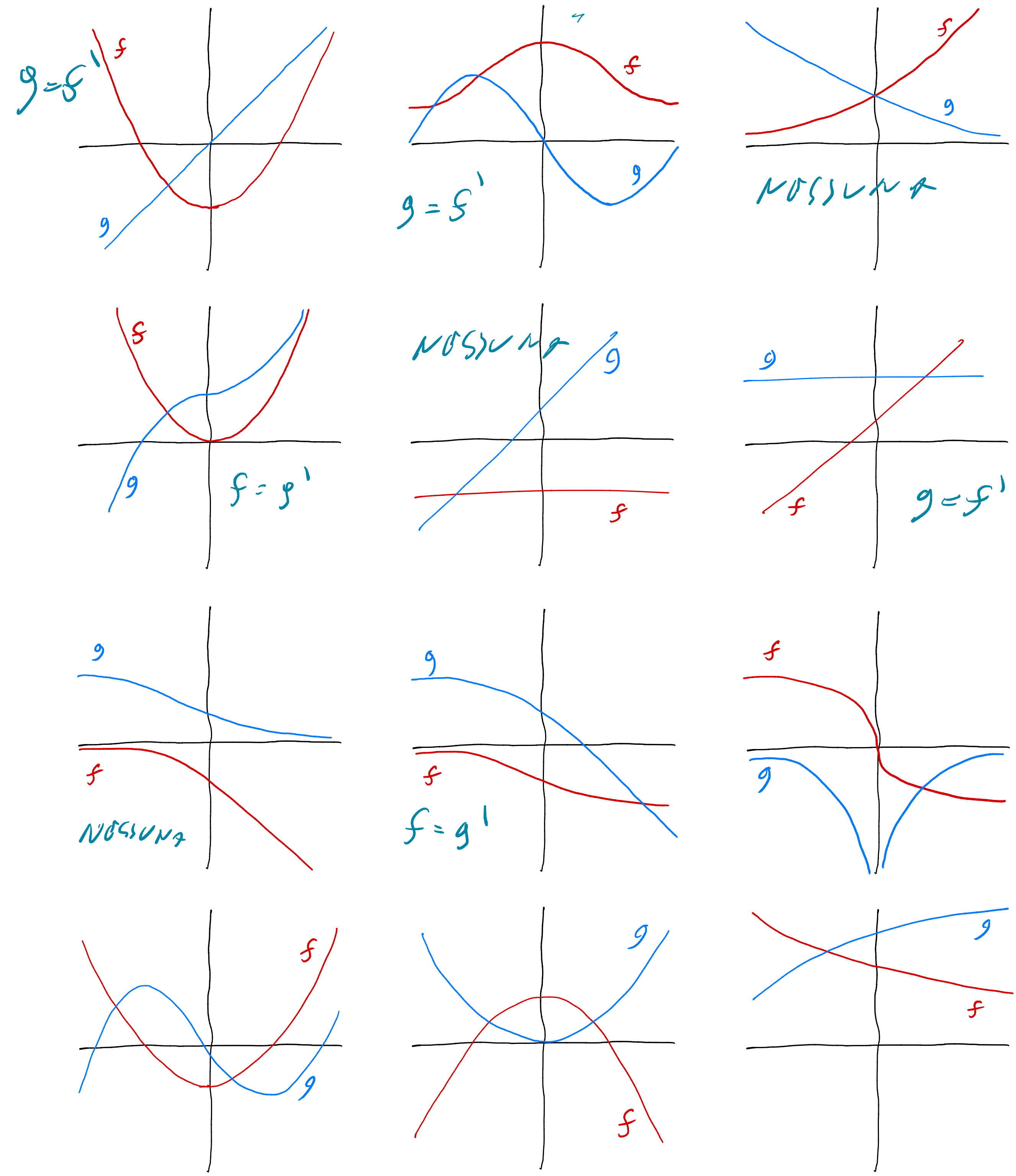
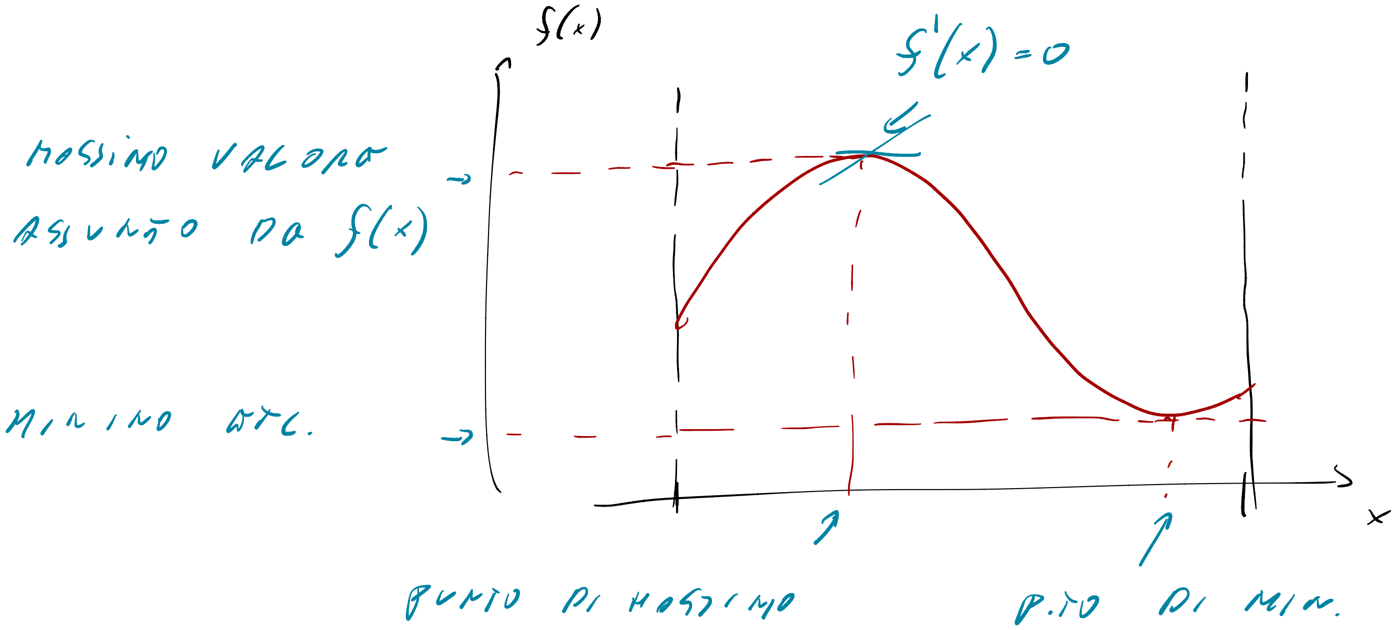
