

Prova scritta del 14.vii.2025 - Soluzioni

ESERCIZIO A

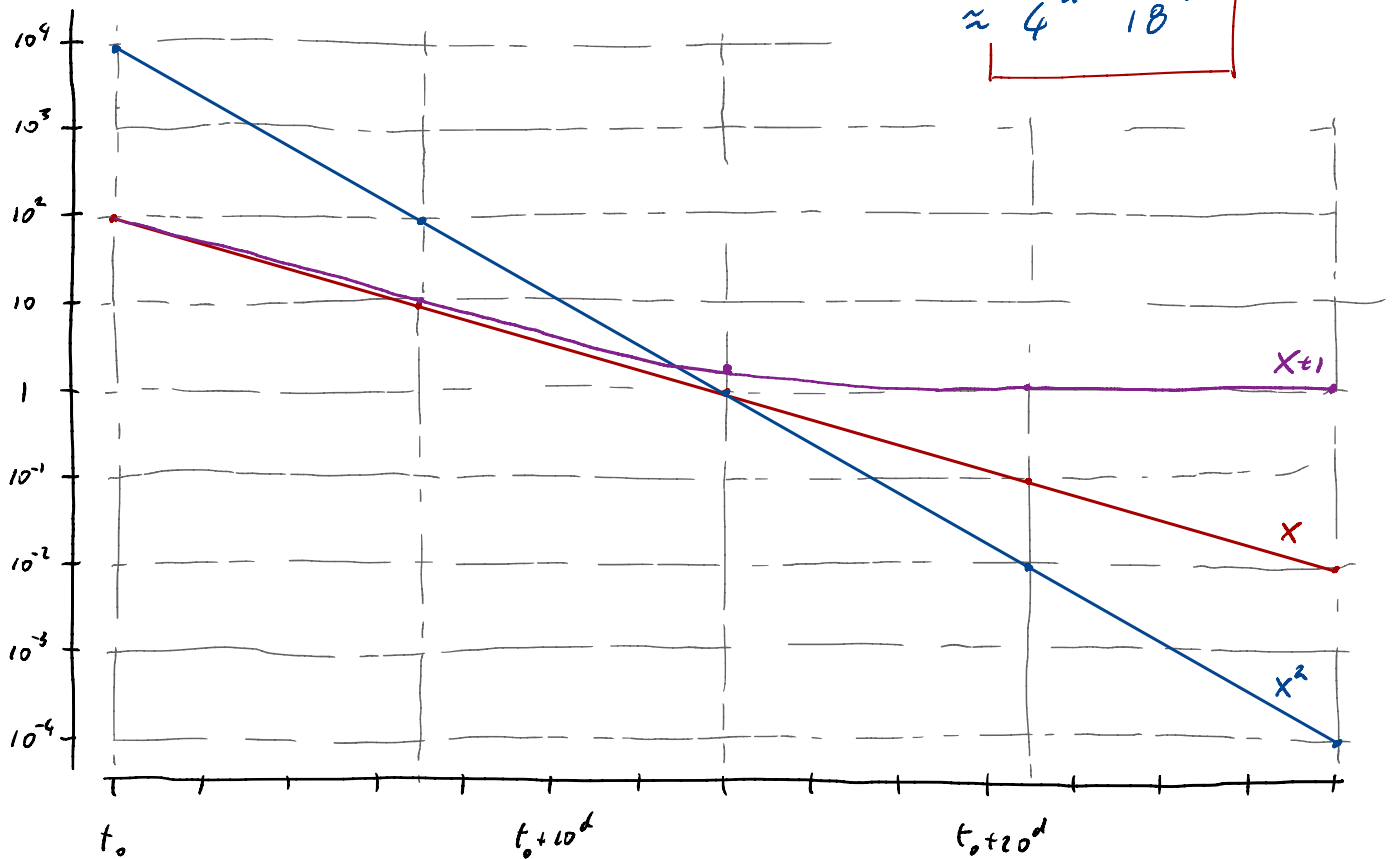
La quantità X decade esponenzialmente di un fattore 10 ogni sette giorni. Sapendo che X vale $X_0 = 95$ al tempo t_0 , dopo quanto tempo assume il valore $X_1 = 20$, espresso in giorni e ore correttamente arrotondate?

