

Soluzioni dell'esame scritto dal 24.5.2022

Esercizio A

Traccia il grafico di $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$ per x compresa fra 0 e 10.

→ Vedi file "Come tracciare un grafico"

<https://ciocil.li/ctf21/grafici-raster.pdf>

o sito del corso.

Esercizio B

È stato osservato che il *tasso metabolico basale*, cioè la potenza che un animale produce per vivere, è, per molti animali, legato alla massa corporea da una legge potenza

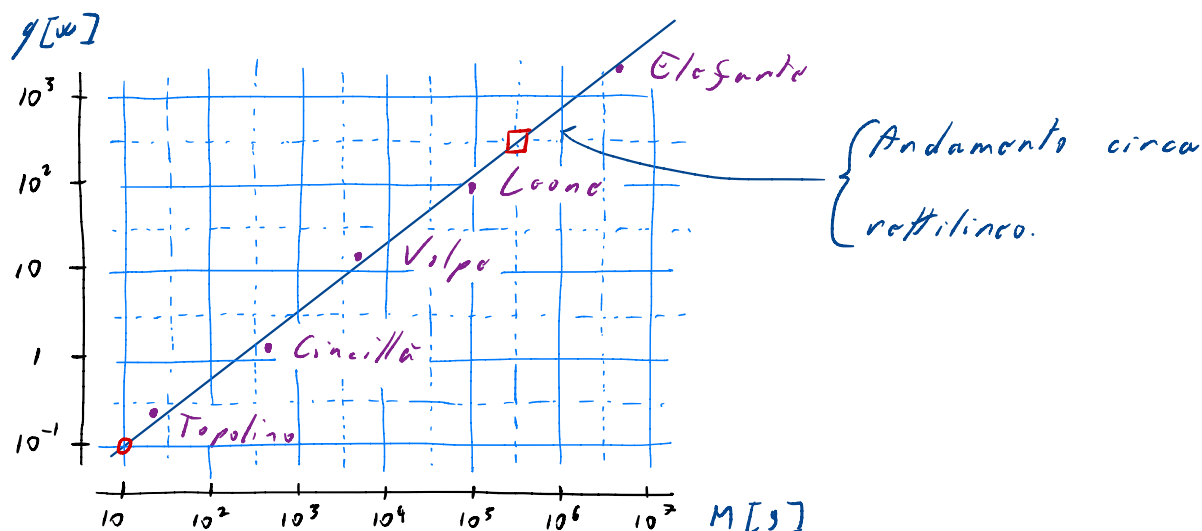
$$q = CM^k$$

in cui C è una costante, q è il tasso metabolico basale misurato in watt, e M la massa misurata in grammi. Ecco i valori medi per alcune specie.

		M	q
Topolino comune	<i>Mus musculus</i>	18.0 g	0.271 W
Cincillà	<i>Chinchilla lanigera</i>	437 g	1.31 W
Volpe rossa	<i>Vulpes vulpes</i>	4.58 kg	13.7 W
Leone	<i>Panthera leo</i>	98.0 kg	94.6 W
Elefante indiano	<i>Elephas maximus</i>	$3.67 \cdot 10^3$ kg	2.34 kW

Riporta questi dati sul diagramma più opportuno per evidenziare la legge potenza, quindi determina un valore plausibile per l'esponente k .

Una funzione potenza dovrebbe manifestarsi come una retta in un diagramma log-log. Tracciamo quindi questo diagramma



Per determinare un valore di k possiamo, per esempio, cercare l'equazione della retta $f(x)$ tracciata sul diagramma. Vediamo che $f(10\text{ g}) = 10^{-1}\text{ W}$ e $f(10^{5.5}\text{ g}) = 10^{2.5}\text{ W}$, quindi

$$\begin{cases} C \cdot 10^k = 10^{-1} \rightarrow C = 10^{-1-k} \\ C \cdot (10^{5.5})^k = 10^{2.5} \rightarrow 10^{-1-k} \cdot 10^{5.5 \cdot k} = 10^{2.5} \\ \downarrow \\ 10^{-1+5.5k} = 10^{2.5} \\ \downarrow \\ -1 + 5.5k = 2.5 \rightarrow k = \frac{3.5}{4.5} = \boxed{0.78} \end{cases}$$

Nota. Un altro approccio corretto sarebbe, per esempio, fare uso dei punti corrispondenti al topolino e all'elefante, così si ottiene 0.74 ✓. Usare, invece, topolino e cincillà è una cattiva idea perché questi dati sono troppo vicini fra loro. Procedendo in questo modo si otterrebbe 0.49 ✗ (-1 p.t.)