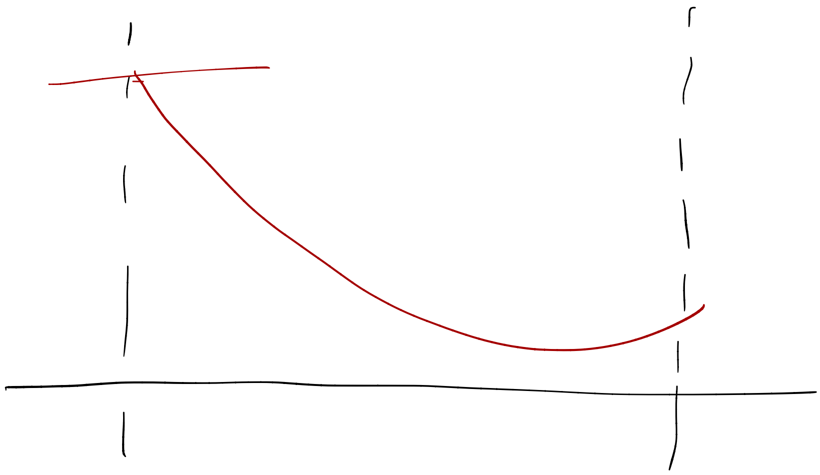
Esercizi su grafici e derivate

