamo ricondurci all'integrale $\int \frac{1}{1+e^x} dx$. Però, adesso, occorre, per esempio, inventarsi un trucco nifty come questo:

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \int 1 - \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int 1 dx - \int \frac{e^x}{1+e^x} dx$$

① ②

$$\textcircled{1} \int 1 dx = x + C$$

$$\textcircled{2} \int \frac{e^x}{1+e^x} dx = \int \frac{1}{1+e^x} \cdot e^x dx = \log_e (1+e^x) + C$$

$f(g(x)) \cdot g'(x)$ con $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = 1+e^x$

$$\int \frac{1}{1+e^x} dx = \textcircled{1} + \textcircled{2} = x - \log_e (1+e^x) + C \quad \text{ed applicando } *$$

$$\int \frac{6}{1 + e^{\frac{5-x}{2}}} dx = 6 \int \frac{1}{1 + e^{-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}}} dx = 6 \cdot \frac{-2}{\frac{1}{2}} \left(\frac{5-x}{2} - \log_e \left(1 + e^{\frac{5-x}{2}} \right) \right) + C$$

$ax+b$ $\frac{1}{a}$

Ora è facile concludere i calcoli

$$\begin{aligned}\int_0^{10} f(x) dx &= \left[-12 \left(\frac{5-x}{2} - \log_e \left(1 + e^{\frac{5-x}{2}} \right) \right) \right]_0^{10} \\ &= 30 + 12 \log_e (1 + e^{-\frac{5}{2}}) - (-30 + 12 \log_e (1 + e^{\frac{5}{2}})) \\ &= 60 + 12 \log_e \left(\frac{1 + \frac{1}{e^{5/2}}}{1 + e^{5/2}} \right) = 60 + 12 \log_e (e^{-\frac{5}{2}}) = \boxed{30}\end{aligned}$$

Nota La soluzione analitica di questa domanda è un po' ostica se affrontata con la preparazione di questo corso. Tuttavia **non** è l'unica soluzione possibile. Per esempio una soluzione numerica, con il metodo dei trapezi, sarebbe interamente soddisfacente. Anzi — provare per credere — questo integrale viene esattamente 30, se calcolato col metodo dei trapezi, qualunque sia il numero di trapezi scelto.

Teoria della probabilità

La teoria della probabilità serve per quantificare i brandelli di informazione che, nell'imprevedibile, è possibile strappare dal controllo del caso. Cosa significhi "imprevedibile" è forse una questione filosofica. Noi ci limitiamo a constatare che, di frequente, è oltremodo difficile stabilire verso che futuro evolverà una situazione presente (es. il tempo atmosferico, il lancio di un dado o di una moneta). Allora, per poter dire almeno qualcosa, che sia precisa, conviene postulare l'intervento del caso e concentrarsi sulle leggi di quest'ultimo.

Il concetto di **evento** è fondamentale in teoria della probabilità: un evento è una predizione, non necessariamente veritiera. Per esempio, nel lancio di un dado, potremmo considerare gli eventi "il dado fa sei" o "fa più di due". Sono ammessi anche eventi certi "il dado fa qualche numero" ed eventi impossibili "fa nove e mezzo".

La **probabilità** di un evento è la frazione di circostanze, identiche a quelle in esame, in cui l'evento si verifica. Per esempio, siccome un dado, non truccato, è costruito per cadere su ciascuna delle sei facce $\frac{1}{6}$ delle volte, diremo che la probabilità dello

evento "il dado fa tre" è $\frac{1}{6}$.

Definizione: uno spazio degli eventi Ω è un insieme i cui elementi si dicono eventi elementari.

A ciascun evento elementare x è associata una probabilità $p(x)$ compresa fra 0 e 1, con la condizione che la somma delle probabilità di tutti gli eventi elementari sia 1.

In una data circostanza, lo spazio degli eventi rappresenta il totale di tutte le informazioni probabilistiche che si possono sapere a proposito di quella circostanza.

Esempio: lancio di un dado

$$\Omega = \{ \square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \cdot \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array} \}$$

$$p(\square) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \cdot \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \cdot \\ \hline \end{array}) = p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & \cdot & \cdot \\ \hline \end{array}) = \frac{1}{6}$$

Definizione: dato uno spazio degli eventi Ω , chiamiamo evento un insieme di eventi elementari; ossia un sottoinsieme di Ω . La probabilità $Pr(E)$ di un evento E è la somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono.

Esempio: nel caso del dado l'evento E "il risultato è dispari" è $E = \{ \square, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \cdot \\ \hline \end{array} \}$.

La probabilità di E è

$$Pr(E) = p(\square) + p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline & \cdot & \\ \hline \end{array}) + p(\begin{array}{|c|c|c|} \hline \cdot & & \cdot \\ \hline \end{array}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Algebra di Boole degli eventi

Gli eventi, che sono sottoinsiemi di Ω si prestano ad essere manipolati per mezzo delle operazioni Booleane

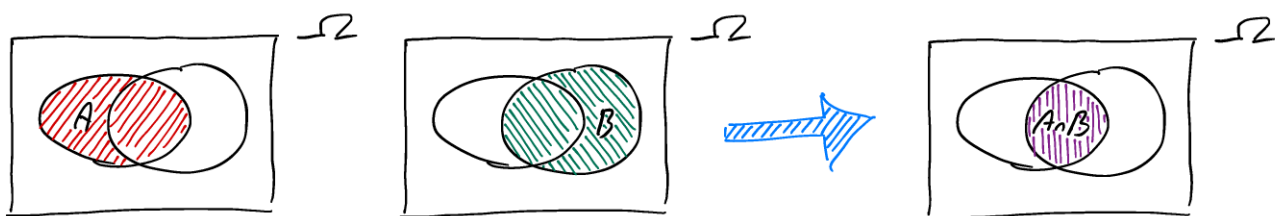
- complemento: l'evento $\bar{A}$, il "complementare di A " o anche " A complementare", è l'insieme degli eventi elementari che non appartengono ad A



$\bar{A}$ = "A non si verifica"

es. "il dado fa 1 o 2" = "il dado non fa né 3 né 4"
 $\{1, 2\}$ $\{3, 4, 5, 6\}$

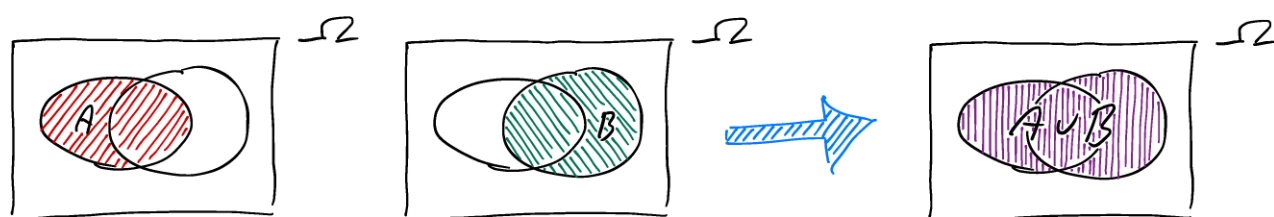
- intersezione: l'evento $A \cap B$, la "intersezione di A e B " o anche " A intersecato B ", è l'insieme degli eventi elementari che appartengono sia ad A sia a B .



$A \cap B$ = "si verificano sia A sia B " = " A e B "
 $\{1, 2, 3\}$ $\{1, 2, 3\}$

es. "il dado fa un numero dispari" $\cap$ "il dado fa un numero < 4 "
= "il dado fa 1 o 2" = $\{1, 2\}$

- unione: l'evento $A \cup B$, la "unione di A e B " o anche " A unito B ", è l'insieme degli eventi elementari che appartengono ad almeno uno fra A e B , o, in altre parole, gli eventi elementari che appartengono o ad A , o a B , oppure a tutti e due.



$A \cup B$ = "si verifica almeno uno fra A e B "

= "si verifica A , oppure B , oppure entrambi:"

= "se non si verifica A allora si verifica B "

= "se non si verifica B allora si verifica A "

= " A e B non mancano entrambi di verificarsi"

$\{\square, \square\}$

$\{\square, \square\}$

es. "il dado fa $\square$ o $\square$ " $\cup$ "il dado fa $\square$ o $\square$ "

= "il dado fa un numero dispari" = $\{\square, \square, \square\}$

Attenzione: la congiunzione "e" può far pensare a unire due cose, quindi all'unione: è una trappola!

" A e B " = $A \cap B$
 $\cap$ = INTERSEZIONE

" A o B " = $A \cup B$
 $\cup$ = UNIONE

Esercizio Considerando il lancio di due dadi

1. Elenca gli elementi dello spazio di probabilità Ω con le rispettive probabilità.
2. Descrivi l'evento A "il primo dado fa meno del secondo" e calcolane la probabilità.
3. Descrivi l'evento B "la somma dei due dadi è 7" e calcolane la probabilità.
4. Descrivi gli eventi $C = A \cap B$ e $D = A \cap \bar{B}$ e calcolane la probabilità.

fine l. 28

Soluzione

1. Indicando con la coppia (a, b) l'evento che il primo dado faccia a e il secondo b , abbiamo

$$\Omega = \left\{ \begin{array}{cccccc} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{array} \right\}$$

Questi sono, in totale 36 eventi (6 possibilità per il primo dado moltiplicate per 6 possibilità per il secondo), e, per siccome la situazione è simmetrica, devono avere tutti la medesima probabilità $\frac{1}{36}$.

2. L'evento A "il primo dado fa meno del secondo" è costituito dall'insieme delle coppie (a, b) in cui $a < b$. Ossia quelle sottolineate nella tabella seguente

(1 1)	<u>(1 2)</u>	<u>(1 3)</u>	<u>(1 4)</u>	<u>(1 5)</u>	<u>(1 6)</u>
(2 1)	(2 2)	<u>(2 3)</u>	<u>(2 4)</u>	<u>(2 5)</u>	<u>(2 6)</u>
(3 1)	(3 2)	(3 3)	<u>(3 4)</u>	<u>(3 5)</u>	<u>(3 6)</u>
(4 1)	(4 2)	(4 3)	(4 4)	<u>(4 5)</u>	<u>(4 6)</u>
(5 1)	(5 2)	(5 3)	(5 4)	<u>(5 5)</u>	<u>(5 6)</u>
(6 1)	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	<u>(6 6)</u>

Per cui $A = \{(1 2), (1 3), (1 4), (1 5), (1 6), (2 3), (2 4), (2 5), (2 6), (3 4), (3 5), (3 6), (4 5), (4 6), (5 6)\}$

Siccome A ha 15 elementi ciascuno dei quali, si è detto, ha probabilità $\frac{1}{36}$, $\boxed{Pr(A) = \frac{15}{36}}$

3. L'evento B "la somma dei due dadi è 7" è l'insieme delle coppie (a, b) con $a+b=7$, ossia quelle cerchiate

(1 1)	(1 2)	(1 3)	(1 4)	(1 5)	<u>(1 6)</u>
(2 1)	(2 2)	(2 3)	(2 4)	<u>(2 5)</u>	(2 6)
(3 1)	(3 2)	(3 3)	<u>(3 4)</u>	(3 5)	(3 6)
(4 1)	(4 2)	<u>(4 3)</u>	(4 4)	(4 5)	(4 6)
(5 1)	<u>(5 2)</u>	(5 3)	(5 4)	(5 5)	(5 6)
<u>(6 1)</u>	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	(6 6)

