

⚠ ATTENZIONE ⚠

PRIMA DI PROSEGUIRE, SE NON LO HAI GIÀ FATTO, RISOLVI IL SEGUENTE ESERCIZIO. QUESTA NOTA NON TI SERVIRÀ A NULLA SE VEDI IL GRAFICO CORRETTO PRIMA DI PROVARE A TRACCIARLO AUTONOMAMENTE.

Esercizio A, esame scritto del 24.5.2022

Traccia il grafico di $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$ per x compresa fra 0 e 10.

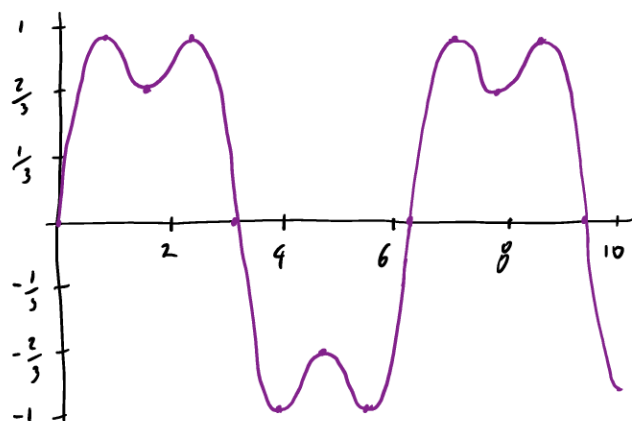
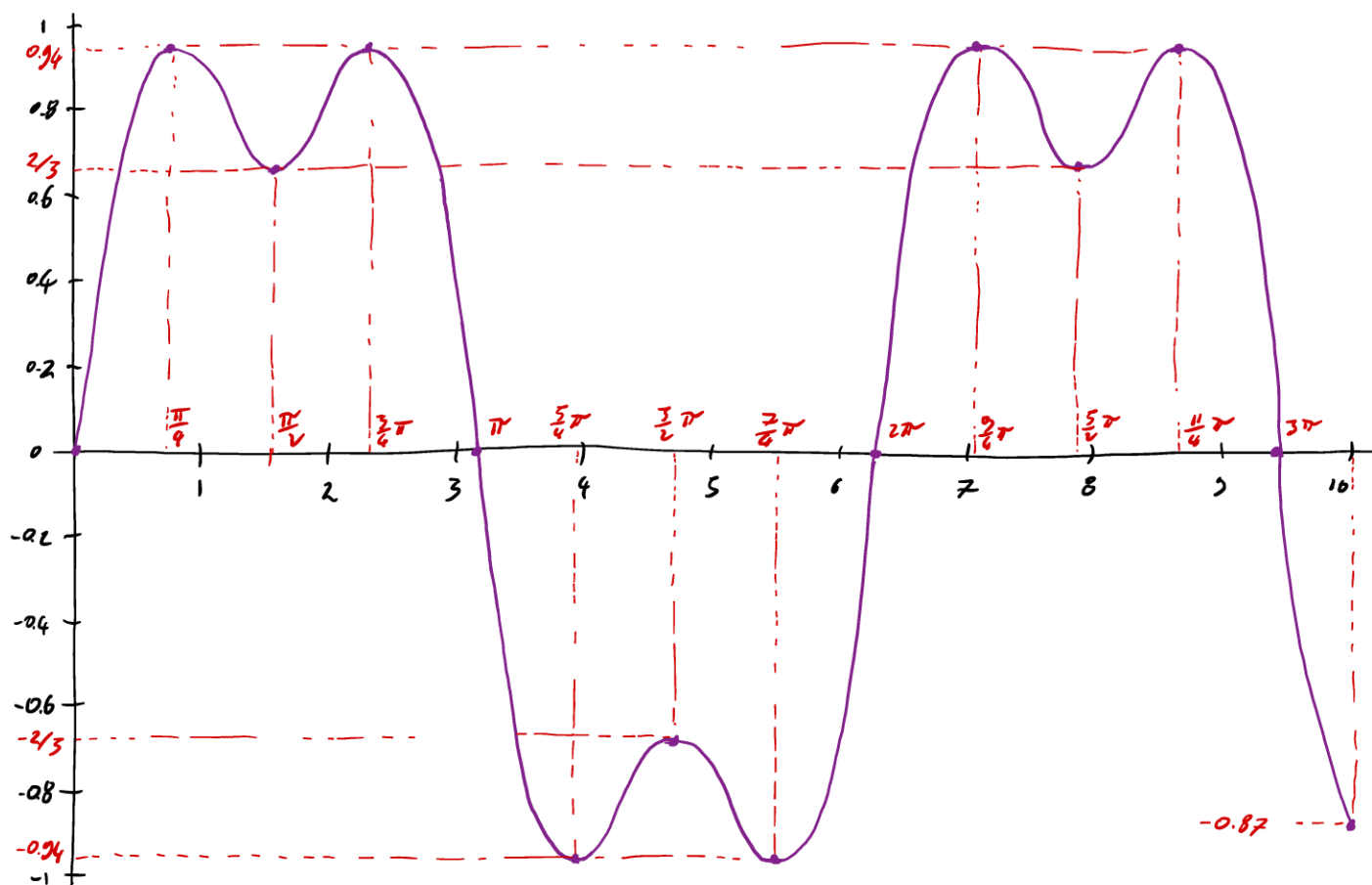
Nota: ricorda che, per convenzione, l'argomento della funzione seno è espresso in radianti.

Come tracciare un grafico: esempio

Esercizio A, esame scritto del 24.5.2022

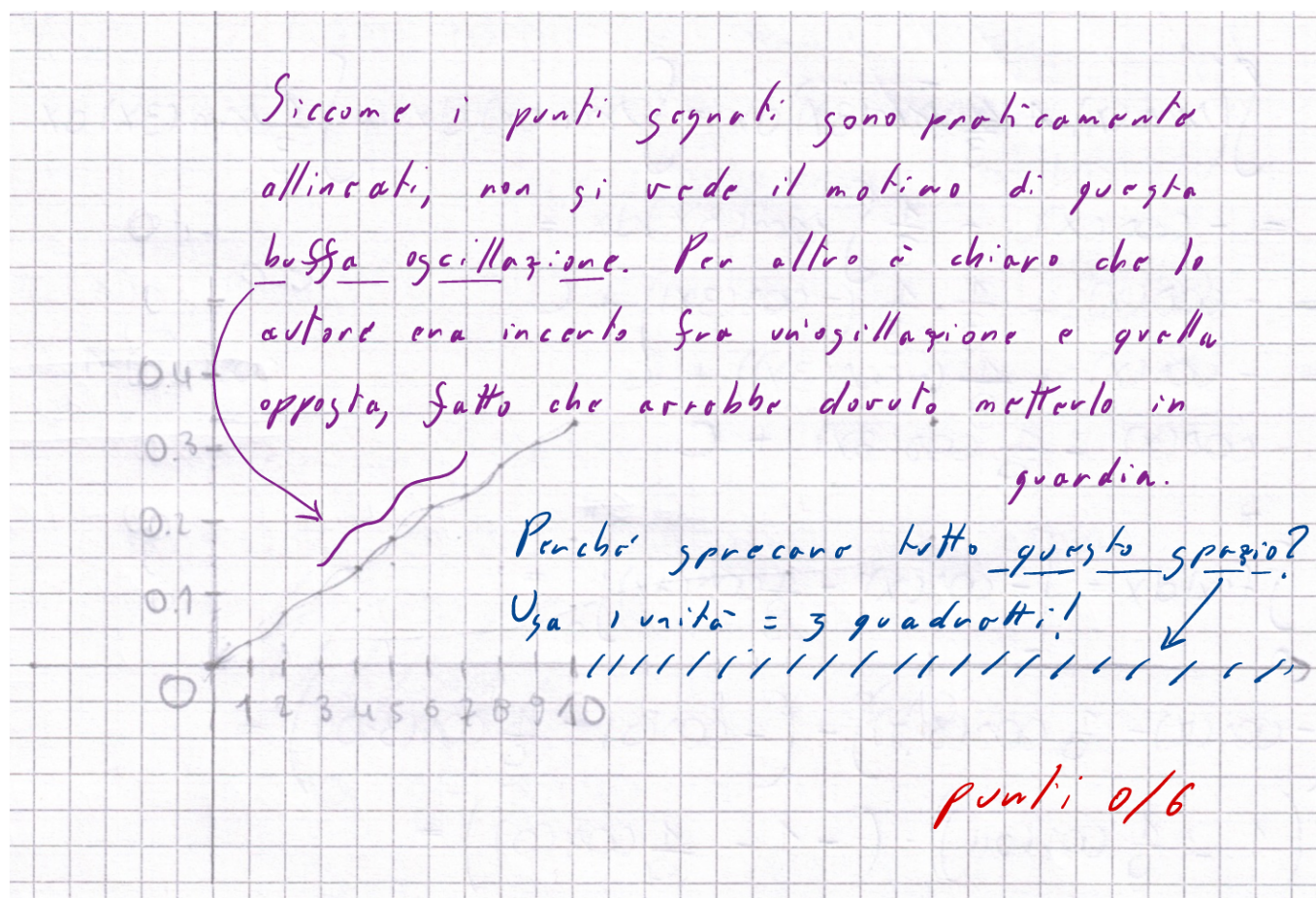
Traccia il grafico di $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$ per x compresa fra 0 e 10.

