

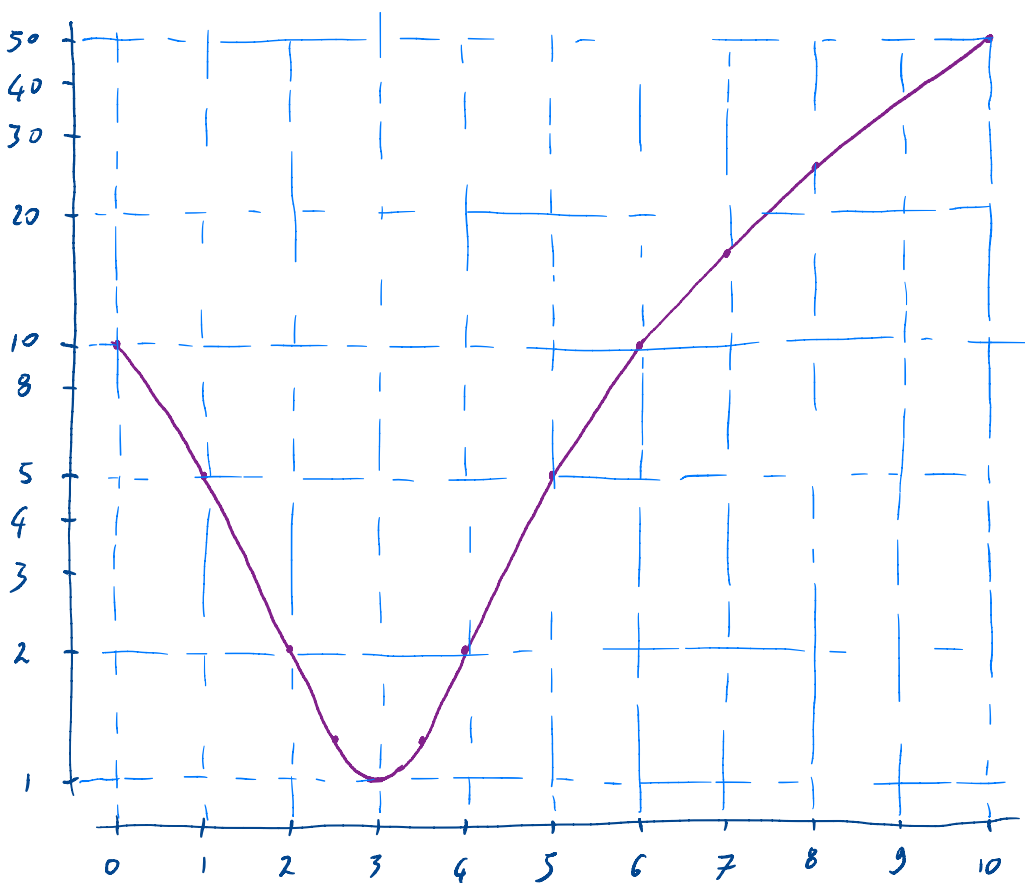
Esame del 18.5.2024 - Soluzioni

ESERCIZIO A

Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

in un diagramma semilogaritmico in cui l'asse delle ascisse è in scala lineare e rappresenta l'intervallo $[0, 10]$, mentre l'asse delle ordinate è in scala logaritmica.



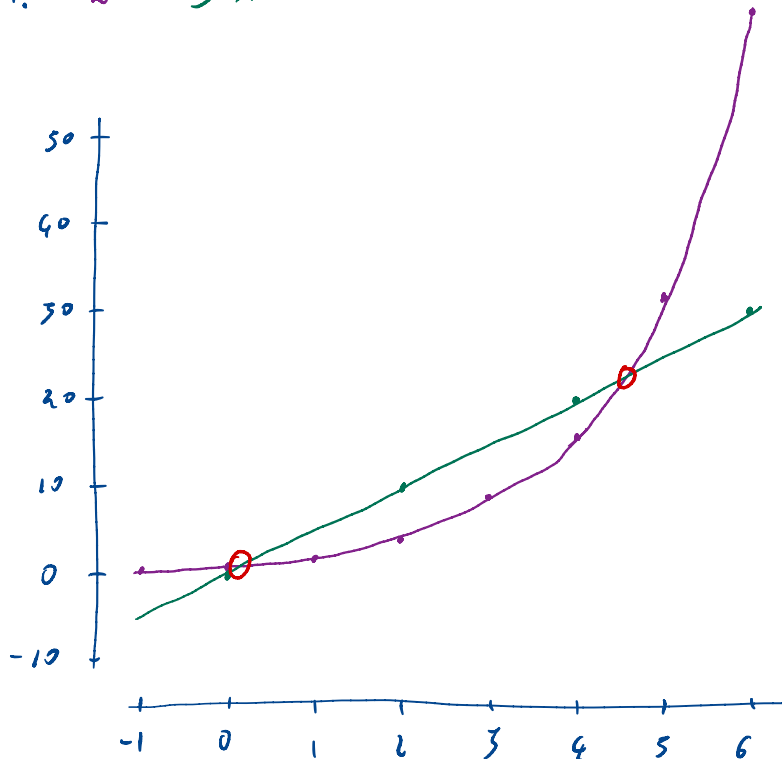
ESERCIZIO B

Determina tutte le soluzioni di ciascuna delle seguenti equazioni, arrotondate alla cifra dei centesimi.