Esercizio C

Il coefficiente di dilatazione termica α di un materiale si misura in parti per milione al grado Kelvin (10^{-6}K^{-1}). Per esempio, dire che una lega metallica ha $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}\text{K}^{-1}$, significa dire che, scaldando di x gradi un campione di questa lega, il campione si allunga di $3x$ parti per milione. Per il ferro, $\alpha = 11.8 \cdot 10^{-6}\text{K}^{-1}$. La torre Eiffel è alta 324.0 m in un mezzogiorno d'estate con $35 \pm 1^\circ\text{C}$, determina di quanti centimetri si accorcia in una notte d'inverno con $-5 \pm 1^\circ\text{C}$, indicando l'incertezza relativa.

La differenza di temperatura fra estate e inverno vale

$$\Delta T = (35 \pm 1) - (-5 \pm 1) \text{ K} = 40 \pm 2 \text{ K} = 40 \pm 5\% \text{ K}$$

A cui corrisponde un allungamento di

$$\Delta L [\text{ppm}] = 11.8 \Delta T = 11.8 \cdot (40 \pm 5\%) = 472 \pm 5\%$$

Per determinare l'allungamento in centimetri, risolviamo la proporzione

$$\underbrace{\Delta L [\text{ppm}]}_{472 \pm 5\%} : 1\,000\,000 = \Delta L [\text{cm}] : \underbrace{\text{lunghezza} [\text{cm}]}_{324.0 \cdot 100}$$

$$\Delta L [\text{cm}] = \frac{324.0 \cdot 100 \cdot (472 \pm 5\%)}{1\,000\,000} = \boxed{15.3 \pm 5\%}$$

Nota. Il numero di cifre significative del risultato si sceglie in questo modo. Calcolando l'errore assoluto otteniamo $15.\underline{3}93 \pm 0.\underline{7}65$. La regola generale dice di arrotondare alla prima cifra incerta, quindi, in questo caso, ai decimali.

Esercizio 0

Considera la funzione dell'esercizio A: $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$. Calcola $\int_0^\pi f(x) dx$, e calcola il massimo valore assunto da $f(x)$ al variare di x nell'intervallo $[0, \pi]$.

$$\begin{aligned} 1. \quad \int_0^\pi \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) dx &= \left[-\cos(x) - \frac{1}{9} \cos(3x) \right]_0^\pi = \\ &= \left(\underbrace{-\cos(\pi)}_{-1} - \frac{1}{9} \underbrace{\cos(3\pi)}_{-1} \right) - \left(\underbrace{-\cos(0)}_1 - \frac{1}{9} \underbrace{\cos(0)}_1 \right) = \boxed{\frac{20}{9}}. \end{aligned}$$

2. Cominciamo dal calcolo dei punti stazionari di f .
La derivata di f è

$$f'(x) = \cos(x) + \cos(3x)$$

per cui i punti stazionari di f si ottengono da

$$\cos(3x) = -\cos(x)$$

Un modo per risolvere questa equazione è osservare che, in generale, $-\cos(\alpha) = \cos(\alpha + \pi)$, per cui

$$\cos(3x) = \cos(x + \pi)$$

ora, $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ se e solo se $\alpha = \beta + 2k\pi$ oppure $\alpha = -\beta + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo allora due equazioni:

$$3x = x + \pi + 2k\pi \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \pi \frac{2k+1}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$$

$$3x = -x - \pi + 2k\pi \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \pi \frac{2k-1}{4} \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \dots$$