Questo esercizio è facile, ma richiede attenzione. Vediamo intanto due grafici accettabili:



Questo è il minimo necessario per ottenere 6/6 all'esame

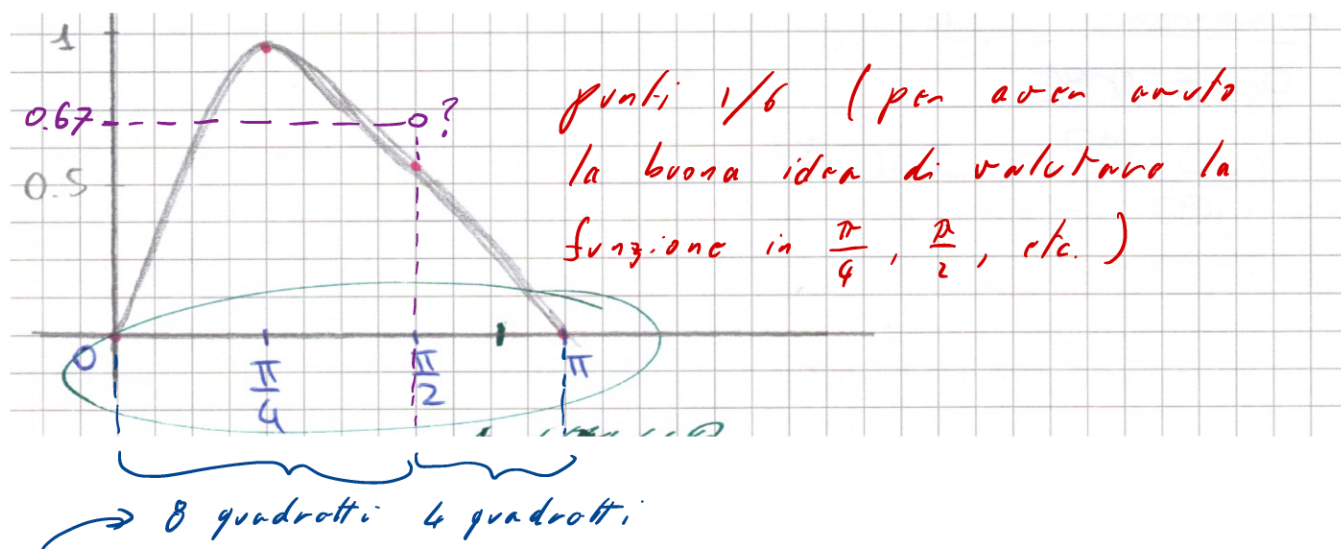
Prima di discutere di come si ottengono i grafici sopra, vediamo alcuni elaborati insufficienti:



L'errore più grave, quello che, da solo, invalida completamente questo grafico, è che la funzione seno è stata valutata in gradi anziché in radianti (benché la convenzione di esprimere l'argomento delle funzioni trigonometriche in radianti sia stata ricordata anche durante lo svolgimento della prova).

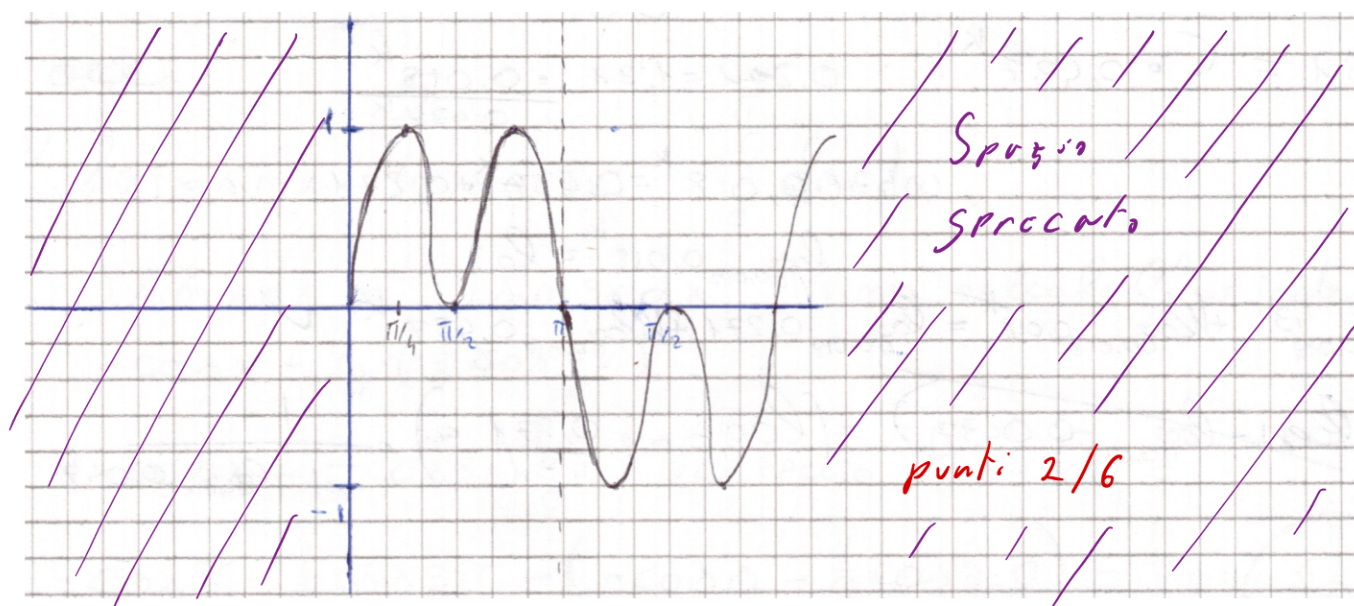
x	0	$\pi/4$	$\pi/2$	π
$g(x)$	0	0.94	0.67	0