Per cui $B = \{(6 1), (5 2), (4 3), (3 4), (2 5), (1 6)\}$ e, come prima $\boxed{Pr(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}}$

4. Nella tabella seguente, le coppie sottolineate appartengono ad A , e quelle cerchiate a B .

(1 1)	<u>(1 2)</u>	<u>(1 3)</u>	<u>(1 4)</u>	<u>(1 5)</u>	<u>(1 6)</u>
(2 1)	(2 2)	<u>(2 3)</u>	<u>(2 4)</u>	<u>(2 5)</u>	<u>(2 6)</u>
(3 1)	(3 2)	(3 3)	<u>(3 4)</u>	<u>(3 5)</u>	<u>(3 6)</u>
(4 1)	(4 2)	<u>(4 3)</u>	(4 4)	<u>(4 5)</u>	<u>(4 6)</u>
(5 1)	<u>(5 2)</u>	(5 3)	(5 4)	<u>(5 5)</u>	<u>(5 6)</u>
<u>(6 1)</u>	(6 2)	(6 3)	(6 4)	(6 5)	<u>(6 6)</u>

L'evento $C = A \cap B$ è quindi l'insieme delle coppie che sono sia sottolineate sia cerchiate.

$$C = A \cap B = \{(34), (25), (16)\}$$

Di conseguenza $\boxed{Pr(C) = \frac{3}{36}}$

L'evento $D = A \cap \bar{B}$ contiene, invece, le coppie che sono in A e non sono in B , ossia quelle sottolineate e non cerchiato.

$$D = A \cap \bar{B} = \{(12), (13), (14), (15), (23), (24), (26), (35), (36), (45), (46), (56)\}$$

Per cui $\boxed{Pr(D) = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}}$

Terminologia e formule elementari

Un evento che abbia *probabilità 0* si dice *impossibile*.

Per esempio $Pr(\emptyset) = 0$, quindi $\emptyset$ è impossibile.
 insieme vuoto

Un evento che abbia *probabilità 1* si dice *certo*.

Per esempio $Pr(\Omega) = 1$, quindi Ω è un evento certo.
 l'intero spazio di tutti gli eventi elementari

Le probabilità di A e $\bar{A}$ sono legate da

$$Pr(A) + Pr(\bar{A}) = 1$$

Da cui $Pr(\bar{A}) = 1 - Pr(A)$.

Le probabilità di unione e intersezione soddisfano

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B)$$

$$\text{Per cui } Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$$

$$Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cup B)$$

A e B si dicono *incompatibili* se $A \cap B$ è impossibile,

in questo caso $Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B)$.
 $\uparrow$
 $Pr(A \cap B) = 0$

Giustificazione della formula $Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = Pr(A) + Pr(B)$

La probabilità di un evento è la somma delle probabilità degli eventi elementari che lo compongono. Prepariamo un diagramma che indichi, per i due membri dell'uguaglianza, quali eventi elementari stiamo sommando.

Primo membro:

$$Pr(A \cup B) = \text{diagramma con } A \cup B \text{ shaded} = \text{diagramma con } A \text{ shaded (x)} + \text{diagramma con } B \text{ shaded (y)} + \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (z)}$$

$$Pr(A \cap B) = \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)}$$

$$Pr(A \cup B) + Pr(A \cap B) = \text{diagramma con } A \text{ shaded (x)} + 2 \cdot \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)} + \text{diagramma con } B \text{ shaded (z)}$$

Secondo membro:

$$Pr(A) = \text{diagramma con } A \text{ shaded (x)} + \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)}$$

$$Pr(B) = \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)} + \text{diagramma con } B \text{ shaded (z)}$$

$$Pr(A) + Pr(B) = \text{diagramma con } A \text{ shaded (x)} + 2 \cdot \text{diagramma con } A \cap B \text{ shaded (y)} + \text{diagramma con } B \text{ shaded (z)}$$

I due membri dell'identità rappresentano, quindi, la medesima somma, e, di conseguenza, sono uguali. $\square$

Esercizio: una certa popolazione ha le caratteristiche seguenti:

- un individuo scelto casualmente sull'intera popolazione è **alto** con probabilità 0.4^* (altrimenti è **basso**).
- un individuo scelto casualmente è **nobile** con probabilità 0.1^* (altrimenti è **plebeo**)
- la probabilità che un individuo a caso sia, allo stesso tempo, sia alto che nobile è 0.05^* .

Domanda: con che probabilità un individuo a caso è basso e plebeo?

Soluzione 1 (percentuali) Le divisioni alto-basso o nobile-plebeo separano gli individui in quattro insiemi:

ACT1	ALTO E NOBILE	ALTO E PLEBEO
	BASSO E NOBILE	BASSO E PLEBEO
	NOBILI	PLEBEI

Noi sappiamo che la prima riga di questa tabella, gli individui alti, contiene il $40\%^*$ della popolazione, mentre la prima colonna, i nobili, il $10\%^*$.

Infine la casella in alto a sinistra il $5\%^*$.

Di conseguenza la casella in basso a sinistra contiene il $10\% - 5\% = 5\%$ degli individui. Ci inter-

	10%		
ACT1	5%		40% ↓
BASS1	5%	55%	
	NOBILI	PLEBEI	60% ↓

ressa la casella in basso a destra, quindi ripetiamo il ragionamento sulla seconda riga. Questa deve contenere il $100\% - 40\% = 60\%$ degli individui. Quindi, in definitiva la casella dei plebei bassi contiene il $60\% - 5\% = 55\%$ degli individui. Per rispondere alla

domande dell'esercizio diciamo allora che la probabilità che un individuo preso a caso sia basso e plebeo è $\boxed{0.55}$.

La soluzione con le percentuali serve per meglio illustrare lo spirito delle formule probabilistiche che stiamo studiando.

Tuttavia LA SOLUZIONE CHE È IMPORTANTE CAPIRE È LA SEGUENTE

Soluzione 2 (usando le formule)

Preso un individuo a caso, consideriamo questi eventi:

E_{AN} = "l'individuo è alto e nobile"

E_{AP} = "l'individuo è alto e plebeo"

E_{BN} = "l'individuo è basso e nobile"

E_{BP} = "l'individuo è basso e plebeo"

Questi eventi sono a due a due incompatibili:

$$P_n(E_{AN} \cap E_{AP}) = P_n(E_{AN} \cap E_{BN}) = \dots = 0$$

Inoltre, detti E_A ed E_N gli eventi "l'individuo è alto" e "l'individuo è nobile" rispettivamente, abbiamo

$$E_A = E_{AN} \cup E_{AP} \quad E_N = E_{AN} \cup E_{BN}$$

$$\overline{E_A} = E_{BN} \cup E_{BP} \quad \overline{E_N} = E_{AP} \cup E_{BP}$$

I dati dell'esercizio si possono riassumere nelle formule

$$P_n(E_A) = 0.4 \quad P_n(E_N) = 0.1 \quad P_n(E_{AN}) = 0.05$$

Vogliamo sfruttare la formula

$$P_n(A \cup B) + P_n(A \cap B) = P_n(A) + P_n(B)$$

Il piano è di far leva su $E_A = E_{AN} \cup E_{AP}$ $\overline{E_N} = E_{AP} \cup E_{BP}$.
DATO DATO IN COMUNE DATO RICHiesto

Dalla prima formula

$$P_r(E_A) + \overbrace{P_r(E_{AN} \cap E_{AP})}^{=0} = P_r(E_{AN}) + P_r(E_{AP})$$

$$\underline{P_r(E_{AP})} = P_r(E_A) - P_r(E_{AN})$$

Dalla seconda

$$P_r(\bar{E}_N) + \overbrace{P_r(E_{AP} \cap E_{BP})}^{=0} = P_r(E_{AP}) + P_r(E_{BP})$$

$$\underline{P_r(E_{AP})} = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_{BP})$$

Quindi

$$P_r(E_A) - P_r(E_{AN}) = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_{BP})$$

$$P_r(E_{BP}) = P_r(\bar{E}_N) - P_r(E_A) + P_r(E_{AN})$$

Ora $P_r(\bar{E}_N) = 1 - P_r(E_N)$, per cui

$$\boxed{P_r(E_{BP})} = 1 - P_r(E_N) - P_r(E_A) + P_r(E_{AN}) = 1 - 0.1 - 0.4 + 0.05 = \boxed{0.55}$$

fine l. 2)

Probabilità condizionata

Dati due eventi: A e B , supponiamo di constatare che, in una certa situazione, si verifica B . Cosa ci dice questo a proposito di A ?

Esempio. Lanciando un dado, consideriamo gli eventi:

A = "il risultato è ≤ 3 " 3 casi su 6 $\Rightarrow P_r(A) = 0.5$

B = "il risultato è dispari" 3 casi su 6 $\Rightarrow P_r(B) = 0.5$

Entrambi gli eventi hanno probabilità 0.5. In una certa situazione, diciamo, si constata che B si verifica. Ora, i casi possibili sono tre — risultato = 1, 3, 5 — e due di

questi sono ≤ 3 , quindi possiamo dire che, sapendo che B si verifica, A ha probabilità $\frac{2}{3}$. Detto in altro modo, condizionatamente al verificarsi di B, la probabilità di A è $\frac{2}{3}$. Questo si esprime con la formula $\underbrace{Pr(A|B)} = \frac{2}{3}$.
 "probabilità di A condizionata a B"

Definizione

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)}$$

Intuitivamente la probabilità di A condizionato a B è la probabilità che si verifichi A dal punto di vista di chi sappia già che B si è verificato.

Applicando la formula all'esempio precedente, otteniamo

$$A \cap B = \{\square, \square, \square\} \cap \{\square, \square, \square\} = \{\square, \square\}$$

Quindi:

$$Pr(A|B) = \frac{Pr(A \cap B)}{Pr(B)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

Importante

Le formule che valgono in generale per la probabilità sono vere anche per la probabilità condizionata

$$Pr(\emptyset|C) = 0 \quad Pr(\Omega|C) = Pr(C|C) = 1$$

$$Pr(A|C) + Pr(\bar{A}|C) = 1$$

$$Pr(A \cup B|C) + Pr(A \cap B|C) = Pr(A|C) + Pr(B|C)$$

Es. Nell'esercizio dei nobili e dei plebei, qual è la probabilità che un nobile preso a caso sia alto, e che un

plebeo preso a caso sia alto?

Soluzione L'esercizio si riferisce alle probabilità condizionate $P_r(E_A | E_N)$ e $P_r(E_A | \bar{E}_N)$.

$$P_r(E_A | E_N) = \frac{P_r(\overbrace{E_A \cap E_N}^{E_{AN}})}{P_r(E_N)} = \frac{0.05}{0.1} = 0.5$$

$$P_r(E_A | \bar{E}_N) = \frac{P_r(\overbrace{E_A \cap \bar{E}_N}^{P_r(E_A) - P_r(E_{AN})})}{\underbrace{P_r(\bar{E}_N)}_{1 - P_r(E_N)}} = \frac{0.4 - 0.05}{1 - 0.1} = \frac{0.35}{0.9} = 0.3888...$$

Eventi indipendenti

Definizione intuitiva: A e B sono indipendenti (più precisamente "stocasticamente indipendenti") se il verificarsi dell'uno non dà informazioni sull'altro, ossia

$$P_r(A|B) = P_r(A)$$

Usando la definizione di probabilità condizionata possiamo semplificare questa formula

$$\frac{P_r(A \cap B)}{P_r(B)} = P_r(A)$$

$$P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$$

E quest'ultima è la vera definizione di indipendenza

Definizione formale: A e B sono stocasticamente indipendenti se $P_r(A \cap B) = P_r(A) \cdot P_r(B)$.

