

UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE
PROVA SCRITTA DI MATEMATICA DEL 24-I-2022

Puoi usare strumenti da scrittura e disegno, calcolatrice, libri e appunti. Non puoi comunicare se non con il docente.

Il compito consta di un totale di sei esercizi, che valgono sei punti ciascuno.

Hai a disposizione due ore e 30 minuti.



ESERCIZIO A

Traccia il grafico di $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$ per x compresa fra 0 e 10.

ESERCIZIO B

È stato osservato che il *tasso metabolico basale*, cioè la potenza che un animale produce per vivere, è, per molti animali, legato alla massa corporea da una legge potenza

$$q = CM^k$$

in cui C è una costante, q è il tasso metabolico basale misurato in watt, e M la massa misurata in grammi. Ecco i valori medi per alcune specie.

		M	q
Topolino comune	<i>Mus musculus</i>	18.0 g	0.271 W
Cincillà	<i>Chinchilla lanigera</i>	437 g	1.31 W
Volpe rossa	<i>Vulpes vulpes</i>	4.58 kg	13.7 W
Leone	<i>Panthera leo</i>	98.0 kg	94.6 W
Elefante indiano	<i>Elephas maximus</i>	$3.67 \cdot 10^3$ kg	2.34 kW

Riporta questi dati sul diagramma più opportuno per evidenziare la legge potenza, quindi determina un valore plausibile per l'esponente k .

ESERCIZIO C

Il coefficiente di dilatazione termica α di un materiale si misura in parti per milione al grado Kelvin ($10^{-6}K^{-1}$). Per esempio, dire che una lega metallica ha $\alpha = 3 \cdot 10^{-6}K^{-1}$, significa dire che, scaldando di x gradi un campione di questa lega, il campione si allunga di $3x$ parti per milione. Per il ferro, $\alpha = 11.8 \cdot 10^{-6}K^{-1}$. La torre Eiffel è alta 324.0 m in un mezzogiorno d'estate con 35 ± 1 °C, determina di quanti centimetri si accorcia in una notte d'inverno con -5 ± 1 °C, indicando l'incertezza relativa.

ESERCIZIO D

Considera la funzione dell'esercizio A: $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$. Calcola $\int_0^\pi f(x) dx$, e calcola il massimo valore assunto da $f(x)$ al variare di x nell'intervallo $[0, \pi]$.

ESERCIZIO E

Trova la soluzione generale di $f'(x) = (x - 2)(f(x))^2$, quindi traccia un grafico della soluzione particolare con $f(1) = 1$.

ESERCIZIO F

In media, una mela è bacata col 10% di probabilità, e questo è indipendente dalla condizione delle altre mele. Rappresentiamo con X la variabile aleatoria che indica il numero di mele bacate in una cassetta che contiene 40 mele, e con Y rappresentiamo invece la percentuale di mele bacate sul totale della cassetta. (Per cui, per esempio, se la cassetta contiene 2 mele bacate, allora $X = 2$ e $Y = 5$.) Calcola valore atteso e deviazione standard di X e Y .