$$2^x = 5x$$

$$x^4 = 1 + x$$

1. $2^x = 5x$



Mi aspetto una soluzione,
 x_1 , fra 0 e 1, e una,
 x_2 , fra 4 e 5.

$$4.485 \quad 22.33 < 22.425$$

$$4.49 \quad 22.47 > 22.45$$

Procedendo per bisezione ottengo

$$2^{0.235} \approx 1.1769 > 5 \cdot 0.235 = 1.175$$

$$2^{0.24} \approx 1.1810 < 5 \cdot 0.24 = 1.2$$

Quindi $x_1 \approx 0.24$ arrotondato ai centesimi

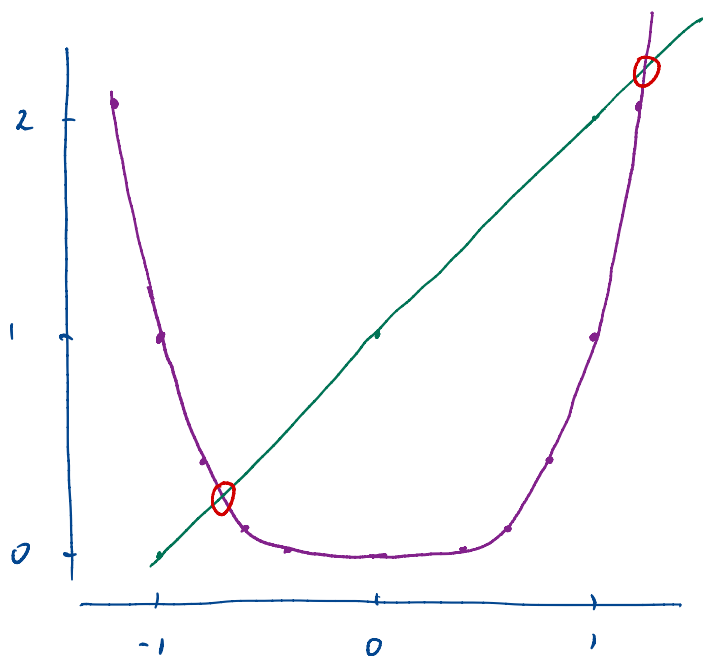
Analogamente

$$2^{4.485} \approx 22.33 < 4.485 \cdot 5 = 22.425$$

$$2^{4.49} \approx 22.47 > 4.49 \cdot 5 = 22.45$$

Quindi $x_2 \approx 4.48$ arrotondato ai centesimi

2. $x^4 = 1 + x$



17: aspetto una soluzione,
 x_1 , fra -0.8 e -0.6 ed
una, x_2 , fra 1.0 e 1.2 .

1.22

1.225

Procedendo per bisezione ottengo

$$-0.72^4 \approx 0.2687 < 1 - 0.72 = 0.28$$

$$-0.725^4 \approx 0.2763 > 1 - 0.725 = 0.275$$

Quindi $x_1 \approx 0.28$ arrotondato ai centesimi

Analogamente

$$1.22^4 \approx 2.2153 < 1 + 1.22 = 2.22$$

$$1.225^4 \approx 2.2519 > 1 + 1.225 = 2.225$$

Quindi $x_2 \approx 1.22$ arrotondato ai centesimi

ESERCIZIO C

La formula che lega il periodo di oscillazione T di un pendolo alla lunghezza l del medesimo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

dove $g = 9.81 \text{ ms}^{-2}$ rappresenta l'accelerazione di gravità. Calcola il periodo di oscillazione di un pendolo lungo $(100.0 \pm 1.0) \text{ cm}$. Scrivi il risultato in millisecondi, indicando l'incertezza assoluta.

Perché estrarro la radice equivale ad elevare alla 0.5

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{(1 \pm 1\%) \text{ m}}{9.81 \text{ m/s}^2}} = \left(2\pi\sqrt{\frac{1}{9.81}} \pm 0.5\% \right) \text{ s}$$

2.0061 0.0100

$$= (2.006 \pm 0.010) \text{ s} = \underline{\underline{(2006 \pm 10) \text{ ms}}}$$

ESERCIZIO D

Determina il valore della costante a sapendo che la funzione

$$f(x) = 1 + x - a^x$$

soddisfa l'equazione $f(5) = 0$. Calcola quindi il valore dell'integrale definito

$$\int_0^5 f(x) dx$$

ed il massimo ed il minimo dei valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo $[0, 5]$.