Più in generale gli eventi $A_1, A_2, A_3, \dots$ sono indipendenti: se preso qualsiasi sottoinsieme di essi $A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}, \dots$ vale la formula

$$Pr(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = Pr(A_{i_1}) \cdot Pr(A_{i_2}) \cdot \dots \cdot Pr(A_{i_k})$$

Osservazione utile: Se A e B sono indipendenti allora:

- A e $\bar{B}$ sono indipendenti,
- $\bar{A}$ e B sono indipendenti,
- $\bar{A}$ e $\bar{B}$ sono indipendenti.

Verifichiamo la prima di queste affermazioni. Dobbiamo calcolare $Pr(A \cap \bar{B})$ e constatare che viene $Pr(A) \cdot Pr(\bar{B})$

Partiamo dall'osservazione che (come nell'esercizio) A e B dividono lo spazio degli eventi in quattro eventi incompatibili: $A \cap B, A \cap \bar{B}, \bar{A} \cap B$ e $\bar{A} \cap \bar{B}$.

A	$A \cap B$	$A \cap \bar{B}$
	$\bar{A} \cap B$	$\bar{A} \cap \bar{B}$
	B	$\bar{B}$

Inoltre $A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B})$. Quindi

$$\begin{aligned} Pr(A \cap \bar{B}) &= Pr(A) - Pr(A \cap B) = Pr(A) - \underbrace{Pr(A) \cdot Pr(B)}_{\text{perché } A \text{ e } B \text{ sono indipendenti}} = \\ &= Pr(A) (1 - Pr(B)) = Pr(A) \cdot Pr(\bar{B}) \quad \square \end{aligned}$$

Eg. Si estraggono dalla popolazione di nobili e plebei due persone indipendentemente. Determina la probabilità che siano: ① della medesima classe sociale ② di classi sociali opposte.

Soluzione Introduciamo gli eventi seguenti.

TABELLA ALLA PAGINA SUCCESSIVA

$E_{N?}$ = "il primo estratto è nobile"

$E_{P?}$ = "il primo estratto è plebeo" = $\overline{E_{N?}}$

$E_{?N}$ = "il secondo estratto è nobile"

$E_{?P}$ = "il secondo estratto è plebeo" = $\overline{E_{?N}}$

Sappiamo da un dato dell'esercizio che la probabilità che una persona presa a caso sia nobile è 0.1 quindi:

$$Pr(E_{N?}) = Pr(E_{?N}) = 0.1$$

Di conseguenza

$$Pr(E_{P?}) = Pr(\overline{E_{N?}}) = 1 - 0.1 = 0.9 \quad Pr(E_{?P}) = \dots = 0.9$$

La domanda (1) ci chiede la probabilità dell'evento

$$E_+ = \underbrace{(E_{N?} \cap E_{?N})}_{\text{"sono entrambi nobili"}} \cup \underbrace{(E_{P?} \cap E_{?P})}_{\text{"sono entrambi plebei"}}$$

I due eventi $E_{N?} \cap E_{?N}$ e $E_{P?} \cap E_{?P}$ sono chiaramente incompatibili, quindi

$$\begin{aligned} \boxed{Pr(E_+)} &= Pr(E_{N?} \cap E_{?N}) + Pr(E_{P?} \cap E_{?P}) = \\ &\quad \parallel \quad \parallel \quad \text{usando l'indipendenza} \\ &= Pr(E_{N?}) \cdot Pr(E_{?N}) + Pr(E_{P?}) \cdot Pr(E_{?P}) = \\ &= 0.1 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.9 = \boxed{0.82} \end{aligned}$$

La domanda (2) chiede la probabilità di

$$E_- = (E_{N?} \cap E_{?P}) \cup (E_{P?} \cap E_{?N})$$

Procedendo come prima otteniamo

$$\boxed{Pr(E_-)} = Pr(E_{N?}) \cdot Pr(E_{?P}) + Pr(E_{P?}) \cdot Pr(E_{?N}) = \boxed{0.18}$$

Un altro modo, però, di risolvere la domanda ② è osservare che E_+ e E_- sono complementari: uno dell'altro, per cui $Pr(E_-) = 1 - Pr(E_+) = 1 - 0.82 = 0.18$.

Esercizio

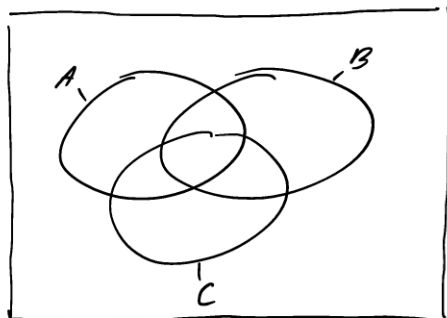
Sono dati tre eventi A, B, C. Gli eventi A e B sono indipendenti, mentre l'evento C è incompatibile con $A \cup B$. Le probabilità di A, B, C sono rispettivamente 0.4, 0.5, 0.1.

– Calcola la probabilità di $A \cup B \cup C$.

– Calcola la probabilità che avvenga uno solo fra A e B condizionata al complementare di C.

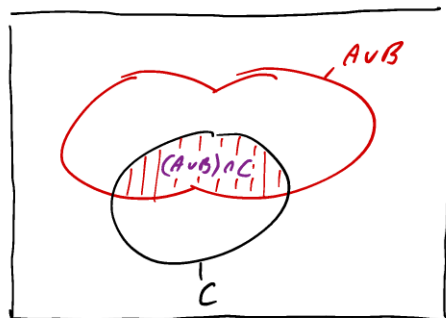
fine 1.30

Soluzione

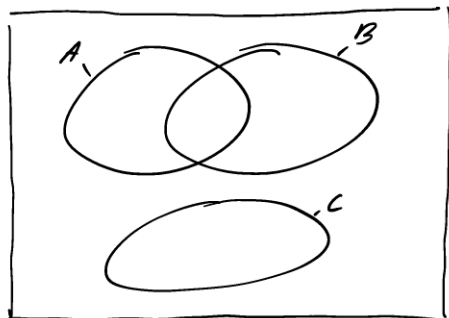


Nella situazione più generale, tre eventi si intersecano come nella figura a sinistra. Nel nostro caso, però, sappiamo che C è incompatibile con $A \cup B$,

ossia $Pr((A \cup B) \cap C) = 0$, che si traduce nel fatto che la regione tratteggiata qui a destra ha probabilità nulla. Pos-



siamo quindi sempli-

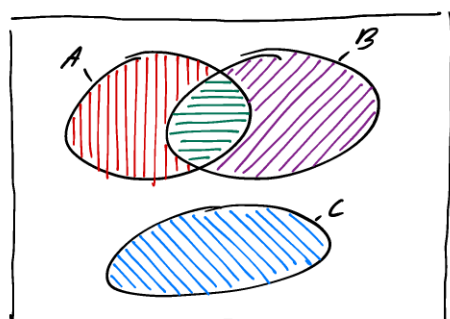
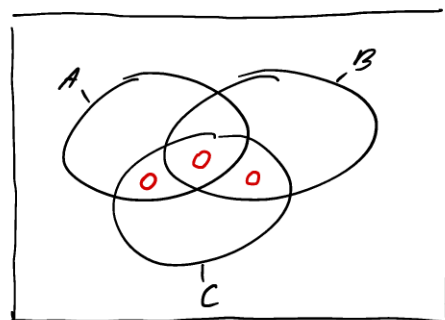


ficare il disegno supponendo che C non tocchi $A \cup B$. Ora lo spazio degli eventi è suddiviso in cinque regioni. Calcolando la probabilità di queste cinque

SITUAZIONE DELL'ESERCIZIO

regioni avremo tutta l'informazione che serve per rispon-

dere a qualunque domanda probabilistica a proposito degli eventi A , B e C . Nota: il metodo funziona anche se non semplifichiamo il disegno (come invece abbiamo fatto). Lavorando sul diagramma di partenza avremmo semplicemente ottenuto, dalla condizione di incompatibilità, che queste tre regioni hanno probabilità 0.



Tornando alla nostra figura, già sappiamo che $Pr(\text{green}) = Pr(C) = 0.1$. Inoltre $\text{green} = A \cap B$, quindi, siccome A e B sono indipendenti, $Pr(\text{green}) = Pr(A \cap B) = Pr(A) \cdot Pr(B) = 0.2$.

Adesso possiamo calcolare $Pr(\text{red})$ osservando che A è l'unione delle due regioni incompatibili red e green , quindi:

$$Pr(\text{red}) = Pr(A) - Pr(\text{green}) = 0.2$$

Allo stesso modo

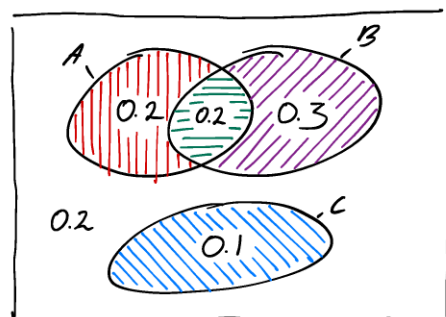
$$Pr(\text{purple}) = Pr(B) - Pr(\text{green}) = 0.3$$

Infine, la probabilità della zona esterna è

$$Pr(\text{white}) = 1 - Pr(\text{red}) - Pr(\text{green}) - Pr(\text{purple}) - Pr(\text{blue}) = 0.2$$

Questa è quindi la situazione descritta dall'esercizio.

La prima domanda ci chiede quale sia la probabilità di $A \cup B \cup C$. Questo



evento coincide con l'unione delle aree colorate, quindi

$$\boxed{Pr(A \cup B \cup C)} = Pr(\text{red} \cup \text{green} \cup \text{purple} \cup \text{blue}) = \\ = Pr(\text{red}) + Pr(\text{green}) + Pr(\text{purple}) + Pr(\text{blue}) = \boxed{0.8}$$

Per affrontare la seconda domanda dobbiamo capire esattamente che evento sia

$E :=$ "si verifica uno solo fra A e B "

Esaminiamo le aree una per una

Nell'area  A si verifica A e B no, quindi E si verifica.

Nell'area  A e B si verificano entrambi, quindi E non si verifica.

Nell'area  B si verifica B e A no, quindi E si verifica.

Nell'area  e nell'area  né A né B si verifica, per cui neanche E si verifica.