Abbiamo quindi i seguenti punti stazionari $\sin 0$ e π : $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi$. Il massimo di f si può trovare in uno di questi valori o in uno degli estremi del dominio: 0 e π . Confrontiamo i valori di f .

$$f(0) = \sin(0) + \frac{1}{3} \sin(0) = 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \approx 0.94$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 1 + \frac{1}{3}(-1) = \frac{2}{3} \approx 0.67$$

$$f\left(\frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{9}{4}\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{3} \sqrt{2} \approx 0.94$$

$$f(\pi) = \sin(\pi) + \frac{1}{3} \sin(3\pi) = 0$$

Il massimo valore assunto da f in $[0, \pi]$ è il più grande di questi: $\boxed{\frac{2}{3} \sqrt{2}}$

Nota La risposta numerica 0.94 è considerata ugualmente corretta.

Nota 2 Chi si trovasse in difficoltà con l'equazione trigonometrica $\cos(3x) = \cos(\pi + x)$ può, per esempio, affrontarla numericamente col metodo di bisezione. Una soluzione basata su questo metodo è considerata corretta.

Esercizio E

Trova la soluzione generale di $f'(x) = (x-2)(f(x))^2$, quindi traccia un grafico della soluzione particolare con $f(1) = 1$.

Abbiamo un'equazione a variabili separabili

$$\frac{df}{dx} = (x-2)f^2$$

$$\int f^{-2} df = \int \frac{1}{f^2} df = \int (x-2) dx$$

$$= \frac{1}{-2+1} f^{-2+1} + C \quad \left(\begin{array}{l} -\frac{1}{f} = \frac{1}{2} (x-2)^2 + C \end{array} \right)$$

Formula per

$\int f(ax+b) dx$ applicata a $\int (1-x-2)' dx$

$$f(x) = \frac{-1}{\frac{1}{2}(x-2)^2 + C}$$

Ora vogliamo trovare C in modo tale che $f(1) = 1$

$$\frac{-1}{\frac{1}{2}(1-2)^2 + C} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 = \frac{1}{2} + C \quad \Leftrightarrow \quad C = -\frac{3}{2}$$

Dobbiamo quindi tracciare un grafico di

$$f(x) = \frac{-1}{\frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{3}{2}} = \frac{2}{3 - (x-2)^2}$$

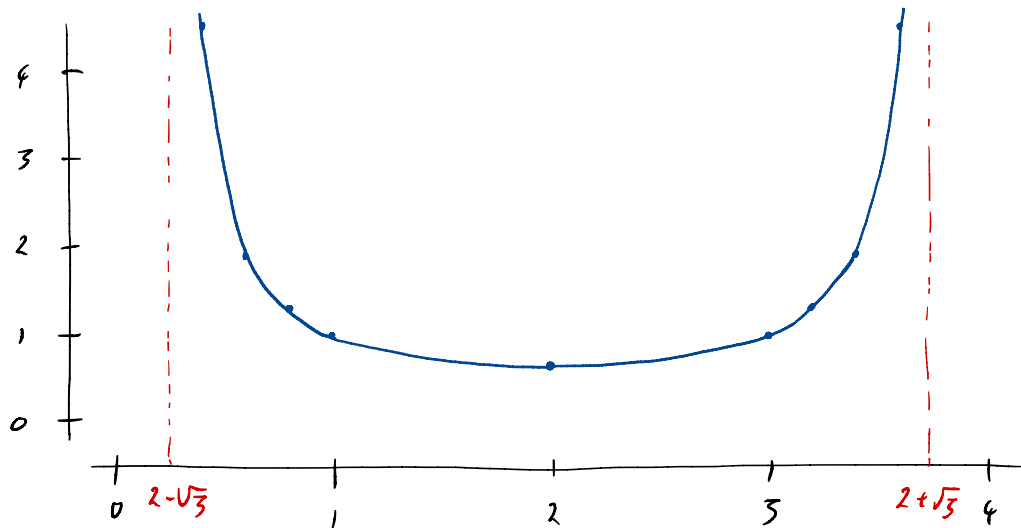
Ora, per ragioni che esulano dall'ambito del nostro corso,

conviene tracciare questo grafico per x compresa fra i punti di annullamento del denominatore

$$3 - (x-2)^2 = 0 \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$$

Questo intervallo, $2 - \sqrt{3} < x < 2 + \sqrt{3}$ si chiama "dominio di esistenza" della soluzione, e la soluzione f , in realtà, non ha senso al di fuori di questo intervallo.