$f(\frac{\pi}{2})$ è stata calcolata bene, ma disegnata male



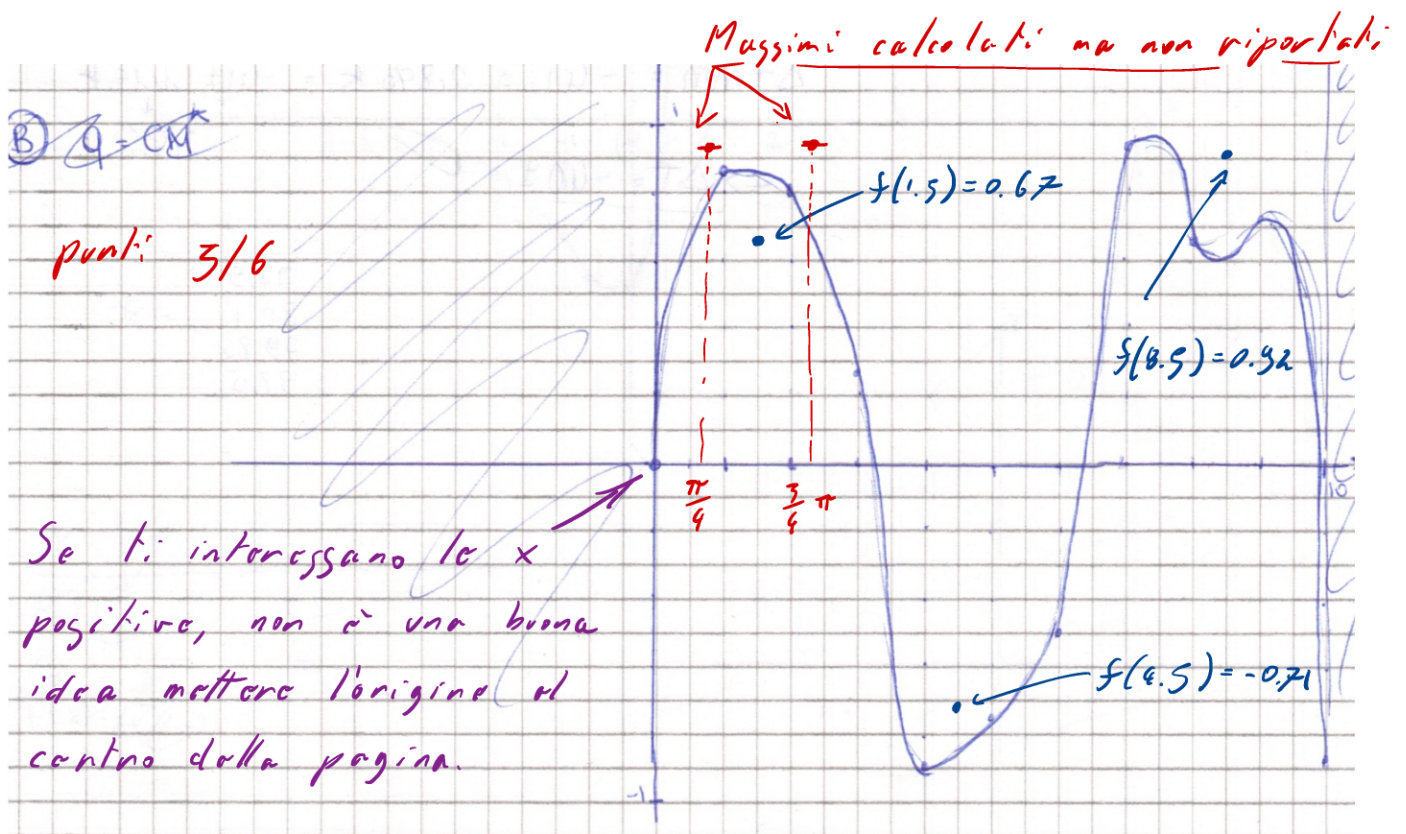
$\frac{\pi}{2}$ non è a metà fra 0 e π ! Sembra che l'autore si sia dimenticato dell'esistenza di $\frac{3}{4}\pi$.

Il vero guaio di questo grafico, però, è che non prova neanche a rispettare la richiesta: "traccia ... per x compresa fra 0 e π ".



L'autore, qui, per sbaglio, ha tentato di rappresentare la funzione $\sin(x) + \sin(3x)$ anziché la funzione richiesta. Comunque ci sono dei guai:

- L'intervallo rappresentato non è $[0, 10]$
- In $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$ la funzione $\sin(x) + \sin(3x)$ vale ~ 1.4 mentre è rappresentato ~ 1 , analogamente in $\frac{5}{4}\pi$ e $\frac{7}{4}\pi$ vale ~ -1.4 e non -1 .



Questo grafico mostra un errore frequente. Il grafico è ragionevolmente bene inquadrato e i punti calcolati sono riportati correttamente. Il guaio è che non rappresenta correttamente l'andamento della funzione, come si può vedere per confronto coi grafici alla prima pagina. Cosa è andato storto? L'autore di questo grafico ha riportato correttamente $f(0), f(1) \dots f(10)$, poi ha cercato di collegare questi punti con una linea curva. Tuttavia, probabilmente, non ha provato a calcolare f in qualcuno dei valori intermedi, altrimenti avrebbe notato grandi discrepanze. Rispondendo correttamente ad una domanda successiva, la stessa persona ha calcolato che f

ha massimi in $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{3}{4}\pi$, e li vale $\frac{2}{3}\sqrt{2} \approx 0.94$. Dove sono questi punti sul grafico? Non ci crediate, ma nella stessa risposta in cui ha calcolato i massimi, la stessa persona, ha disegnato alcuni punti del grafico di f : per $x = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \pi$, e quelli sono molto precisi, e mostrano chiaramente l'andamento della funzione. Non so perché, poi, non abbia corretto questo grafico.

Veniamo ora a come si traccia un buon grafico

1. Predisporre gli assi

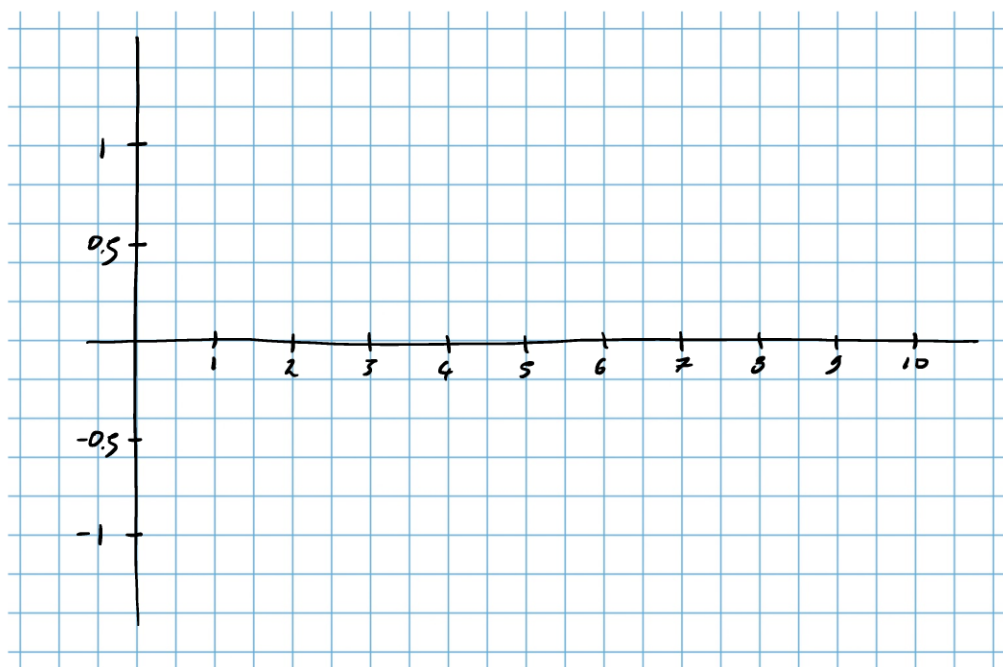
- Per l'asse x è facile: va da 0 a 10.
- Per l'asse y , ricordiamo la funzione

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

Si tratta di una somma di seni, e il seno oscilla fra -1 e 1 , quindi $f(x)$ è compresa fra $1 + \frac{1}{3}$ e $-1 - \frac{1}{3}$.