In conclusione $E = \text{red} \cup \text{purple}$. È facile identificare $\bar{E}$:

$\bar{E} = \text{red} \cup \text{green} \cup \text{purple} \cup \text{blue}$. Possiamo allora calcolare

$$\boxed{Pr(E|\bar{E})} = \frac{Pr(E \cap \bar{E})}{Pr(\bar{E})} = \frac{Pr((\text{red} \cup \text{purple}) \cap (\text{red} \cup \text{green} \cup \text{purple} \cup \text{blue}))}{Pr(\text{red} \cup \text{green} \cup \text{purple} \cup \text{blue})} = \\ = \frac{Pr(\text{red} \cup \text{purple})}{Pr(\text{red} \cup \text{green} \cup \text{purple} \cup \text{blue})} = \frac{Pr(\text{red}) + Pr(\text{purple})}{Pr(\text{red}) + Pr(\text{green}) + Pr(\text{purple}) + Pr(\text{blue})} = \\ = \frac{0.5}{0.9} = \boxed{\frac{5}{9}} \quad \text{Nota 1: questo } \frac{5}{9} \text{ è semplicemente } 1 - Pr(\text{blue}).$$

Nota 2: l'intersezione è l'area comune, per esempio

$$(\text{green} \cup \text{white} \cup \text{red}) \cap (\text{red} \cup \text{blue} \cup \text{white}) = \text{white} \cup \text{red}$$

Algebra degli insiemi

Quando si ragiona a proposito di insiemi (o eventi che sono semplicemente insiemi di eventi elementari) conviene tenere a mente alcune formule che riassumono in regole algebriche certi ragionamenti che si incontrano di frequente.

• Regole ovvie

$$A \cup B = B \cup A \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$$

$$A \cap B = B \cap A \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$$

Ossia: l'ordine delle unioni non cambia il risultato

l'ordine delle intersezioni non cambia il risultato

Attenzione: in questa regola non si mescolano unioni e intersezioni!

• Regole non ovvie

$\overline{\overline{A}} = A$ Il complementare del complementare di un insieme è l'insieme stesso

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad \text{"leggi di De Morgan"}$$

Il complementare di un'unione è l'intersezione dei complementari e, viceversa, il complementare di un'intersezione è l'unione dei complementari.

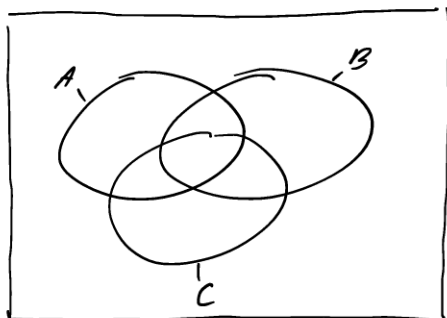
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Queste ultime regole si chiamano leggi distributive per via dell'affinità formale con la proprietà distributiva

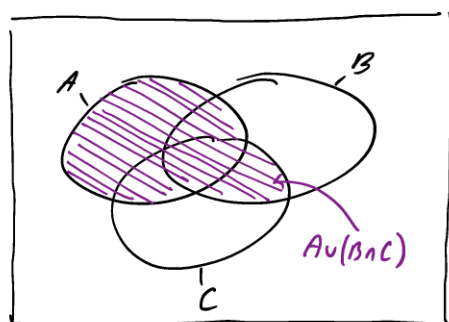
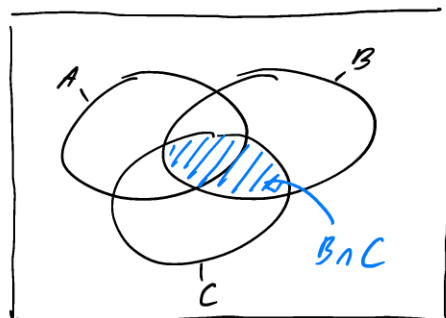
$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$$

Come esempio vediamo il ragionamento che giustifica la legge $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Partiamo dalla situazione generale di tre insiemi A, B e C ,



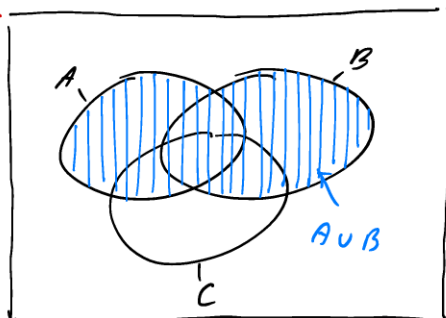
e determiniamo quali aree costituiscono i due membri dell'equazione. Studiando il membro di sinistra,

vediamo che $(B \cap C)$ è l'area tratteggiata a destra, quindi $A \cup (B \cap C)$ è

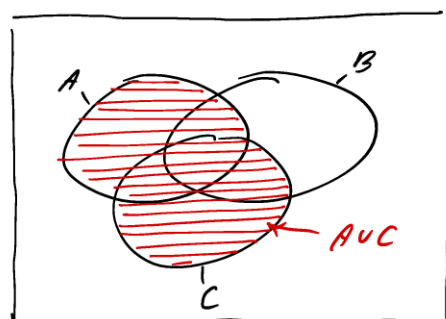


l'area indicata nella figura di sinistra.

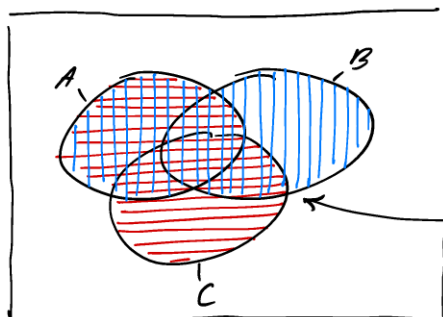
Se ora tratteggiamo $(A \cup B)$ e $(A \cup C)$,



quindi sovrapponiamo le due figure per rivelare l'intersezione (l'area coperta da entrambi i tratteggi) vediamo che questa coincide con



l'area $A \cup (B \cap C)$ del diagramma precedente.



$$\text{[Cross-hatch pattern]} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Il trucco del complementare

Consideriamo il seguente esercizio: si lanciano 6 monete indipendenti ed egue ($p. \text{ testa} = p. \text{ croce} = 0.5$).
Che probabilità c'è che almeno uno dei risultati sia testa?

Potremmo affrontare l'esercizio elencando tutte le possibili sequenze di 6 risultati, ma queste sono $2^6 = 64$ e c'è un metodo più rapido.

Trucco del complementare: l'evento richiesto

$E = \text{"c'è almeno una testa fra i risultati"}$

è il complementare di

$\bar{E} = \text{"tutti i risultati sono croce"}$

calcoliamo quindi $Pr(\bar{E})$ e troveremo la probabilità richiesta mediante la formula $Pr(E) = 1 - Pr(\bar{E})$.

Per calcolare $Pr(\bar{E})$ ci basta osservare che

$$\bar{E} = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6$$

dove indichiamo con C_n l'evento "l' n -esima moneta fa croce" (infatti $\bar{E}$ si verifica se si verifica C_1 , e si verifica C_2 , e etc. fino a C_6 : insieme, la e è rappresentata dall'intersezione).

Per dato dell'esercizio, gli eventi C_i sono indipendenti,

$$P_n(\bar{E}) = P_n[C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_6] = P_n(C_1) \cdot P_n(C_2) \cdot \dots \cdot P_n(C_6) = \left(\frac{1}{2}\right)^6$$

Di conseguenza $\boxed{Pr(E)} = 1 - P_n(\bar{E}) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \boxed{\frac{63}{64}}$.

Esercizio

Calcolare la probabilità che su tre lanci di un dado da gioco si presentino almeno un 5 oppure un 6.

Soluzione

Procedendo come nell'esercizio precedente otteniamo

$$\text{probabilità} = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^{\overset{\text{numero dei lanci}}{3}} = \frac{19}{27}$$

$\uparrow$
probabilità che ciascuno dei
lanci non scaccia né 5 né 6

Esercizio

A.3 – Vengono scelte, a caso, indipendentemente e uniformemente sulla popolazione, cinque tredicenni e cinque quindicenni. Che probabilità c'è che la ragazza più alta di queste dieci superi i 170 cm di statura?

Dati: la probabilità che una quindicenne scelta uniformemente superi i 170 cm di statura è del 10%, la probabilità che una tredicenne scelta uniformemente superi i 170 cm è del 3%.

Soluzione

L'evento richiesto

E = "la ragazza più alta supera i 170 cm di statura"

può essere espresso più convenientemente con le parole

E = "una delle ragazze supera i 170 cm di statura"

l'evento complementare è quindi

$\bar{E}$ = "tutte le ragazze hanno statura < 170 cm"

e possiamo vedere quest'ultimo evento come l'intersezione

$\bar{E} = Q \cap T$ dei due eventi indipendenti:

Q = "le cinque quindicenni hanno tutte statura < 170 cm"

T = "le cinque tredicenni hanno tutte statura < 170 cm"

Le probabilità di questi ultimi si calcolano al modo degli esercizi precedenti:

$$Pr(Q) = (1 - 0.1)^5$$

↑
pr. statura ≥ 170 cm
è 10% per le quindicenni

$$Pr(T) = (1 - 0.03)^5$$

↑
pr. statura ≥ 170 cm
è 3% per le tredicenni

Quindi

$$[Pr(\bar{E}) = 1 - Pr(E) = 1 - Pr(Q) \cdot Pr(T) = \boxed{1 - 0.9^5 \cdot 0.97^5 \approx 0.493}]$$

Esercizio Si lancia quattro volte (indipendenti) un dado da gioco. Che probabilità c'è che fra i quattro risultati ve ne siano due uguali? Nota: in realtà abbiamo risolto questo esercizio alla lezione precedente, però la soluzione, che è un po' complicata, si capisce meglio alla luce degli esempi visti qui.

Soluzione

Anche in questo caso conviene indagare l'evento complementare, ossia che i quattro risultati siano tutti diversi.

Consideriamo i tre eventi

D_2 = "il secondo dado è diverso dal primo"

D_3 = "il terzo dado è diverso da ciascuno dei primi due"

D_4 = "il quarto dado è diverso da ciascuno dei primi tre"

Il complementare dell'evento cercato è $\bar{E} = D_4 \cap D_3 \cap D_2$.

Chiaramente $Pr(D_2) = \frac{5}{6}$ (detto x_1 il primo risultato, D_2 si verifica per i 5 su 6 possibili risultati del secondo dado che differiscono da x_1).

Allo stesso modo $Pr(D_3 | D_2) = \frac{4}{6}$ (infatti, se assumiamo che D_2 si verifichi, allora i due primi risultati, x_1 e x_2 , sono diversi, quindi D_3 si verifica nei 4 casi su 6 in cui il terzo risultato non è né x_1 , né x_2).