Rappresenta l'andamento di X , $X+1$, e X^2 in un periodo di quattro settimane a partire da t_0 , per mezzo di un grafico semi-logaritmico.

$$X(t) = 95 \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{t-t_0}{7d}} = 20$$

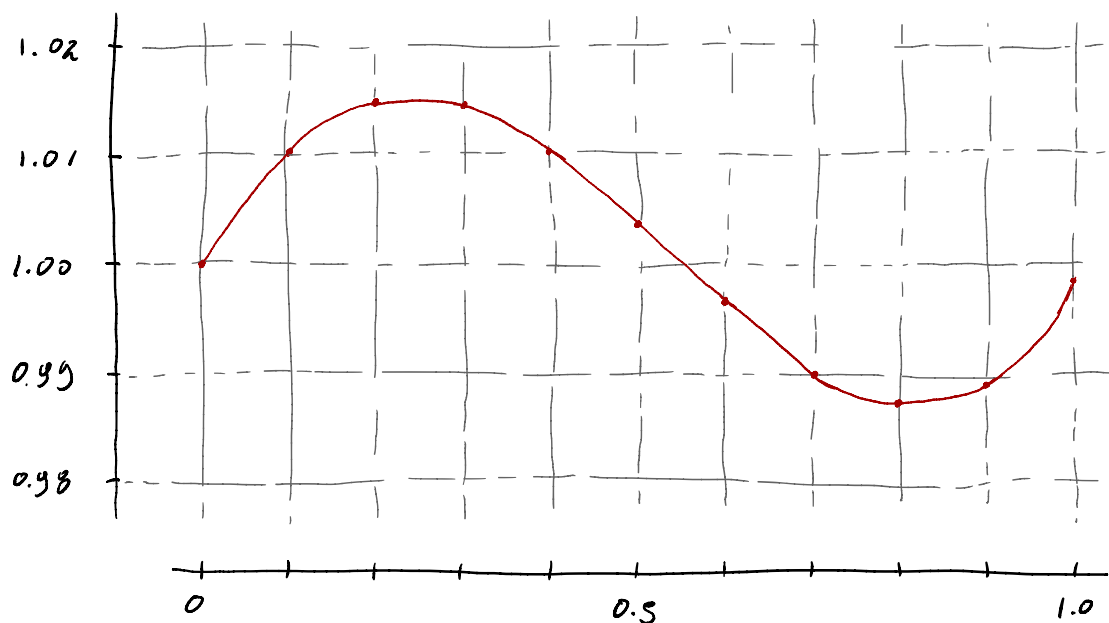
$$t - t_0 = 7d \log_{\frac{1}{10}} \left(\frac{20}{95}\right) = -7d \log_{10} \left(\frac{20}{95}\right) \approx 4.7363 d$$

$$\approx 4^d 18^h$$



ESERCIZIO B

Rappresenta la funzione $f(x) = e^x - 0.86x(1+x)$ per mezzo di un grafico cartesiano, per $0 \leq x \leq 1$.



ESERCIZIO C

Determina il massimo possibile valore di

$$\int_1^a -x^2 + 8x - 12 \, dx$$

al variare di a nell'intervallo $1 \leq a \leq 10$.

$$\begin{aligned} \text{Detta } f(a) &= \int_1^a -x^2 + 8x - 12 \, dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 8\frac{1}{2}x^2 - 12x \right]_1^a \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + 4a^2 - 12a + 8 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

l'esercizio chiede di trovare il massimo valore assunto da $f(a)$ per a che varia fra 1 e 10.

Determino i punti stazionari

$$f'(a) = -a^2 + 8a - 12 = 0 \quad a = \begin{matrix} \nearrow 2 \\ \searrow 6 \end{matrix}$$

Quindi il massimo può trovarsi in $a = 1, 2, 6, 10$

Calcolo f in questi punti:

$$f(1) = 0 \quad f(2) = -\frac{7}{3} \quad f(6) = 8 + \frac{1}{3} \quad f(10) = -45$$

Il massimo cercato è quindi $\boxed{8 + \frac{1}{3} \approx 8.33}$

ESERCIZIO D

La funzione $f(x) = e^{-2x} \sin(x+1)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti: determina questa equazione.