(A) Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f è la derivata di g, o g quella di f, oppure non si da nessuno di questi due casi.



Massimi e minimi





Massimi e minimi per $a \leq x \leq b$

1. Risolvo $f'(x) = 0$ nell'intervallo $[a, b]$

   $\Longrightarrow$ PUNTI STAZIONARI $x_1 \dots x_n$

2. Calcolo $f(a)$ $f(x_1)$ $\dots$ $f(x_n)$ $f(b)$

3. Il massimo di questi è il massimo valore assunto da f in $[a, b]$, e il minimo etc.

Esempio

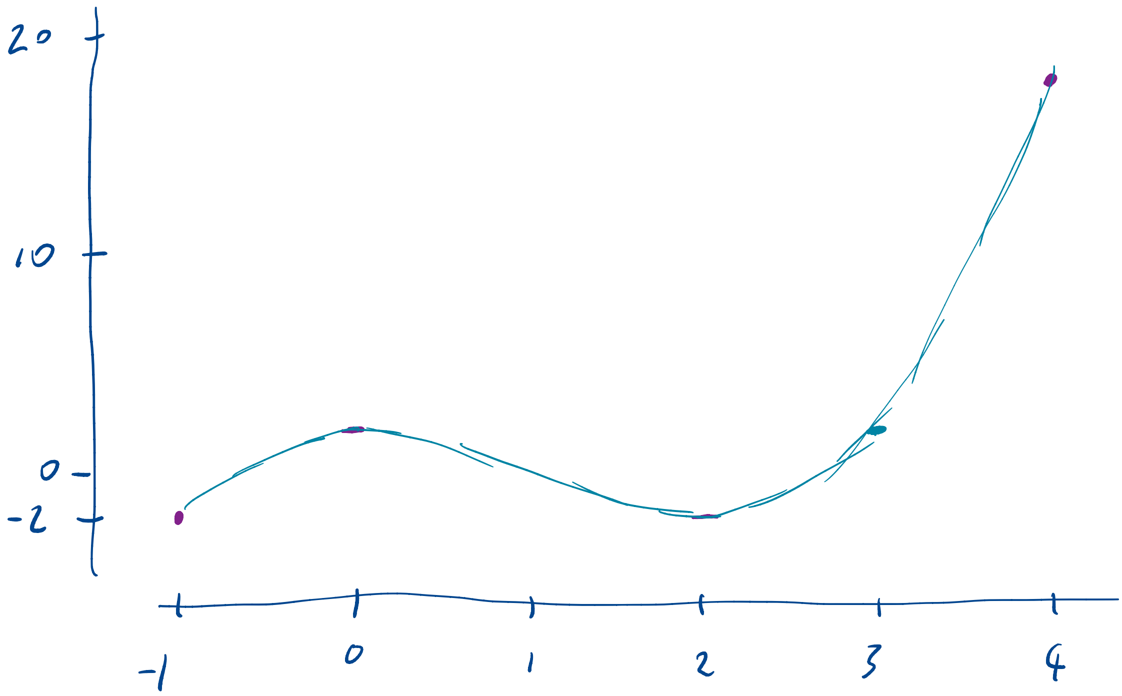
$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ $\qquad [a, b] = [-1, 4]$

$f'(x) = 3x^2 - 6x$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 6x = 0 \quad \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \end{cases} \Bigg\} \text{ p.ti stazionari}$$

$f(-1) = \underline{-2}$ $\qquad f(0) = 2$ $\qquad f(2) = \underline{-2}$ $\qquad f(4) = \underline{18}$