Siccome

$$Pr(D_3 | D_2) = \frac{Pr(D_3 \cap D_2)}{Pr(D_2)}$$

Otteniamo $Pr(D_3 \cap D_2) = Pr(D_3 | D_2) \cdot Pr(D_2) = \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6}$

Finalmente $Pr(D_4 | (D_3 \cap D_2)) = \frac{3}{6}$ (per lo stesso ragionamento)
queste parentesi non sono necessarie

Quindi

$$\begin{aligned} Pr(\bar{E}) &= 1 - Pr(D_4 \cap D_3 \cap D_2) = 1 - Pr(D_4 | D_3 \cap D_2) \cdot Pr(D_3 \cap D_2) = \\ &= 1 - \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{13}{18} \end{aligned}$$

fine l.31

Esercizio non esposto a lezione

Esercizio B dalla prova scritta del 31-I-2019

Il *mean time between failures* (MTBF) è un parametro di affidabilità degli apparati tecnologici. Il MTBF di un dispositivo è il tempo medio che intercorre fra due guasti successivi del dispositivo, supponendo che ogni guasto sia immediatamente riparato. Indichiamo con $MTBF_X$ il MTBF di un certo sistema X; e indichiamo con p_X la probabilità che il sistema X si guasti in ogni data ora di funzionamento (probabilità che assumiamo costante). Allora vale la relazione (dove h = "ore")

$$p_X = 1 - e^{-\frac{1h}{MTBF_X}}$$

Supponiamo, adesso, di avere una macchina M che è costituita da due parti indipendenti fra loro: A e B. Se una qualunque delle due parti si guasta, allora la macchina, nel suo complesso, è guasta. Il MTBF delle parti è:

$$MTBF_A = 100\,000\text{ h} \qquad MTBF_B = 33\,000\text{ h}$$

- B.1 – Indichiamo con $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{M}$ gli eventi che rispettivamente A, B e M si guastino in una certa ora di lavoro. Quale relazione lega questi eventi? Usa la formula data nel testo per calcolare p_A e p_B , desumi p_M , quindi determina $MTBF_M$. Esprimi il tuo risultato con due cifre significative di precisione. (*Suggerimento: verifica il risultato con la formula al punto B.3, se viene diverso allora hai sbagliato qualcosa.*)
- B.2 – Supponiamo che l'evento che una macchina si guasti durante una certa ora sia indipendente dagli eventi che si guasti in una qualunque altra ora. Quale è la probabilità che la macchina M subisca almeno un guasto durante 24 ore di lavoro? Quante ore di lavoro servono perché vi sia una probabilità del 50% che M si guasti?
- B.3 – La formula seguente lega il MTBF di M a quelli di A e di B.

$$MTBF_M = \frac{1}{\frac{1}{MTBF_A} + \frac{1}{MTBF_B}}$$

Dimostra questa formula (per esempio eseguendo i calcoli del punto B.1 in maniera letterale, ma non è l'unico modo). Quale formula va usata per una macchina costituita da tre parti indipendenti, e perché?

SOLUZIONE

- B.1 – L'evento $\mathcal{M}$ si verifica quando almeno uno fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ si verifica, si tratta quindi, per definizione, dell'unione $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Le probabilità p_A e p_B sono semplicemente date dalla formula del testo

$$p_A = 1 - e^{-\frac{1h}{100\,000h}} \sim 1.000 \cdot 10^{-5}$$

$$p_B = 1 - e^{-\frac{1h}{33\,000h}} \sim 3.030 \cdot 10^{-5}$$

Per la probabilità p_M abbiamo

$$p_M = 1 - e^{-\frac{1h}{MTBF_M}}$$

$$e^{-\frac{1h}{MTBF_M}} = 1 - p_M$$

$$-\frac{1h}{MTBF_M} = \log_e(1 - p_M)$$

$$MTBF_M = \frac{1h}{-\log(1 - p_M)} \sim 25\,000$$

** Nota alla pag. seguente*

$\square^c$ e $\square$ hanno lo stesso significato (il complementare)

B.2 – La probabilità che la macchina non subisca guasti durante n ore è, per l'indipendenza, la probabilità che non ci siano guasti in una data ora, elevata alla n -esima potenza. Si tratta, infatti, di fare l'intersezione degli eventi indipendenti "non ci sono guasti nella prima ora", e "... nella seconda ora", etc. Quindi, detta p_n la probabilità di avere almeno un guasto in un periodo di n ore, abbiamo

$$1 - p_n = (1 - p_M)^n$$

da cui si ricava immediatamente

$$p_{24} = 1 - (1 - p_M)^{24} \sim 9.668 \cdot 10^{-4}$$

Il numero di ore necessarie per avere una probabilità di guasto del 50% è il valore di n tale che $p_n = 0.5$, ossia

$$(1 - p_M)^n = 0.5$$

$$n = \frac{\log(0.5)}{\log(1 - p_M)} \sim 17\,200$$

$\log((1 - p_M)^n) = \log(0.5)$
 $n \cdot \log(1 - p_M)$

B.3 – Riprendendo dalla formula

$$p_M = 1 - (1 - p_A)(1 - p_B)$$

ricavata al punto B.1, e sostituendo le espressioni per p_A , p_B , e p_M in termini dei MTBF, otteniamo

$$1 - e^{-\frac{1h}{MTBF_M}} = 1 - e^{-\frac{1h}{MTBF_A}} e^{-\frac{1h}{MTBF_B}}$$

$$e^{-\frac{1h}{MTBF_M}} = e^{-\left(\frac{1h}{MTBF_A} + \frac{1h}{MTBF_B}\right)}$$

da cui, prendendo i logaritmi e moltiplicando per $-1h^{-1}$

$$\frac{1}{MTBF_M} = \frac{1}{MTBF_A} + \frac{1}{MTBF_B}$$

e la formula richiesta segue immediatamente calcolando il reciproco di ambo i membri.

Se la macchina fosse costituita da tre parti A, B, e C, allora dovremmo calcolare la probabilità dell'unione dei tre eventi corrispondenti al guasto di una delle parti, che, come prima, si fa calcolando la probabilità dell'intersezione dei complementari. Otteniamo così

$$1 - p_M = (1 - p_A)(1 - p_B)(1 - p_C)$$

e, sostituendo e semplificando

$$\frac{1}{MTBF_M} = \frac{1}{MTBF_A} + \frac{1}{MTBF_B} + \frac{1}{MTBF_C}$$

$$MTBF_M = \frac{1}{\frac{1}{MTBF_A} + \frac{1}{MTBF_B} + \frac{1}{MTBF_C}}$$

* Attenzione: questo calcolo nasconde una piccola trappola. L'esercizio chiede $MTBF_H$ con due cifre significative di precisione: secondo le regole generali, se facciamo il calcolo con tre cifre significative (sebbene quattro sarebbero meglio) dovremmo ottenere il risultato corretto. Proviamo!

$$P_H = 4.030 \cdot 10^{-5}$$

$$MTBF_H = \frac{1h}{-\log(1-P_H)} = \frac{1h}{-\log(1-4.030 \cdot 10^{-5})} \approx \frac{1h}{-\log(0.999)} \approx 1000h$$

0,9999597 troncato* a 3 c.s. ↑

* il troncamento stesso è imperfetto: converrebbe approssimare.

Questo risultato è **SBAGLIATO**.

Come capire, intanto, che qualcosa non torna? Nel contesto dell'esercizio, non è difficile: basta seguire il suggerimento e applicare la formula al punto B.3.

$$MTBF_H = \frac{1}{\frac{1}{MTBF_A} + \frac{1}{MTBF_B}} = \frac{1}{\frac{1}{100'000h} + \frac{1}{35'000h}} \approx 25'000h$$

Se non avessimo avuto il suggerimento, però, avremmo potuto ripetere il calcolo con più cifre. Per esempio, usando quattro cifre significative per $1-4.030 \cdot 10^{-5}$ otteniamo

$$MTBF_H \approx \frac{1h}{-\log(0.9999)} \approx 10'000h$$

Inaspettatamente, questo risultato differisce da quello ottenuto con tre cifre. Chiaramente il risultato precedente è screditato.

to, ma anche di questo c'è poco da fidarsi; perché, come il conto è cambiato aggiungendo una cifra significativa, potrebbe farlo di nuovo aggiungendone un'altra. Proviamo con cinque...

$$MTBF_n = \dots \approx \frac{1 \text{ h}}{-\log(0.99996)} \approx 25000 \text{ h}$$

↖ approssimazione corretta

È successo di nuovo. Ora, però, aggiungere altre cifre non cambia il risultato significativamente

$$MTBF_n = \dots \approx \frac{1 \text{ h}}{-\log(0.9999997)} \approx 24813 \text{ h}$$

Quindi il valore corretto, approssimato a due cifre significative, è 25'000 h. Però, perché la teoria, secondo la quale ci aspettavamo di ottenere due cifre significative del risultato facendo i calcoli con tre — e anche con quattro — cifre nei passaggi intermedi, ha fallito?

La lezione che è importante imparare da questo calcolo è che le cifre significative non sono che uno strumento rozzo, che, sebbene di rado, può rivelarsi imperfetto.

Ma cosa è andato storto? Pensiamo al procedimento aritme-

$\begin{array}{r} 1.00000000 \\ 0.00004030 \\ \hline 0.99995970 \end{array}$ tico per calcolare $1 - 4.030 \cdot 10^{-5}$. Come si vede l'informazione contenuta nelle cifre **4.030** produce le cifre **5970** del risultato, mentre i **9** precedenti agiscono semplicemente come dei segna-posto: sarebbero stati

gli stessi anche se al posto della mantissa **4.030** ci fosse stata qualunque altra cosa. Quindi va da sé che, troncando la differenza **0.99995970** ai 9 soltanto, si getta via tutta l'informazione contenuta nel dato.

Il modo più comune per cadere in una trappola come questa è abbassare la guardia. Uno fa il calcolo con 0.999, ottiene 1000 h, e procede per la sua strada ignaro del fatto che il ponte che ha progettato crollerà, e, quel che è peggio, lui non passerà l'esame.

C'è di peggio: se volendo, erroneamente, lavorare con tre cifre significative avessimo approssimato correttamente il numero 0.99995970 a 1.00 avremmo ottenuto

$$MTBF_n = \dots \approx \frac{1h}{-\log(1.00)} = \frac{1h}{0} \quad \begin{array}{l} \text{ops!} \\ \text{dividere per zero} \\ \text{non ha senso.} \end{array}$$

Questo intoppo avrebbe dovuto metterci subito sull'avviso che qualcosa non sta funzionando come ci aspetteremmo. La reazione sbagliata sarebbe stata scrivere uno **0.99** al posto di quel **1.00** per poter andare avanti. Quando ci si rende conto di non capire cosa stia succedendo, quasi mai affidarsi deliberatamente ad una mossa che si sa essere sbagliata è una buona idea. La reazione giusta è invece di indagare la situazione col ragionamento e con l'esperimento.

Esercizio (di introduzione al concetto di variabile aleatoria)

Si lanciano tre dadi indipendenti, qual è la probabilità che la somma dei primi due non superi il terzo?

In teoria, potremmo affrontare questo esercizio elencando tutti gli elementi dello spazio di probabilità Ω , che, in questo contesto, contiene tutte le possibili combinazioni di tre risultati fra 1 e 6 — per esempio le combinazioni 111, 112, 113, 114, 115, 116, etc.. Quante combinazioni ci sono? Il primo dado può cadere su sei facce diverse. Per ciascuna di queste, ci sono sei possibili risultati del secondo dado; abbiamo quindi $6 \cdot 6$ combinazioni dei primi due risultati. Infine, ciascuna di queste può essere completata dal sesto risultato in sei maniere diverse: totale $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ combinazioni. (In generale, con n dadi, sarebbero state 6^n .) Questo numero di casi è forse gestibile, se non c'è altra scelta, però, potendo, conviene cercare una via più spiccia.

Idea chiave: chiamiamo S la somma dei risultati dei primi due dadi e dividiamo i casi a seconda dei possibili valori di S — vedremo poi che gli oggetti come S si chiamano "variabili aleatorie" e quello che stiamo facendo è studiare la "legge" della variabile aleatoria S .