Occorre determinare a b c in modo tale che valga

$$f''(x) = a f'(x) + b f(x) + c$$

Calcolo le derivate

$$f'(x) = -2 e^{-2x} \sin(x+1) + e^{-2x} \cos(x+1)$$

$$f''(x) = 4 e^{-2x} \sin(x+1) - 2 e^{-2x} \cos(x+1)$$

$$- 2 e^{-2x} \cos(x+1) - e^{-2x} \sin(x+1)$$

$$= 3 e^{-2x} \sin(x+1) - 4 e^{-2x} \cos(x+1)$$

L'equazione da soddisfare è quindi:

$$3e^{-2x}\sin(x+1) - 4e^{-2x}\cos(x+1) =$$

$$= -2a e^{-2x}\sin(x+1) + a e^{-2x}\cos(x+1) + b e^{-2x}\sin(x+1) + c$$

Raccogliendo

$$(3+2a-b)e^{-2x}\sin(x+1) - (4+a)e^{-2x}\cos(x+1) - c = 0$$

Per cui ci basta richiedere che

$$\begin{cases} 3+2a-b = 0 \\ 4+a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \\ c = 0 \end{cases}$$

In conclusione, l'equazione cercata è

$$\boxed{f''(x) = -4f'(x) - 5f(x)}$$

ESERCIZIO E

Una corona circolare ha raggio interno r e raggio esterno $R = r + s$. Sapendo che

$$r = 5.000 \pm 0.010 \text{ m} \quad s = 15.00 \pm 0.10 \text{ mm}$$

determina l'area della corona circolare in cm^2 indicando l'incertezza assoluta.

L'area richiesta è

$$A_0 = \pi R^2 - \pi r^2 = \pi s (2r + s)$$

$$= 4719.4576 \text{ cm}^2 \pm \text{incertezza}$$

Per determinare l'incertezza, calcoliamo A nei valori estremi di r e s

	$s = 15.1 \text{ mm}$	$s = 14.9 \text{ mm}$
$r = 5.01 \text{ m}$	$A = 4760.4557 \text{ cm}^2$ MAX	$A = 4697.3096 \text{ cm}^2$
$r = 4.99 \text{ m}$	$A = 4741.4804 \text{ cm}^2$	$A = 4678.5858 \text{ cm}^2$ MIN

Dal cui

$$A = A_0 \pm \frac{A_{\text{MAX}} - A_{\text{MIN}}}{2}$$

$$= 4719.4576 \pm 40.9350 \text{ cm}^2$$

$$= \boxed{4720 \pm 40 \text{ cm}^2} \leftarrow \text{Correttamente arrotondata.}$$

ESERCIZIO F

I gruppi sanguigni sono distribuiti, in una certa popolazione, nel modo seguente

O	A	B	AB
46.5%	41.0%	9.5%	3.0%

Da questa popolazione si estraggono duecento individui di antica nobiltà, i cui gruppi sanguigni risultano distribuiti come segue

O	A	B	AB
102	76	18	4

Usa un test χ^2 per valutare un'eventuale differenza fra queste distribuzioni. Esattamente, che ipotesi nulla stai saggiando?

Le frequenze rilevate sul campione sono

$$n_O = 102 \quad n_A = 76 \quad n_B = 18 \quad n_{AB} = 4$$

Le frequenze teoriche sono

$$\bar{n}_O = 0.465 \cdot 200 = 93 \quad \bar{n}_A = 0.41 \cdot 200 = 82$$

$$\bar{n}_B = 0.095 \cdot 200 = 19 \quad \bar{n}_{AB} = 0.03 \cdot 200 = 6$$

Per cui

$$\chi^2 = \frac{(n_O - \bar{n}_O)^2}{\bar{n}_O} + \dots + \frac{(n_{AB} - \bar{n}_{AB})^2}{\bar{n}_{AB}} \approx 2.03$$

Per rigettare l'ipotesi nulla "le frequenze relative dei gruppi sanguigni O A B AB fra i nobili sono rispettivamente 46.5%, 41%, 9.5%, 3%" con $p < 0.05$ ci servirebbe $\chi^2 > 7.82$ (3 gradi di libertà). Non possiamo, quindi, rigettare questa ipotesi; ossia non abbiamo evidenza statistica di una differenza fra le due distribuzioni.