MIN VAL ASSUNTO $\qquad$ MAX



Massimi e minimi in generale

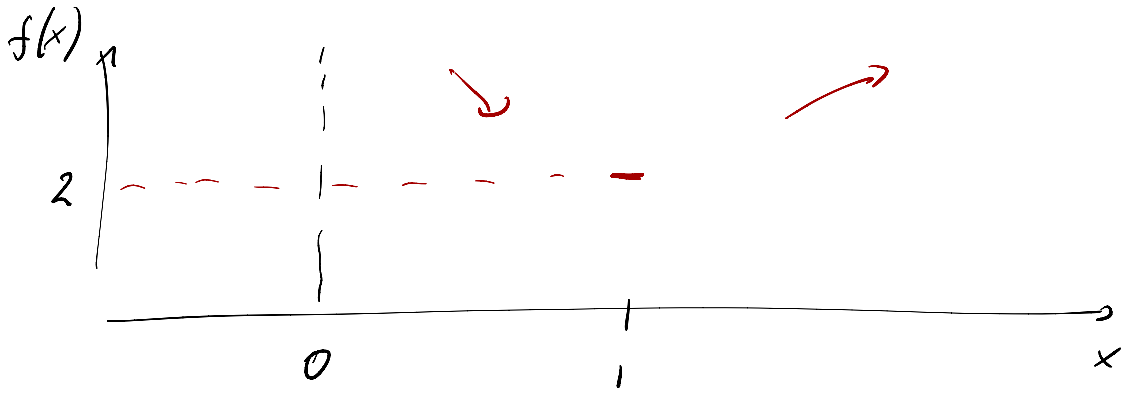
1. Calcolo i p.ti staz. $x_1 \dots x_n$
2. Valuto $f(x)$ in $x_1 \dots x_n$ e negli (eventuali) estremi del dominio.
3. Il max e il min di questi valori sono candidati massimo e minimo.
4. Decido se i candidati sono davvero max e min. osservando il grafico o il segno della derivata.

Es $\quad f(x) = x + \frac{1}{x}$ per $x > 0$

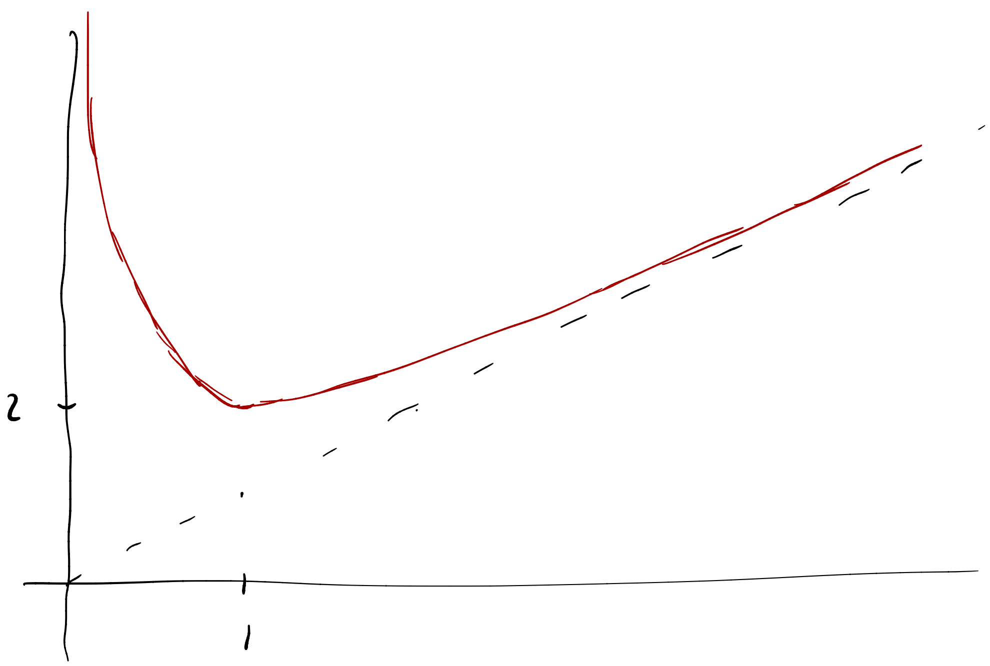
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \iff 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ \cancel{x = -1} \end{cases}$$

$$f(1) = 2$$



P.to di MINIMO



Esercizi elementari di analisi matematica

(F) Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg. Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/L, calcola la capienza del fusto.

(G) Dati i punti $A(-2,-1)$ e $B(0,-1)$, trova il punto $C(x,y)$ sulla retta $x+y=1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

(H) L'energia termica irradiata nell'unità di tempo da un corpo nero alla temperatura T (nella scala assoluta) è

$$\frac{dQ}{dt} = -\sigma A T^4$$

dove A indica l'area della superficie del corpo e $\sigma = 5,6704 \cdot 10^{-8}\ J \cdot m^{-2} s^{-1} K^{-4}$.