La somma S vale al minimo 2 (caso $\square\square$) e al massimo 12 (caso $\blacksquare\blacksquare$): con che probabilità assume ciascuno dei valori fra 2 e 12?

$$Pr(S=2) = \frac{1}{36} \quad S=2 \Leftrightarrow \text{i due dadi sono } \square\square$$

un caso su 36 equiprobabili

$$Pr(S=3) = \frac{2}{36} \quad S=3 \Leftrightarrow \text{i dadi sono } \square\square \text{ o } \square\blacksquare$$

due casi su 36 equiprobabili

$$Pr(S=4) = \frac{3}{36} \quad \text{casi } \square\square, \blacksquare\square, \square\blacksquare$$

$$Pr(S=5) = \frac{4}{36} \quad \text{casi } \square\blacksquare, \blacksquare\square, \square\blacksquare, \blacksquare\blacksquare$$

$$Pr(S=6) = \frac{5}{36} \quad \text{casi } \square\blacksquare, \blacksquare\square, \square\blacksquare, \blacksquare\blacksquare, \square\blacksquare$$

Potremmo proseguire calcolando le probabilità degli eventi $S=7, 8, 9$, etc. però ricordiamo che stiamo cercando la probabilità dell'evento

$E = "S \text{ non supera il terzo dado}"$

Se $S \geq 7$, allora è gioco forza che S superi il valore del terzo dado, per cui, in questo caso, E non si può verificare — vedremo infatti che, nel calcolo, le probabilità di $S=7, \dots$ non ci serviranno.

Chiamiamo, ora, C il risultato del terzo dado (questa C è una nuova variabile aleatoria). L'evento richiesto può essere scritto nella forma

$$E = "S \text{ non supera } C"$$

$$= "C=2 \text{ e } S \leq 2 \text{ oppure } C=3 \text{ e } S \leq 3 \text{ oppure } C=4 \text{ e } S \leq 4 \text{ oppure } C=5 \text{ e } S \leq 5 \text{ oppure } C=6 \text{ e } S \leq 6"$$

$$= "C=2 \text{ e } S \leq 2" \cup "C=3 \text{ e } S \leq 3" \cup "C=4 \text{ e } S \leq 4" \cup "C=5 \text{ e } S \leq 5" \cup "C=6 \text{ e } S \leq 6"$$

$$= (\{C=2\} \cap \{S \leq 2\}) \cup (\{C=3\} \cap \{S \leq 3\}) \cup (\{C=4\} \cap \{S \leq 4\}) \cup (\{C=5\} \cap \{S \leq 5\}) \cup (\{C=6\} \cap \{S \leq 6\})$$

Le **unioni** sono chiaramente fra eventi incompatibili, perché gli eventi $\{C=2\}$, $\{C=3\}$, etc. sono incompatibili, inoltre le **intersezioni** sono fra eventi indipendenti; perché C dipende solo dal terzo dado, mentre S dipende solo dai primi due. Di conseguenza

$$\begin{aligned} Pr(E) = & Pr(C=2) \cdot Pr(S \leq 2) + Pr(C=3) \cdot Pr(S \leq 3) + \\ & Pr(C=4) \cdot Pr(S \leq 4) + Pr(C=5) \cdot Pr(S \leq 5) + \\ & Pr(C=6) \cdot Pr(S \leq 6) \end{aligned}$$

Per fare questo calcolo ci servono, innanzitutto, le probabilità degli eventi $C=2, 3$, etc., che sono immediatamente note ricordando che C è il risultato del lancio di un dado:

$$Pr(C=1) = Pr(C=2) = Pr(C=3) = \dots = Pr(C=6) = \frac{1}{6}$$

Per quanto riguarda $S \leq 2, 3, \text{etc.}$ abbiamo:

$$\{S \leq 2\} = \{S = 2\}$$

$$\{S \leq 3\} = \{S = 2\} \cup \{S = 3\}$$

$$\{S \leq 4\} = \{S = 2\} \cup \{S = 3\} \cup \{S = 4\}$$

$$\{S \leq 5\} = \{S = 2\} \cup \{S = 3\} \cup \{S = 4\} \cup \{S = 5\}$$

$$\{S \leq 6\} = \{S = 2\} \cup \{S = 3\} \cup \{S = 4\} \cup \{S = 5\} \cup \{S = 6\}$$

Gli eventi uniti sono chiaramente incompatibili, quindi:

$$P_n(S \leq 2) = P_n(S = 2) = \frac{1}{36}$$

$$P_n(S \leq 3) = P_n(S = 2) + P_n(S = 3) = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} = \frac{3}{36}$$

$$P_n(S \leq 4) = \dots = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36}$$

$$P_n(S \leq 5) = \dots = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} = \frac{10}{36}$$

$$P_n(S \leq 6) = \dots = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36} + \frac{5}{36} = \frac{15}{36}$$

Per cui, in definitiva

$$P_n(E) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{6}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{10}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{15}{36} = \frac{35}{216}$$

Nota: effettivamente i casi sono 35, ma elencarli è scomodo:



Le variabili aleatorie

Supponiamo dato uno spazio di probabilità Ω (cioè l'insieme degli eventi elementari con le loro probabilità) chiamiamo **variabile aleatoria** semplicemente una funzione da Ω a $\mathbb{R}$.

Eg: Lancio di un dado. Lo spazio di probabilità è

$$\Omega = \{ \square, \square, \square, \square, \square, \square \} \text{ con } p(\square) = p(\square) = \dots = \frac{1}{6}$$

Potremmo considerare, per esempio, la variabile aleatoria X che rappresenta il risultato del dado, per cui:
 $X(\square) = 1 \quad X(\square) = 2 \quad X(\square) = 3 \quad \text{etc.}$

↳ Nota: solitamente indicheremo le variabili aleatorie con lettere maiuscole dell'alfabeto latino, ma non c'è alcun obbligo di seguire questa convenzione.

Eg: Estrazione di una carta da un mazzo di 40 carte

$$\Omega = \{ 2\clubsuit, 3\clubsuit, 4\clubsuit, \dots, 7\clubsuit, J\clubsuit, Q\clubsuit, K\clubsuit, A\clubsuit, 2\diamond, \dots, A\diamond, 2\heartsuit, \dots, 2\spadesuit \}$$

$$p(2\clubsuit) = p(3\clubsuit) = \dots = \frac{1}{40}$$

Per esempio possiamo considerare la variabile aleatoria X che associa ad ogni carta il suo punteggio a briscola

$$X(2\clubsuit) = X(4\clubsuit) = \dots = X(7\clubsuit) = X(2\diamond) = \dots = X(7\diamond) = X(2\heartsuit) = \dots = X(2\spadesuit) = \dots = 0$$

$$X(J\clubsuit) = X(J\diamond) = X(J\heartsuit) = X(J\spadesuit) = 2 \quad X(Q\clubsuit) = \dots = X(Q\spadesuit) = 3$$

$$X(K\clubsuit) = \dots = 4 \quad X(3\clubsuit) = \dots = 10 \quad X(A\clubsuit) = \dots = 11$$

Definizione: la **legge** p_X della variabile aleatoria X è la funzione che associa ad ogni possibile valore di X la sua probabilità.

Eg. (dado)

Facendo riferimento all'esempio del dado di prima abbiamo

a	1	2	3	4	5	6	← possibili valori di X
$P_X(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$X = \text{risultato del lancio}$

↑
probabilità di ciascun valore

Siccome $p(\square) = p(\square) = \dots = \frac{1}{6}$, vediamo che

$$P_X(1) = P_X(X=1) = p(\square) = \frac{1}{6}$$

$$P_X(2) = P_X(X=2) = p(\square) = \frac{1}{6} \quad \text{etc.}$$

Eg. (briscola)

La legge della variabile aleatoria X che rappresenta il punteggio di una carta scelta a caso è:

a	0	2	3	4	10	11	←
$P_X(a)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	Nota: la somma di queste probabilità è sempre 1

$$P_X(0) = \frac{1}{2} \quad \text{Perché ci sono 20 carte che valgono 0 su 40 (il 2, 4, 5, 6 e 7 di ogni seme): } \frac{20}{40} = \frac{1}{2}.$$

$$P_X(2) = \frac{1}{10} \quad \text{Perché ci sono 4 carte che valgono 2 su 40 (i quattro 3): } \frac{4}{40} = \frac{1}{10}.$$

$$P_X(3) = P_X(4) = P_X(10) = P_X(11) = \frac{1}{10} \quad \text{Allo stesso modo.}$$

Definizione: il **valore atteso** (detto anche **media** o **speranza**) di una variabile aleatoria X è la quantità

$$E(X) = \sum_a a \cdot p_X(a)$$

↑ somma al variare di a fra i possibili valori assunti da X

Eg. (dado)

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot p_X(1) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) + 4 \cdot p_X(4) + 5 \cdot p_X(5) + 6 \cdot p_X(6) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3.5 \end{aligned}$$

Nota: 3.5 coincide con la media aritmetica delle sei facce del dado $\frac{1+2+3+4+5+6}{6}$. Questo avviene perché i sei risultati 1, 2, ..., 6 sono equiprobabili.

Eg. (briscola)

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \cdot p_X(0) + 2 \cdot p_X(2) + 3 \cdot p_X(3) + 4 \cdot p_X(4) + 10 \cdot p_X(10) + 11 \cdot p_X(11) \\ &= 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 10 \cdot \frac{1}{10} + 11 \cdot \frac{1}{10} = 3 \end{aligned}$$

Nota: detto informalmente, ci sono 120 punti in totale nel mazzo, e 40 carte, quindi ogni carta vale, in media $\frac{120}{40} = 3$ punti.

Esercizio Nella situazione del dado, calcolare $E(X^2)$.

a^2	1	4	9	16	25	36	← possibili valori di X^2
a	1	2	3	4	5	6	← possibili valori di X
$p_X(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

Vediamo che la legge di X^2 (la funzione che associa i possibili valori di X^2 alle loro probabilità) è data dalla prima o la terza riga della tabella

a	1	4	9	16	25	36	← possibili valori di X^2
$P_{X^2}(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	← rispettive probabilità

Quindi

$$\boxed{E(X^2)} = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} + 16 \cdot \frac{1}{6} + 25 \cdot \frac{1}{6} + 36 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{91}{6}}$$

Esercizio Nella situazione del dado, calcolare $E(6X - X^2)$

Questo esercizio aggiunge una piccola complicazione.