Ai fini del compito qualunque intervallo ragionevole che contenga $x=1$ (perché il dato è $f(1)$) va bene.



Esercizio F

In media, una mela è bacata col 10% di probabilità, e questo è indipendente dalla condizione delle altre mele. Rappresentiamo con X la variabile aleatoria che indica il numero di mele bacate in una cassetta che contiene 40 mele, e con Y rappresentiamo invece la percentuale di mele bacate sul totale della cassetta. (Per cui, per esempio, se la cassetta contiene 2 mele bacate, allora $X = 2$ e $Y = 5$.) Calcola valore atteso e deviazione standard di X e Y .

Cominciamo da X . Questo esercizio è sostanzialmente uguale a quello visto a pagina 306 della nota del corso, in cui si studia il numero di teste ottenute

lanciando un milione di monete — qui, invece studiamo il numero di mele bacate ottenute prendendo 40 mele. Seguendo l'idea dell'esercizio delle note, scriviamo

$$X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{40} \quad (*)$$

dove la variabile X_i — per un generico $i = 1 \dots 40$ — è la "funzione indicatrice dell'evento: la i -esima mela è bacata", ossia

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima mela è bacata} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Va da sé che, sommando le variabili X_i , si somma tante volte 1 quante sono le mele bacate, quindi si ottiene il numero delle mele bacate, cioè X . Abbiamo così verificato che la formula (*) è valida.

I dati dell'esercizio ci dicono che la legge di X_i è

x	0	1
$P_{X_i}(x)$	0.9	0.1

10% di probabilità che
ba una mela di essere bacata

Quindi

$$E(X_i) = 0 \cdot P_{X_i}(0) + 1 \cdot P_{X_i}(1) = 0 \cdot 0.9 + 1 \cdot 0.1 = 0.1$$

$$E(X_i^2) = 0^2 \cdot P_{X_i}(0) + 1^2 \cdot P_{X_i}(1) = 0^2 \cdot 0.9 + 1^2 \cdot 0.1 = 0.1$$

$$\text{Var}(X_i) = E(X_i^2) - (E(X_i))^2 = 0.1 - 0.1^2 = 0.09$$

Dalla prima, possiamo calcolare immediatamente

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{40}) \\ &= E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_{40}) = 40 \cdot 0.1 = 4 \end{aligned}$$

Notiamo che questo risultato è del tutto intuitivo: se il 10% delle mele è bacata — una mela su 10 — allora, su 40 mele, ce ne saranno, in media, 4 bacate.

Per calcolare la deviazione standard, ricordiamo che la varianza di una somma di variabili aleatorie indipendenti è la somma delle loro varianze, ed il testo ci dice che le mele sono indipendenti, quindi:

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= \text{Var}(X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_{40}) = \\ &\quad \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_{40}) = 40 \cdot 0.09 = 3.6\end{aligned}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{3.6} \approx 1.90$$

Ponendo la nostra attenzione su Y , vediamo che questa è semplicemente legata a X dalla proporzione

$$X : 40 = Y : 100 \Rightarrow Y = X \cdot \frac{100}{40} = X \cdot 2.5$$

Di conseguenza

$$E(Y) = E(2.5 \cdot X) = 2.5 \cdot E(X) = 10$$

$$\sigma(Y) = \sigma(2.5 \cdot X) = 2.5 \cdot \sigma(X) \approx 4.74$$

Notiamo che il risultato $E(Y)=10$ è del tutto intuitivo: la percentuale media di mele bacate su un totale qualunque deve essere proprio la probabilità che una mela sia bacata, espressa in percentuale, e questa è appunto il 10% secondo i dati dell'esercizio.