La costante a è determinata dall'equazione

$$0 = f(5) = 1 + 5 - a^5$$

da cui $a^5 = 6$, quindi $a = \sqrt[5]{6} \approx 1.4310$

Calcolando l'integrale indefinito abbiamo

$$\int f(x) dx = \int 1 + x - a^x dx = x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\log_e a} a^x + C$$

Quindi

$$\int_0^5 f(x) dx = \left[x + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{\log_e \sqrt[5]{6}} (\sqrt[5]{6})^x \right]_0^5 =$$
$$= \underline{17.5 - \frac{25}{\log_e 6} \approx 3.5472}$$

Per determinare massimo e minimo, calcoliamo innanzitutto la derivata di $f(x)$

$$f'(x) = 1 - \log_e(a) a^x = 1 - \log_e(\sqrt[5]{6}) (\sqrt[5]{6})^x$$

Risolviendo l'equazione $f'(x) = 0$ otteniamo

$$1 - \log_e(\sqrt[5]{6}) (\sqrt[5]{6})^x = 0$$

$$x = \log_{\sqrt[5]{6}} \left(\frac{1}{\log_e(\sqrt[5]{6})} \right) = \frac{-5 \cdot \log_e \left(\frac{1}{5} \log_e 6 \right)}{\log_e 6} \approx \underline{2.8638}$$

$x_1 = 5$

Potremmo quindi trovare valori estremali di $f(x)$

per $x=0$, $x=x_1$, o $x=5$. Otteniamo

x	$f(x)$
0	0
x_1	$1 + x_1 - a^{x_1} = 1 - \frac{5 + 5 \log_e \left(\frac{1}{5} \log_e 6 \right)}{\log_e 6} \approx 1.0732$
5	0

Quindi il minimo valore assunto da f in $[0,5]$ è 0 ed il massimo circa 1.0732.

ESERCIZIO E

Trova la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$f'' - 5f' + 6f = 30$$

Determina quindi la soluzione particolare tale che $f(0) = f'(0) = 0$.

RisolviAMO l'equazione omogenea associata

$$f'' - 5f' + 6f = 0$$

$$\alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \Rightarrow \alpha = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 3 \end{matrix}$$

$$f_{om.}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}$$

Una soluzione particolare dell'equazione data è

$$f_{prt.}(t) = 5$$

Quindi la soluzione generale cercata è

$$\underline{f(t) = f_{om.}(t) + f_{prt.}(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t} + 5.}$$

Dobbiamo ora determinare C_1 e C_2 affinché

valgano le condizioni $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$

$$f'(t) = 2C_1 e^{2t} + 3C_2 e^{3t}$$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 + C_2 + 5 = 0 \\ 2C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = -15 \\ C_2 = 10 \end{cases}$$

La soluzione particolare cercata è quindi

$$\underline{f(t) = -15 e^{2t} + 10 e^{3t} + 5}$$

ESERCIZIO F

Il contenuto delle bottiglie d'acqua minerale prodotte dalla premiata ditta Fanghiglia si distribuisce in maniera gaussiana, con media di 1.000 l, e deviazione standard di 20 ml. Che percentuale delle bottiglie contiene più di 1.05 l? Entro quanti millilitri dal valore medio si trova il 90% delle bottiglie? Rappresenta graficamente la distribuzione di questa variabile statistica (ponendo attenzione ad indicare le unità corrette sugli assi del diagramma).

In unità standard, 1.05 l corrisponde a

$$z_1 = \frac{1.05 \text{ l} - 1.000 \text{ l}}{20 \text{ ml}} = 2.5$$

Il 98.76% delle bottiglie ricade fra $-z_1$ e z_1 , per cui la percentuale cercata è

$$\frac{100\% - 98.76\%}{2} = \underline{0.62\%}$$

Il valore di z entro il quale si trova il 90% della gaussiana è $z_2 = 1.645$. Infatti, da tabella, a $z = 1.60$ corrisponde il 89.04% e a $z = 1.65$ il 90.11%, per interpolazione lineare $z_2 \approx 1.60 + \frac{1.65 - 1.60}{90.11 - 89.04} (90 - 89.04)$

Nota: anche $z_2 = 1.65$, ossia semplicemente il valore tabulato più prossimo, ai fini del corso, è accettabile.

Questo z corrisponde ad uno spostamento dalla media di $\sigma \cdot z_2 = 20 \text{ ml} \cdot 1.645 \approx \underline{33 \text{ ml}}$

Il medesimo valore si sarebbe ottenuto usando 1.65.

$\frac{\%}{ml}$