Come prima approssimazione possiamo quindi rappresentare sull'asse delle ordinate l'intervallo $[-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}]$.

- Ora disponiamo gli assi nello spazio dedicato al disegno. Per esempio, qui sotto ho a disposizione un po' più di 20 quadretti in orizzontale, e un po' più di 15 in verticale: stabilisco quindi che una unità equivalga a 2 quadretti sull'asse x e a 5 sull'asse y .



2. Riportare alcuni valori di f

Adesso possiamo procedere in due modi: o sfruttando la nostra conoscenza delle funzioni trigonometriche, o calcolando ciecamente numerosi punti.

2.A Vediamo prima il metodo furbo.

Sappiamo che $\sin(x) = 0$ per $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ Quindi

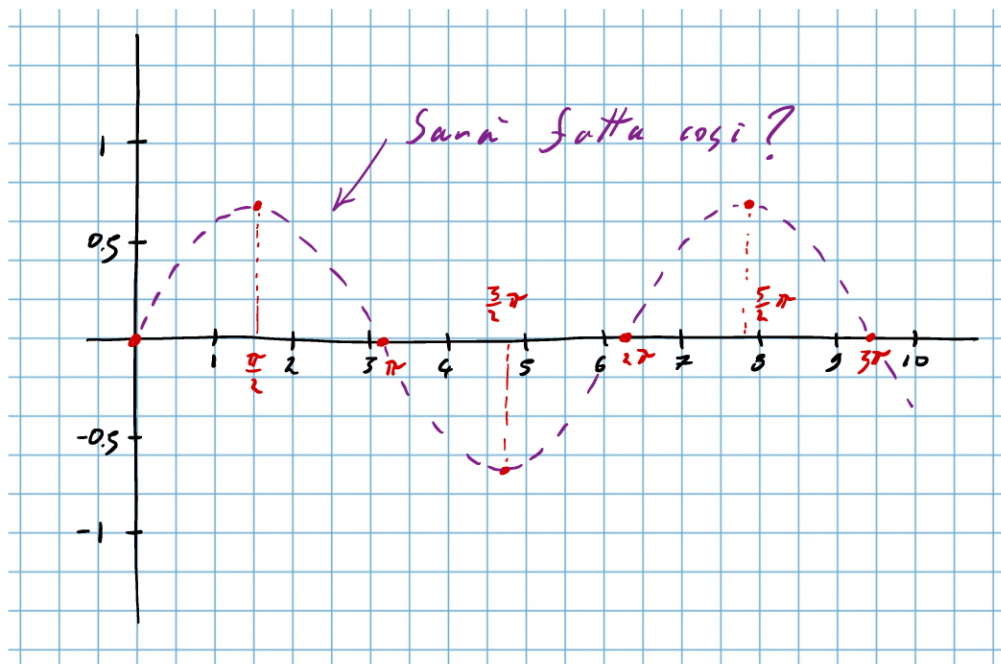
$$f(0) = \sin(0) + \frac{1}{3} \sin(0) = 0$$

$$f(\pi) = \sin(\pi) + \frac{1}{3} \sin(3\pi) = 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

$$f(2\pi) = \dots = 0 \quad f(3\pi) = \dots = 0.$$

Per cui f si annulla in $0, \pi, 2\pi, 3\pi$. Questo suggerisce di calcolare f in altri multipli e sottomultipli di π , per esempio potremmo iniziare con $\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3} \approx 0.67 \quad f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -\frac{2}{3} \approx -0.67 \quad f\left(\frac{5}{2}\pi\right) = \frac{2}{3} \approx 0.67$$



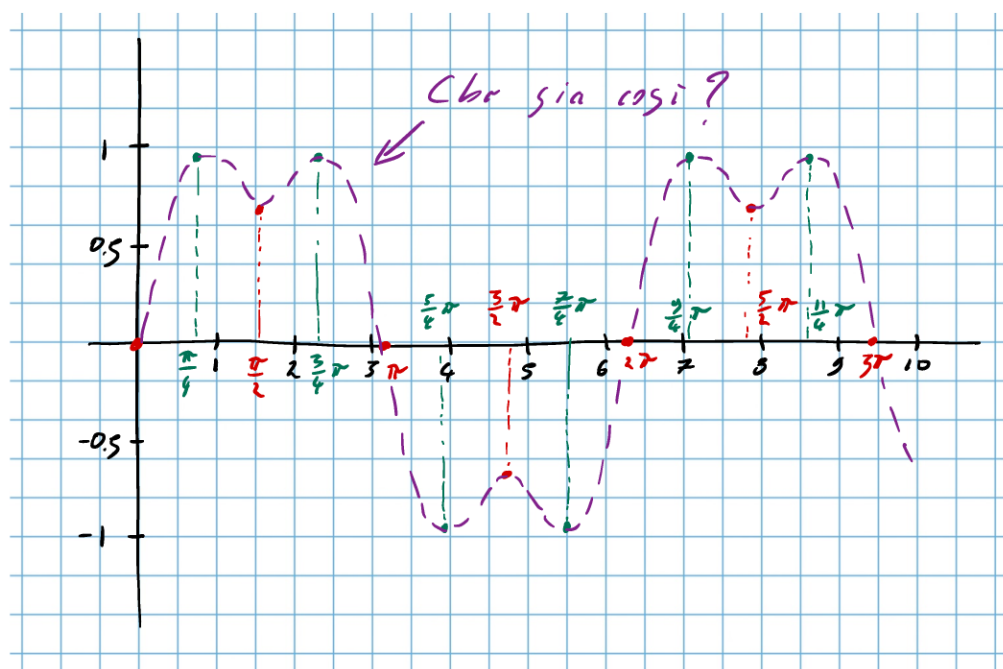
Per controllare calcoliamo f in qualche punto intermedio, per esempio $f(\frac{\pi}{4}) \approx 0.94$. Se il grafico fosse quello congetturato, allora $f(\frac{\pi}{4})$ sarebbe ≈ 0.5 , quindi è chiaro che dobbiamo calcolare più punti. Continuiamo con i multipli di $\frac{\pi}{4}$.

$$f(\frac{\pi}{4}) \approx 0.94 \quad f(\frac{3}{4}\pi) \approx 0.94$$

$$f(\frac{5}{4}\pi) \approx -0.94 \quad f(\frac{7}{4}\pi) \approx -0.94$$

$$f(\frac{9}{4}\pi) \approx 0.94 \quad f(\frac{11}{4}\pi) \approx 0.94 \quad \text{e} \quad \frac{13}{4}\pi > 10.$$

Qui, salta all'occhio una certa simmetria!

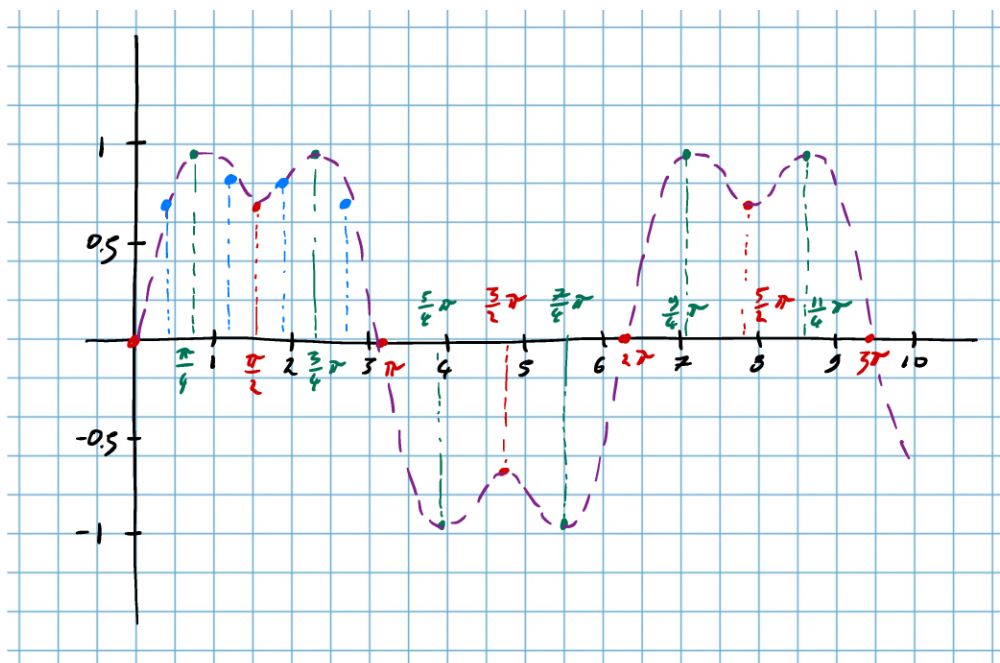


È ragionevole la nuova congettura? Calcoliamo, per esempio

$$f(\frac{\pi}{8}) \approx \underline{0.69} \quad f(\frac{3}{8}\pi) \approx \underline{0.80} \quad f(\frac{5}{8}\pi) \approx \underline{0.80} \quad f(\frac{7}{8}\pi) \approx \underline{0.69}$$