$6a - a^2$	5	8	9	8	5	0	← possibili valori di $6X - X^2$
a	1	2	3	4	5	6	← possibili valori di X
$P_X(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	

In questo caso, il medesimo valore della variabile aleatoria $6X - X^2$ può corrispondere a più di un valore della variabile aleatoria X . Vediamo che le probabilità si sommano.

$$6X - X^2 = 0 \Leftrightarrow X = 6 \text{ quindi } Pr(6X - X^2 = 0) = Pr(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

$$6X - X^2 = 5 \Leftrightarrow X = 1 \text{ o } X = 5 \text{ quindi}$$

$$Pr(6X - X^2 = 5) = Pr(\{X = 1\} \cup \{X = 5\}) = Pr(X = 1) + Pr(X = 5) =$$

Gli eventi $\{X = 1\}$ e $\{X = 5\}$ sono incompatibili perché X non può valere 1 e 5 allo stesso tempo

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}.$$

$$6X - X^2 = 8 \Leftrightarrow X = 2 \text{ o } X = 4 \text{ quindi } Pr(6X - X^2 = 8) = \frac{\text{come prima}}{2} = \frac{2}{6}.$$

$$6X - X^2 = 9 \Leftrightarrow X = 3 \text{ quindi } Pr(6X - X^2 = 9) = \dots = \frac{1}{6}.$$

$$\text{Riassumendo } Pr(6X - X^2 = 0) = \frac{1}{6} \quad Pr(6X - X^2 = 5) = \frac{2}{6}$$

$$Pr(6X - X^2 = 8) = \frac{2}{6} \quad Pr(6X - X^2 = 9) = \frac{1}{6}$$

Quindi la legge di $6X - X^2$ è rappresentata dalla tabella

a	0	5	8	9	← possibili valori di $6X - X^2$
$P_{6X - X^2}(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	← rispettive probabilità

$$\text{E abbiamo } \boxed{E(6X - X^2)} = 0 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{2}{6} + 8 \cdot \frac{2}{6} + 9 \cdot \frac{1}{6} = \boxed{\frac{35}{6}}$$

Osservazione Il primo esercizio mostra che, in generale, $E(X^2)$ non coincide con $(E(X))^2$ — la media dei quadrati non è il quadrato della media. Vale, anzi, il risultato più forte che $E(X^2) \geq (E(X))^2$ e i due numeri sono uguali solo se X è una costante.

Questo giustifica l'idea intuitiva che la differenza fra $E(X^2)$ e $(E(X))^2$ misura quanto la variabile aleatoria X è dispersa intorno al suo valore medio — per esempio, se X è costante, allora non assume valori affatto dispersi, infatti, in questo caso, $E(X^2) - (E(X))^2 = 0$.

Definizione

identità algebrica: sempre vera

La quantità $Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E((X - E(X))^2)$

è detta **varianza** della variabile aleatoria X . La quantità

$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$ è detta **deviazione standard** di X .

Nota. $\text{Var}(X)$ e $\sigma(X)$ contengono la medesima informazione: si ottengono l'una dall'altra con una radice quadrata o un quadrato. Se X ha delle dimensioni fisiche, per esempio X è una lunghezza, un tempo, una temperatura, allora $\text{Var}(X)$ ha le dimensioni del quadrato di X , mentre $\sigma(X)$ ha le stesse dimensioni di X .

$$[\text{Var}(X)] = [X^2] \quad [\sigma(X)] = [X]$$

Per cui, in particolare, ha senso sommare X e $\sigma(X)$.

Fatto. "È molto probabile che la differenza fra X e la sua media $E(X)$ sia dell'ordine di $\sigma(X)$ ". Formalmente,

per esempio

$$\Pr(E(X) - \sqrt{2} \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \sqrt{2} \sigma(X)) \geq \frac{1}{2}$$

È, più in generale

$$\Pr(E(X) - \frac{1}{\sqrt{1-p}} \sigma(X) \leq X \leq E(X) + \frac{1}{\sqrt{1-p}} \sigma(X)) \geq p$$

Eg. (dado)

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \overset{\text{calcolati in precedenza}}{\downarrow} \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}$$

Usando, invece $E((X - E(X))^2) = E((X - 3.5)^2)$ otteniamo

	$(a-3.5)^2$					
	6.25 2.25 0.25 0.25 2.25 6.25					
a	1	2	3	4	5	6
$P_X(a)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$$\frac{35}{12}$$

$$E((X-3.5)^2) = 6.25 \cdot \frac{1}{6} + 2.25 \cdot \frac{1}{6} + 0.25 \cdot \frac{1}{6} + 0.25 \cdot \frac{1}{6} + 2.25 \cdot \frac{1}{6} + 6.25 \cdot \frac{1}{6} = \frac{17.5}{6}$$

ad ogni modo $\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1.71$.

Possiamo verificare che

4 casi: $X = 2, 3, 4, 5$

$$P_n(3.5 - 1.71\sqrt{2} \leq X \leq 3.5 + 1.71\sqrt{2}) = \\ = P_n(1.08 \leq X \leq 5.92) = \frac{4}{6} \gg \frac{1}{2}$$

finir 1.32

Esercizio Si lanciano tre monete indipendenti ed egue.

Consideriamo le seguenti variabili aleatorie

X = numero di teste fra le prime due monete

Y = numero di teste fra le seconde due monete

Trovare la legge e calcolare la media di $X, Y, X+Y$ e $X \cdot Y$.

Soluzione Nel nostro spazio di probabilità, ci sono 8 casi equiprobabili: $\Omega = \{ccc, tcc, ctc, ttc, cct, tct, ctt, ttt\}$.

Ciascuno di questi casi ha probabilità $\frac{1}{8}$. Studiamo i valori delle variabili aleatorie richieste in ciascun caso

	ccc	tcc	ctc	ttc	cct	tct	ctt	ttt
X	0	1	1	2	0	1	1	2
Y	0	0	1	1	1	1	2	2
$X+Y$	0	1	2	3	1	2	3	4
$X \cdot Y$	0	0	1	2	0	1	2	4

Le leggi richieste sono quindi

a	0	1	2
$P_X(a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

a	0	1	2
$P_Y(a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

a	0	1	2	3	4
$P_{X+Y}(a)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

due casi: ccc cct
quattro casi: ctc tcc ctt tct
due casi: ttc ttt

a	0	1	2	4
$P_{X \cdot Y}(a)$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Ora è facile calcolare le medie

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$E(Y) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$E(X+Y) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = 2$$

$$E(X \cdot Y) = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{1}{4} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{4}$$

Osservazioni sull'esercizio

- Le due variabili aleatorie X e Y hanno la stessa legge. Questo non stupisce perché entrambe rappresentano il totale di teste su due lanci indipendenti. Due variabili aleatorie che abbiano la stessa legge si dicono isonyme. È importante notare che, sebbene X e Y siano isonyme, esse non sono la stessa variabile aleatoria — non sono, cioè, identiche, quindi intercambiabili fra loro — per esempio $X+Y$ e $X+X$ non sono la stessa cosa.
- Variabili aleatorie isonyme hanno, ovviamente, lo stesso valore atteso, la stessa varianza e la stessa deviazione standard.
- Non bisogna confondere la variabile aleatoria $X+Y$ con il totale di teste delle tre monete. Per esempio, nel caso TTT, $X+Y$ vale 4, mentre il totale di teste 3.
- $E(X) = E(Y) = 1$, come è ragionevole trattandosi del numero medio di teste su due lanci che fanno testa al 50%.
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ questo è un fatto generale.
- $E(X \cdot Y) \neq E(X) \cdot E(Y)$.

Proprietà di valore atteso, varianza e deviazione standard

Indicando con X e Y variabili aleatorie, e con c una costante

$$\begin{array}{lll} E(c) = c & E(c \cdot X) = c \cdot E(X) & E(X+Y) = E(X) + E(Y) \\ \text{Var}(c) = 0 & \text{Var}(c \cdot X) = c^2 \text{Var}(X) & \text{Var}(c+X) = \text{Var}(X) \\ \underbrace{\sigma(c) = 0}_{\blacktriangle} & \underbrace{\sigma(c \cdot X) = c \cdot \sigma(X)}_{\blacksquare} & \underbrace{\sigma(c+X) = \sigma(X)}_{\bullet} \end{array}$$

▲ $E(c) = c$ dice che se abbiamo una variabile aleatoria che, in realtà, è una costante $\longrightarrow$ assume lo stesso valore, c , in tutti i casi $\longrightarrow$ il valore atteso di questa variabile è, ovviamente, proprio c . Nel linguaggio comune, diremmo che una simile variabile non è aleatoria per niente, ma, come in matematica accettiamo che zero sia una quantità, essenzialmente, perché fa comodo, per la stessa ragione dobbiamo ammettere variabili aleatorie che sono costanti.

■ Queste formule si riferiscono a una variabile aleatoria X scalata del fattore moltiplicativo c . È intuitivo che la media e la deviazione standard $\longrightarrow$ la dispersione di X attorno alla media $\longrightarrow$ scalano come X . Mentre $\text{Var}(_) = (\sigma(_))^2$ scala col quadrato di X . Per meglio capire queste formule è opportuno ricordare che $E(X)$ e $\sigma(X)$ hanno le dimensioni di X mentre $\text{Var}(X)$ ha le dimensioni di X^2 .

- Abbiamo già notato che $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ risolvendo l'esercizio. Non vale però una formula simile per varianza e deviazione standard. Basta pensare ad una qualsiasi variabile aleatoria X e a $Y = -X$. Qualunque sia $\text{Var}(X)$, abbiamo $\text{Var}(Y) = \text{Var}(-1 \cdot X) = (-1)^2 \cdot \text{Var}(X) = \text{Var}(X)$, però $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X-X) = \text{Var}(0) = 0$. Per varianza e deviazione standard abbiamo solo $\text{Var}(c+X) = \text{Var}(X)$ e $\sigma(c+X) = \sigma(X)$, che dicono che traslare una variabile aleatoria di una costante non cambia la sua dispersione.

Variabili aleatorie indipendenti

Le variabili aleatorie X e Y si dicono **indipendenti** se, presi comunque due insiemi di numeri A e B , gli eventi $\{X \in A\}$ e $\{Y \in B\}$ sono indipendenti.

La definizione formale di variabili indipendenti è un po' scomoda. Essa dice che X e Y sono indipendenti se, in qualunque modo uno prenda un evento che dipende solo da X e uno che dipende solo da Y , ottiene sempre due eventi indipendenti. Per verificare l'indipendenza di due variabili aleatorie sarebbe quindi necessario verificare l'indipendenza di una grandissima quantità di eventi.

In pratica, quindi, assumiamo l'indipendenza di variabili aleatorie realizzate da processi scorrelati: lancio

di due dati, due monete, etc.

Fatto Se X e Y sono indipendenti

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y)$$

$$\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$$

Esercizio Si lanciano 10^6 monete indipendenti. Sia X la variabile aleatoria che rappresenta il numero totale di teste. Calcolare $E(X)$ e $\sigma(X)$.

Va da sé che non c'è modo di elencare i 2^{10^6} elementi dello spazio di probabilità, dobbiamo quindi cavarcela sfruttando le proprietà di $E(-)$ e $\sigma(-)$.

Idea chiave: consideriamo 10^6 variabili aleatorie $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{10^6}$, una per ogni moneta, definite da

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima moneta fa testa} \\ 0 & \text{se la } i\text{-esima moneta fa croce} \end{cases}$$

Chiaramente, siccome X è il numero totale di teste

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{10^6}$$

Le variabili X_1, X_2 , etc. sono tutte isonome — valgono 0 con probabilità $\frac{1}{2}$ o 1 con probabilità $\frac{1}{2}$. Quindi:

$$E(X_1) = E(X_2) = \dots = E(X_{10^6}) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{E(X)} = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{10^6}) = \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2}}_{10^6 \text{ addendi}} = \boxed{500\,000}$$

Le variabili X_1, X_2 , etc. sono altresì indipendenti: questo ci permette di calcolare la varianza di X .

$$\text{Var}(X_1) = \text{Var}(X_2) = \dots = E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_{10^6}) = \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{4}}_{10^6 \text{ addendi}} = 250\,000$$

sfruttando l'indipendenza

Di conseguenza $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = 500$

Nota: il numero di teste atteso su un milione di lanci è ovviamente 500 000, ma la deviazione standard solo 500 — un millesimo della media. Questo illustra la legge dei grandi numeri: che il risultato di un gran numero di esperimenti si avvicina al valore atteso al crescere del numero degli esperimenti.