Non sfugge che i valori si ripetono: $f(\frac{\pi}{8}) = f(\frac{7}{8}\pi)$

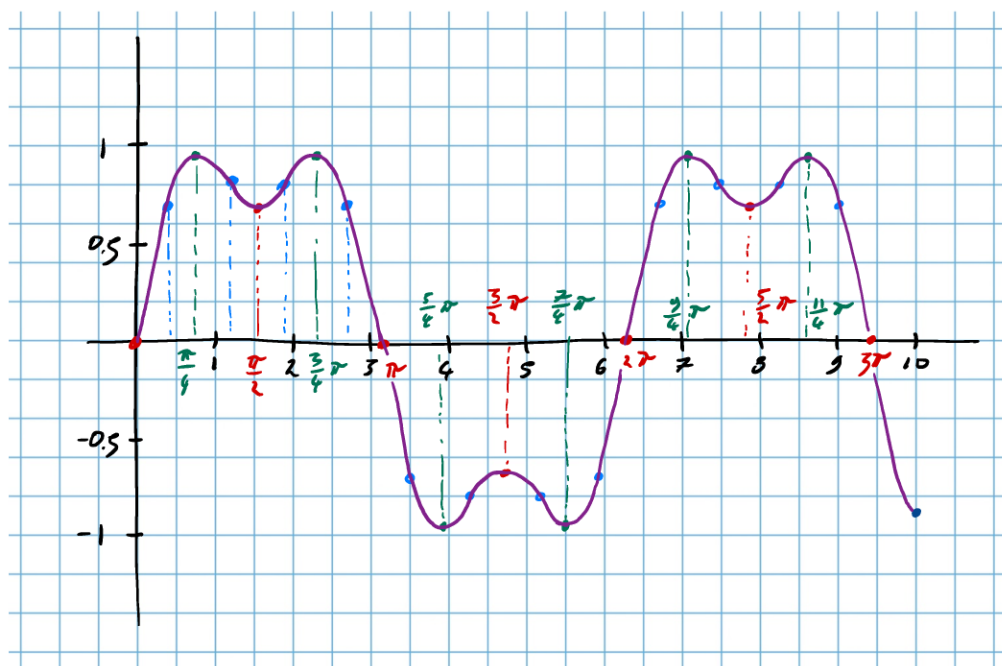
e $f(\frac{3}{8}\pi) = f(\frac{5}{8}\pi)$ come ci aspettiamo dalla simmetria della figura. Riportiamo i nuovi punti:



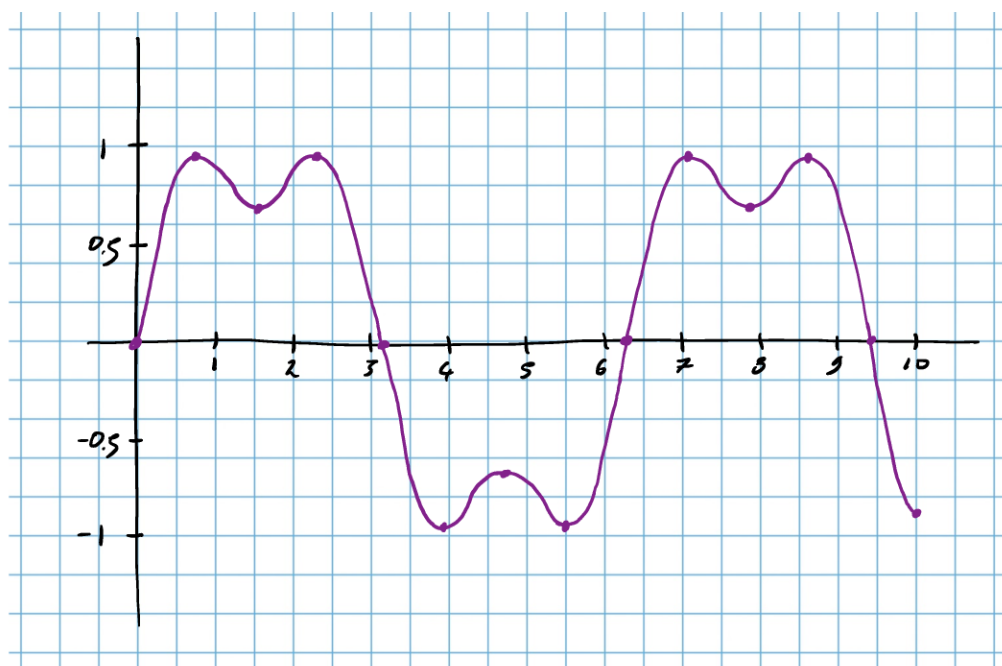
Sembra che l'andamento suggerito sia confermato. Inoltre, ci aspetteremmo di ottenere

$$f\left(\frac{9}{8}\pi\right) \stackrel{?}{\approx} -0.69 \quad f\left(\frac{11}{8}\pi\right) \stackrel{?}{\approx} -0.80 \quad f\left(\frac{13}{8}\pi\right) \stackrel{?}{\approx} -0.80 \quad \text{etc.}$$

Basta calcolare uno o due di questi punti per vedere che è proprio così. In definitiva, calcoliamo ancora $f(10) \approx -0.87$ per vedere dove deve terminare il grafico.



Nota: chiaramente qui ho indicato i punti $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{4}\pi$, etc.
a scopo didattico, ma non è necessario segnarli sul grafico.
L'elaborato da presentare potrebbe tranquillamente avere
l'aspetto seguente.

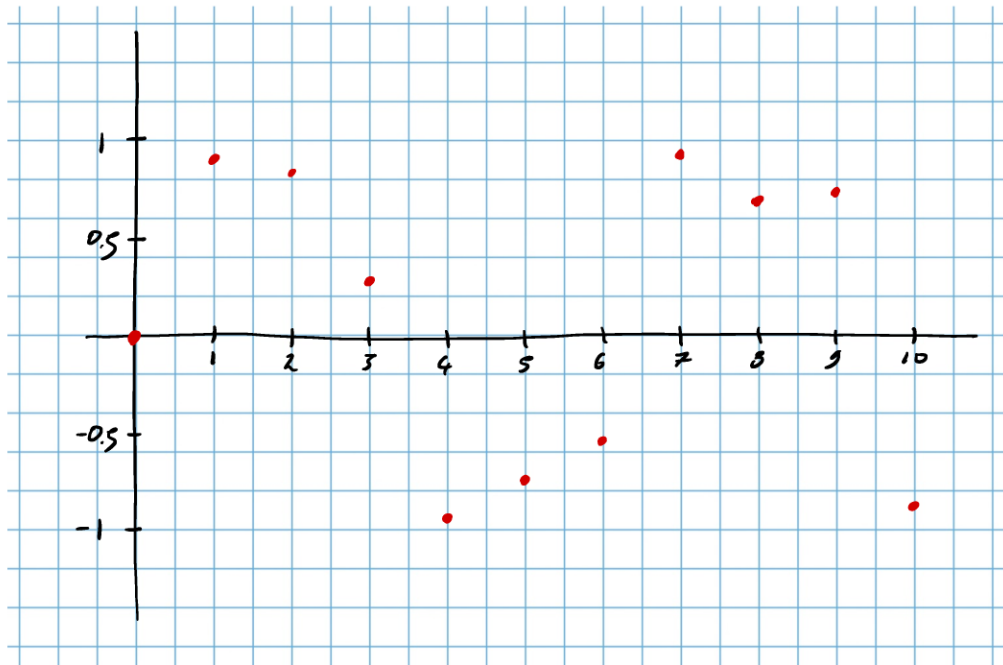


es. Vediamo ora cosa capita se, anziché ragionare, semplicemente calcoliamo $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, etc.

$$f(0) = 0 \quad f(1) \approx 0.89 \quad f(2) \approx 0.82 \quad f(3) \approx 0.28$$

$$f(4) \approx -0.94 \quad f(5) \approx -0.74 \quad f(6) \approx -0.53 \quad f(7) \approx 0.94$$

$$f(8) \approx 0.69 \quad f(9) \approx 0.73 \quad f(10) \approx -0.87$$



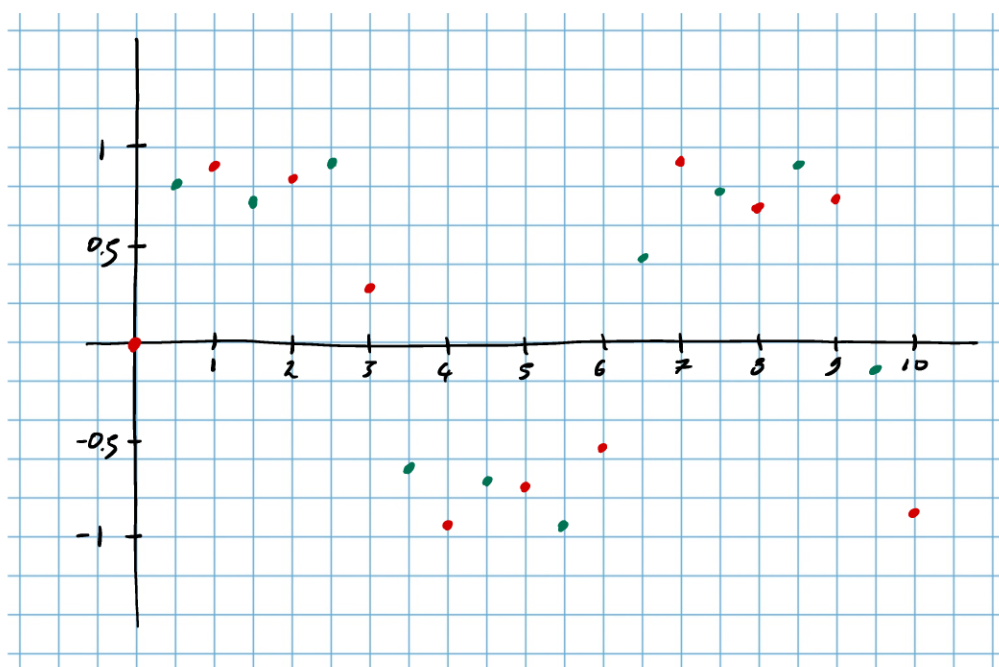
Orsì si potrebbero collegare questi punti con una linea ondulata di qualche tipo, ma è chiaro che vanno su e giù a casaccio, e non se ne deduce alcun andamento affidabile.

Occorrono più punti!

$$f(0.5) \approx 0.81 \quad f(1.5) \approx 0.67 \quad f(2.5) \approx 0.31 \quad f(3.5) \approx -0.64$$

$$f(4.5) \approx -0.71 \quad f(5.5) \approx -0.94 \quad f(6.5) \approx 0.42 \quad f(7.5) \approx 0.78$$

$$f(8.5) \approx 0.92 \quad f(9.5) \approx -0.15$$



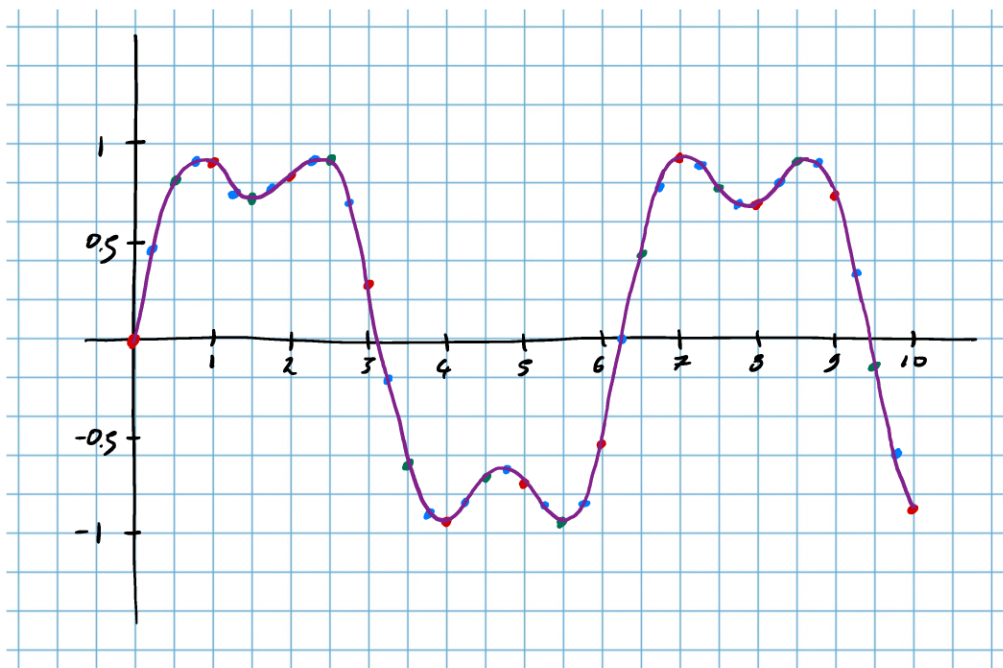
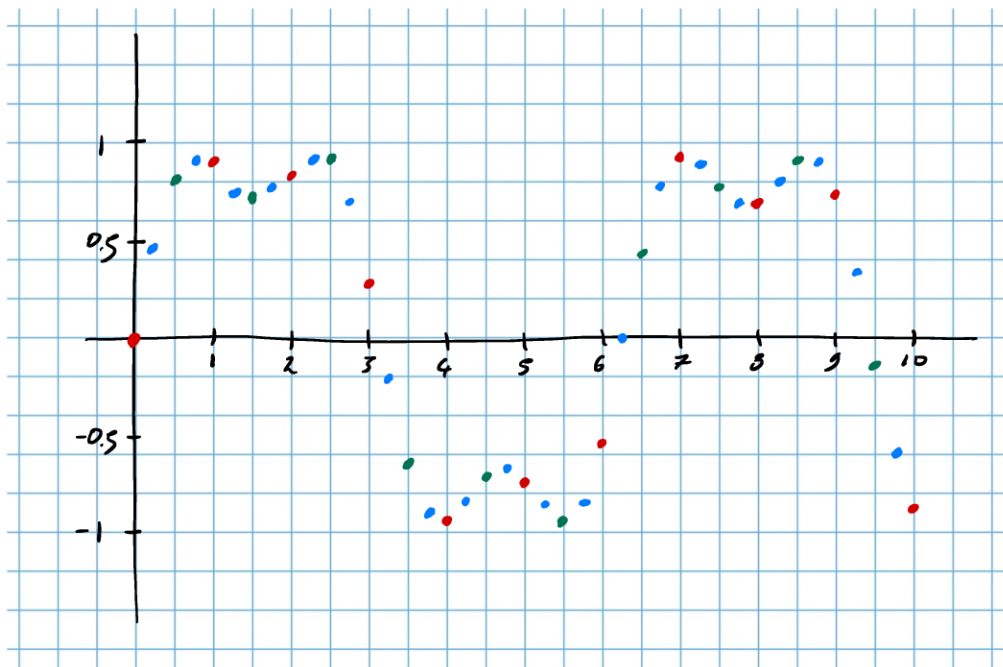
Adesso le cose si capiscono leggermente meglio, però non me la sento ancora di dire che il grafico di f è chiaro.