Esercizio Una moneta truccata fa testa con probabilità $\frac{2}{3}$ e croce con probabilità $\frac{1}{3}$. Consideriamo la variabile aleatoria

$$X = \begin{cases} 12 & \text{se la moneta fa testa} \\ 9 & \text{se la moneta fa croce} \end{cases}$$

Calcolare $E(X)$ e $\text{Var}(X)$.

Soluzione (metodo 1)

$$E(X) = 12 \cdot \frac{2}{3} + 9 \cdot \frac{1}{3} = 11$$

$$E(X^2) = 12^2 \cdot \frac{2}{3} + 9^2 \cdot \frac{1}{3} = 123$$

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 2$$

Soluzione (metodo 2)

Definiamo una nuova variabile aleatoria

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{se la moneta fa testa} \\ 0 & \text{se la moneta fa croce} \end{cases}$$

Chiaramente $X = 9 + 3Y$ — infatti se la moneta fa testa $Y = 1$ e $X = 12$: $12 = 9 + 3 \cdot 1$; se fa croce $Y = 0$ e $X = 9$: $9 = 9 + 3 \cdot 0$. Calcoliamo $E(Y)$ e $\text{Var}(Y)$.

$$E(Y) = 1 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$E(Y^2) = 1^2 \cdot \frac{2}{3} + 0^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Var}(Y) = E(Y^2) - (E(Y))^2 = \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Abbiamo quindi

$$E(X) = E(9 + 3Y) = 9 + 3E(Y) = 9 + 3 \cdot \frac{2}{3} = 11$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}(9 + 3Y) = 3^2 \cdot \text{Var}(Y) = 9 \cdot \frac{2}{9} = 2$$

Esercizio. Consideriamo un'estrazione casuale che può sortire due risultati: A con probabilità α , e B con probabilità $1-\alpha$.

1. Calcola, in funzione di α , la probabilità che, ripetendo tre volte indipendenti l'estrazione, vengano in totale due A e una B.

2. Per quale valore di α la probabilità che vengano due A e una B è più grande possibile?

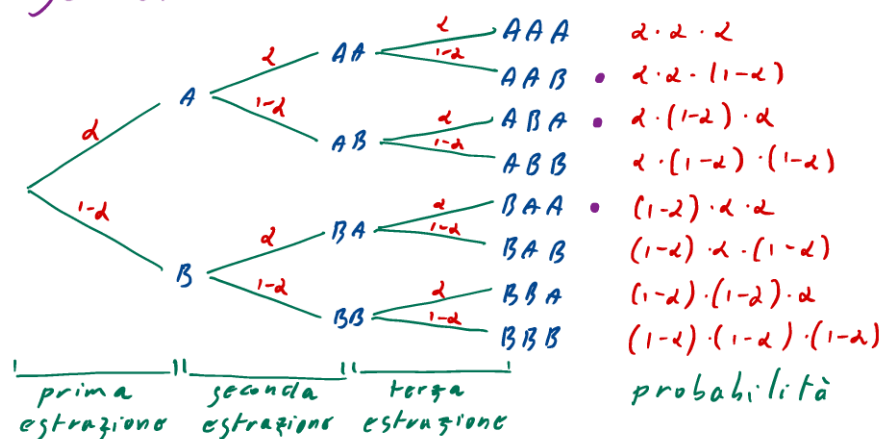
Soluzione

1. Ci sono otto possibili sequenze di tre risultati: l'evento E richiesto è che la sequenza sia AAB o ABA o BAA. La probabilità di ciascuna di queste sequenze è $\alpha \cdot \alpha \cdot (1-\alpha)$.

$$\text{Quindi } \boxed{\Pr(E) = 3 \alpha^2 (1-\alpha)}$$

Nota. Abbiamo già visto diversi modi per enumerare tutte

le possibilità. Un altro modo è tracciare il grafo ad albero delle scelte.



In questo diagramma, la probabilità della combinazione al termine di ogni ramo è il prodotto delle probabilità lungo il ramo. Come si vede, i tre casi favorevoli hanno, ciascuno, probabilità $p^2 \cdot (1-p)$.

2. Per dato del problema, sia p che $1-p$ sono probabilità, quindi i valori ammissibili di p sono i numeri fra 0 e 1. Infatti $0 \leq p \leq 1$ poiché p è una probabilità, e $0 \leq 1-p \leq 1$ poiché $1-p$ è una probabilità. Scindendo quest'ultima nelle due disuguaglianze $0 \leq 1-p$ e $1-p \leq 1$, ed esplicitando p , dalla prima otteniamo $p \leq 1$ e dalla seconda $p \geq 0$, quindi, di nuovo $0 \leq p \leq 1$. Dobbiamo quindi trovare p fra 0 e 1 in cui la funzione $f(p) = 3p^2(1-p)$ è massima. La derivata $f'(p) = 6p - 3p^2$ si annulla in $p=0$ e $p=\frac{2}{3}$, dobbiamo quindi confrontare i punti $p=0, \frac{2}{3}, 1$ (estremi del dominio e punti stazionari). Vediamo che $f(0)=0$,

$f(\frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$, $f(1) = 0$. Quindi la probabilità cercata è massima per $\alpha = \frac{2}{3}$ (e, in questo caso, vale $\frac{4}{9}$).

Nota: concorda con quello che si può intuire che, volendo massimizzare la probabilità di ottenere esattamente due A su tre estrazioni, conviene che la probabilità della A sia $\frac{2}{3}$.

ESERCIZIO B dall'esame del 2.V.2013

Dieci persone, sei donne e quattro uomini, partecipano a quattro lotterie diverse (stocasticamente indipendenti), ciascuna delle quali assegna un premio, con probabilità uniforme, a una delle dieci persone.

B.1 – Quale è la probabilità che tutti i premi vadano alle donne? E la probabilità che nessuno dei premi vada ad una donna?

B.2 – Considera la variabile aleatoria X che rappresenta il numero di premi che vanno, in totale, alle donne. Determina la legge (detta anche distribuzione) di questa variabile aleatoria, e rappresentala mediante un istogramma.

B.3 – Calcola valore atteso e varianza della variabile aleatoria X .

B.1 Chiamando D_1, D_2, D_3 e D_4 gli eventi che una donna vinca rispettivamente la prima, seconda, terza e quarta lotteria, abbiamo

$$P_r(D_1) = P_r(D_2) = P_r(D_3) = P_r(D_4) = \frac{6}{10}$$

Ci è chiesto di trovare la probabilità dell'evento

$D =$ "tutti i premi vanno alle donne"

$=$ "una donna vince la prima lotteria e
una donna vince la seconda lotteria e etc."

$$= D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4$$

Siccome le lotterie sono indipendenti

$$\boxed{Pr(D)} = Pr(D_1) \cdot Pr(D_2) \cdot Pr(D_3) \cdot Pr(D_4) = \left(\frac{6}{10}\right)^4 = \boxed{\frac{1296}{10000}}$$

Per l'evento

ND = "nessuno dei premi va ad una donna"

basta osservare che

ND = "tutti i premi vanno agli uomini"

Ragionando, quindi, come prima, siccome la probabilità che ciascun premio vada ad un uomo è $\frac{4}{10}$

$$\boxed{Pr(ND)} = \dots = \left(\frac{4}{10}\right)^4 = \boxed{\frac{256}{10000}}$$

Attenzione. L'evento ND "nessuno dei premi va ad una donna" NON è il complementare dell'evento D "tutti i premi vanno alle donne". Il complementare dell'evento D è, invece, "almeno un premio non va ad una donna".

B.2 Il metodo più scolastico consiste nell'enumerazione dei sedici casi possibili; per esempio col metodo dell'albero. Indicando con D o U il genere del vincitore di ognuna delle quattro lotterie, e ricordando che, in ogni lotteria, vince una donna con probabilità $\frac{3}{5}$ e un uomo con probabilità $\frac{2}{5}$, abbiamo il seguente elenco dei casi.

- $X = 4$ $DDDD$ $Pr(X=4) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 = 0.1296$
- $X = 3$ $DDDD$
 $DDVD$
 $DDVD$
 $DDVD$
 $DDVD$ $Pr(X=3) = 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} = 0.3456$
- $X = 2$ $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$ $Pr(X=2) = 6 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = 0.3456$
- $X = 1$ $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$
 $DDVV$ $Pr(X=1) = 4 \cdot \frac{3}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 0.1536$
- $X = 0$ $VVVV$ $Pr(X=0) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = 0.0256$

Abbiamo, di conseguenza, la legge

a	0	1	2	3	4
$P_X(a)$	0.0256	0.1536	0.3456	0.3456	0.1296

Suggerimento: conviene sempre verificare che la somma di questi numeri faccia 1. Se non è esattamente così, c'è un errore.

La legge di X è rappresentata dall'istogramma

qui a lato. Nota. L'esercizio chiedeva di tracciare

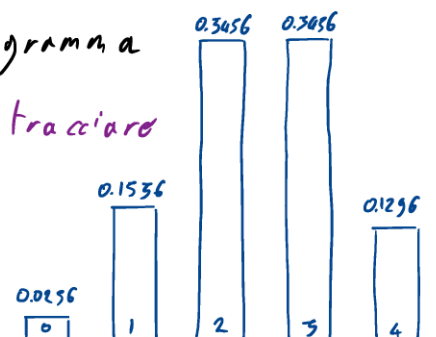
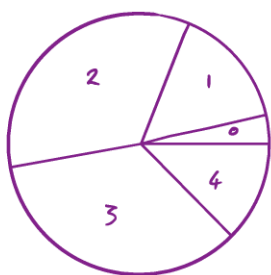
un istogramma, però, siccome la legge di

una variabile aleatoria è un

modo di suddividere la probabilità totale 1 fra

i possibili valori della variabile, anche la richie-

sta di un diagramma a torta avrebbe avuto senso.



B.3 Valore atteso e varianza di X si possono calcolare direttamente facendo uso della legge trovata al punto precedente. Questo metodo è valido. Noi, però, ne seguiamo un altro, simile a quello usato nell'esercizio delle 10⁶ monete.

Definiamo le variabili aleatorie X_1, X_2, X_3 e X_4 con

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se l'i-esima lotteria è vinta da una donna} \\ 0 & \text{se l'i-esima lotteria è vinta da un uomo} \end{cases}$$

Chiaramente $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$.

Le variabili X_i sono indipendenti e isonome con

$$Pr(X_i = 1) = \frac{3}{5} \quad Pr(X_i = 0) = \frac{2}{5}$$

Quindi

$$E(X_i) = 1 \cdot \frac{3}{5} + 0 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$E(X_i^2) = 1^2 \cdot \frac{3}{5} + 0^2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

$$Var(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = \frac{6}{25}$$

Di conseguenza

$$\boxed{E(X)} = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + E(X_4) = \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \boxed{2.4}$$

$$\boxed{Var(X)} = Var(X_1) + Var(X_2) + \dots = \frac{6}{25} \cdot 4 = \boxed{0.96}$$

Sfruttando l'indipendenza delle lotterie

Qui finisce il nostro corso

Buona fortuna!