D'altro canto abbiamo scelto di non ragionare: poco da stupirsi che ci tocchi fare dei calcoli!

$$\begin{aligned}
 f(0.25) &\approx 0.42 & f(0.75) &\approx 0.94 & f(1.25) &\approx 0.76 & f(1.75) &\approx 0.79 \\
 f(2.25) &\approx 0.93 & f(2.75) &\approx 0.69 & f(3.25) &\approx -0.21 & f(3.75) &\approx -0.89 \\
 f(4.25) &\approx -0.83 & f(4.75) &\approx -0.67 & f(5.25) &\approx -0.87 & f(5.75) &\approx -0.84 \\
 f(6.25) &\approx -0.07 & f(6.75) &\approx 0.78 & f(7.25) &\approx 0.90 & f(7.75) &\approx 0.68 \\
 f(8.25) &\approx 0.80 & f(8.75) &\approx 0.92 & f(9.25) &\approx 0.34 & f(9.75) &\approx -0.60
 \end{aligned}$$

Finalmente, basta vedere la figura all'inizio della prossima pagina, la situazione è assolutamente chiara.

Nota: non è necessario scrivere questa lunga tabella di valori nell'elaborato. I conti sono comunque gravosi, in particolare se non si ha dimestichezza con la calcolatrice.



Chiaramente il metodo A e il metodo B non sono alternativi: si possono mescolare in vario modo via via che uno capisce meglio come si fatta f . Né è sempre necessario calcolare tutti i punti intermedi: si inizia da quelli che paiono più critici e si prosegue finché la situazione sul grafico non è chiara.

C'è però un modo di procedere che, in questo caso, è il migliore di tutti: cercare i punti stazionari di f . Dal momento che un esercizio successivo chiede di trovare il massimo di f in $[0, \pi]$, il calcolo dei punti stazionari non sarà comunque utile.

2.6 Punti stazionari. Ricordiamo l'espressione di f

$$f(x) = \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x)$$

quindi

$$f'(x) = \cos(x) + \cos(3x)$$

per cui i punti stazionari di f si ottengono da

$$\cos(3x) = -\cos(x)$$

Un modo per risolvere questa equazione è osservare che, in generale, $-\cos(\alpha) = \cos(\alpha + \pi)$, per cui

$$\cos(3x) = \cos(x + \pi)$$

ora, $\cos(\alpha) = \cos(\beta)$ se e solo se $\alpha = \beta + 2k\pi$ oppure $\alpha = -\beta + 2k\pi$ per qualche $k \in \mathbb{Z}$. Abbiamo allora due equazioni:

$$3x = x + \pi + 2k\pi \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \pi \frac{2k+1}{2} \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \dots$$

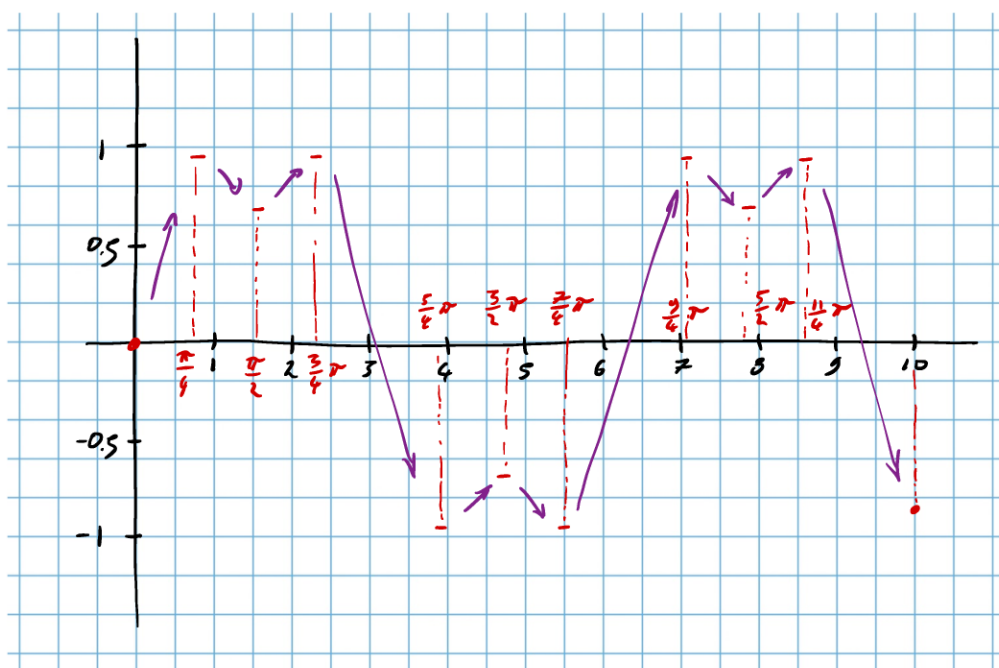
$$3x = -x - \pi + 2k\pi \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \pi \frac{2k-1}{4} \quad (\Leftrightarrow) \quad x = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \dots$$

Abbiamo quindi i seguenti punti stazionari fra 0 e π

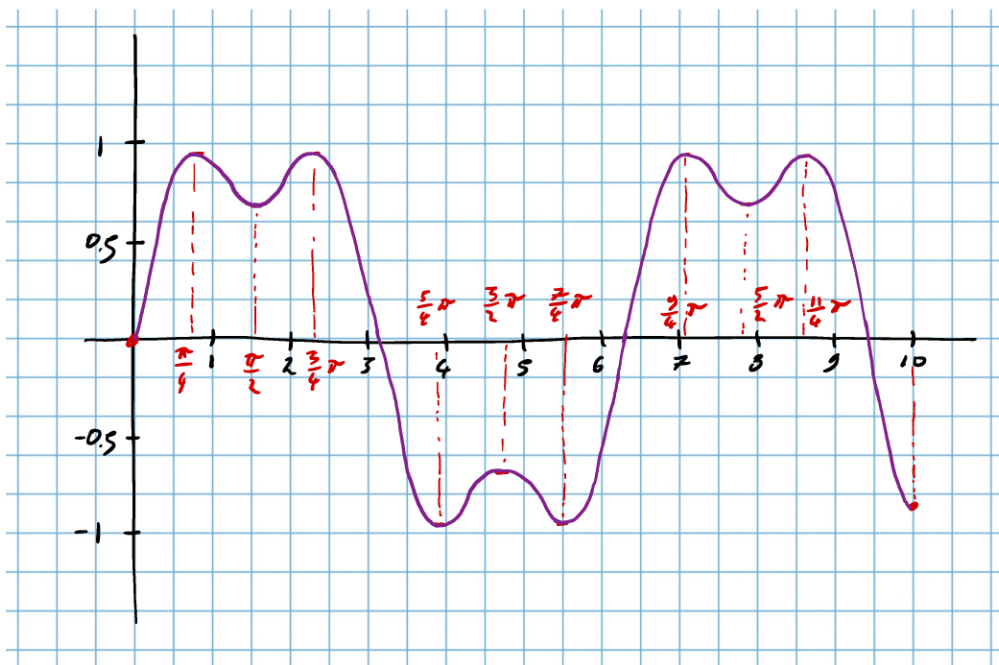
$$\frac{\pi}{4} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{3}{4}\pi \quad \frac{5}{4}\pi \quad \frac{3}{2}\pi \quad \frac{7}{4}\pi \quad \frac{9}{4}\pi \quad \frac{5}{2}\pi \quad \frac{11}{4}\pi$$

e sappiamo che, fra due punti stazionari consecutivi, f può solo crescere o solo decrescere (altrimenti ci sarebbe un terzo punto stazionario in mezzo).

Ripontando i punti stazionari, $f(0)$ e $f(10)$ sul grafico

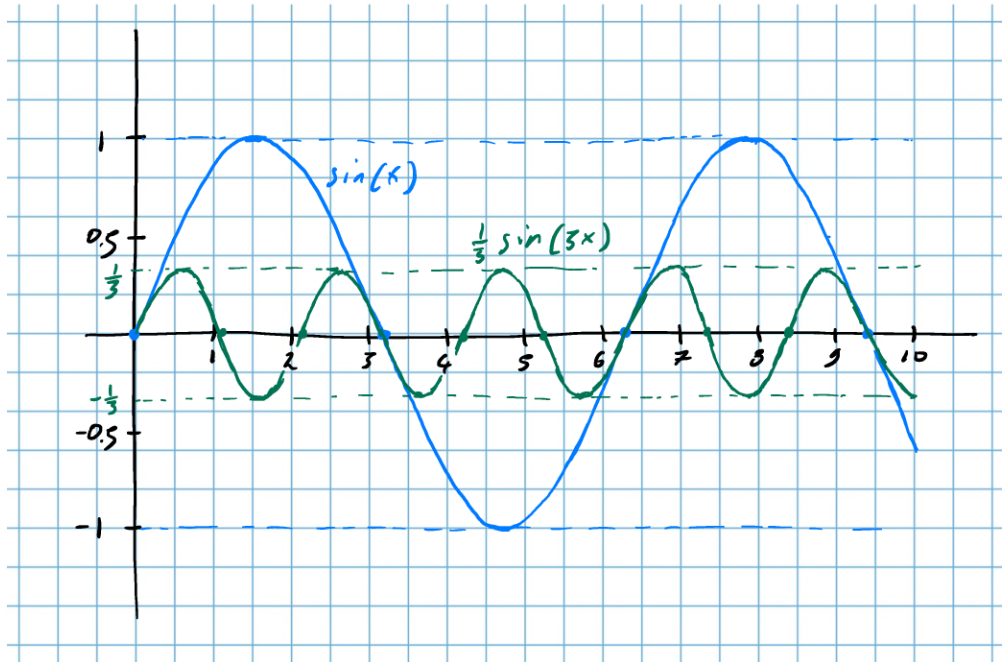


Da cui è chiaro come deve comportarsi f , e possiamo procedere a tracciare la linea

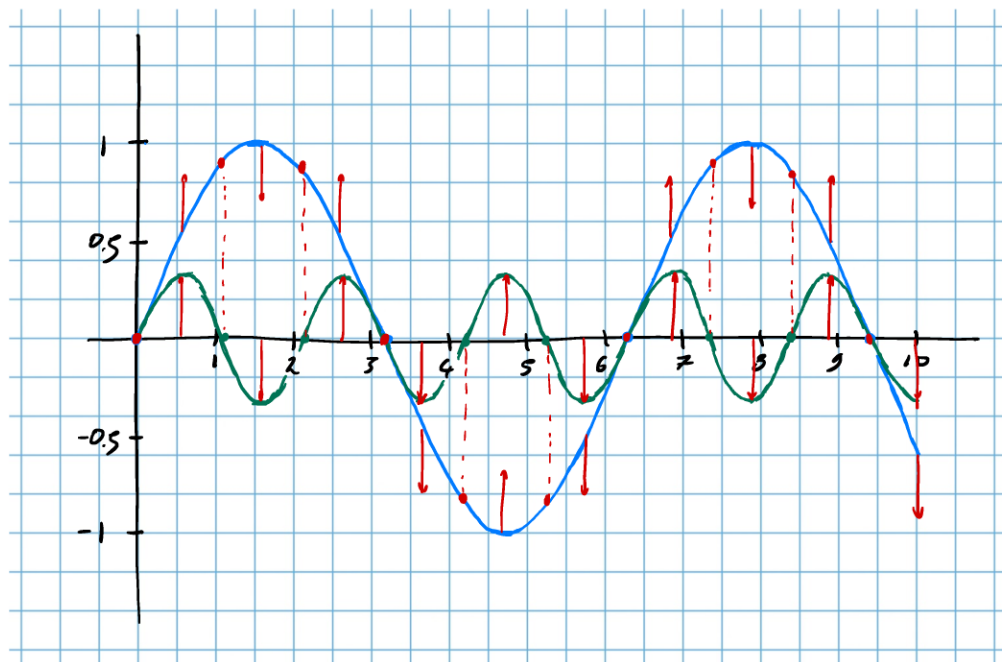


Vediamo, in fine, un procedimento un po' creativo.

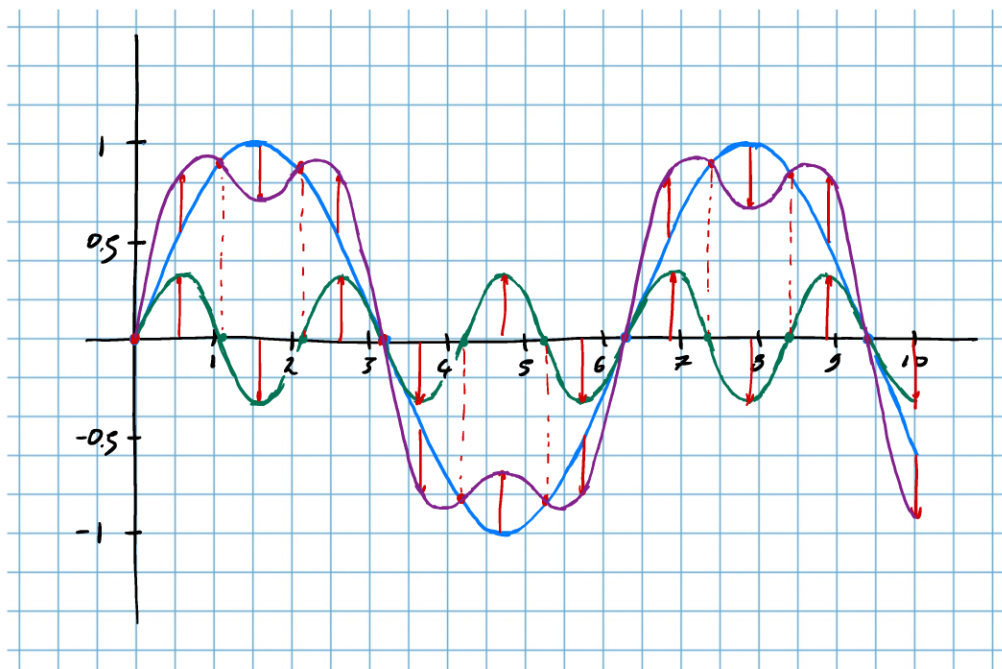
2.0 Possiamo sfruttare il fatto che $f(x)$ è la somma di due componenti — $\sin(x)$ e $\frac{1}{3}\sin(3x)$ — e i grafici di queste componenti sono ben noti.



per ottenere il grafico di f , partiamo dal grafico della componente $\sin(x)$ e, per fare la somma, ci spostiamo verticalmente di $\frac{1}{3}\sin(3x)$.



Unendo i punti



Questo grafico non sarà, probabilmente, molto accurato, però è chiaro che rappresenta correttamente l'andamento di f .

Attenzione: quest'ultimo procedimento è meno facile di come sembra, e per avere buoni risultati è necessaria una certa esperienza.