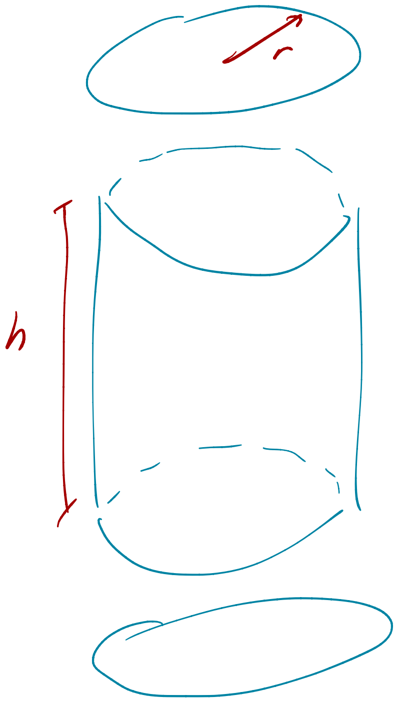
La variazione di temperatura di una massa M di ferro è legata alla variazione di energia termica da

$$\frac{dQ}{dt} = cM\frac{dT}{dt}$$

con $c = 0.4495\ J\, g^{-1} K^{-1}$.

Infine la densità del ferro è $\rho = 7.874\ g \cdot cm^{-3}$.

Dati: S = sup. del fusto

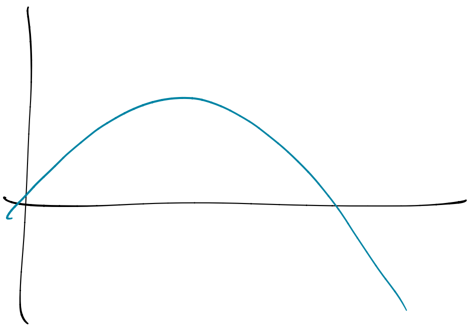


$$S = 2\pi r^2 + h\, 2\pi r$$

$$V = \pi r^2 h$$

$$h(r) = \frac{S - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{S}{2\pi r} - r$$

$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r \right)$$

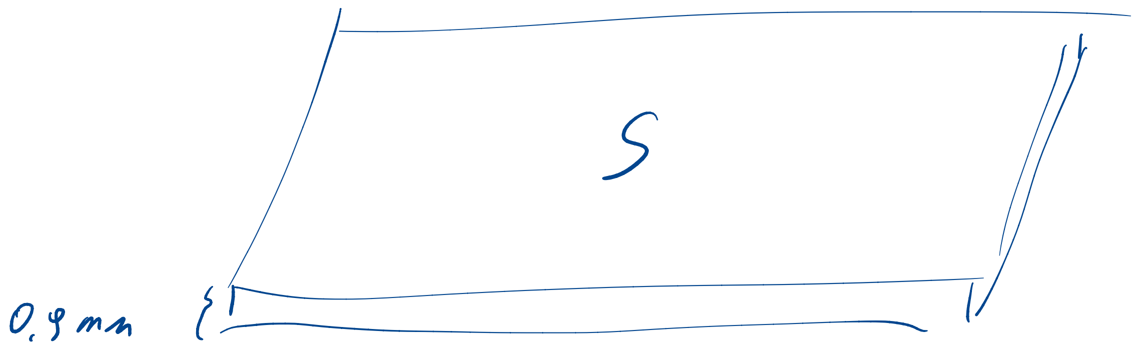


$$= \frac{S}{2} r - \pi r^3$$

$$V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

$$V'(r) = 0 \longrightarrow r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

$$V_{max} = \left(\frac{S}{2} - \frac{S}{6} \right) \sqrt{\frac{S}{6\pi}} = \frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$



$$\frac{14\ kg}{7.85\ \frac{kg}{l}} = \frac{14}{7.85}\ l$$

$$dm^3 = 10^{-3}\ m^3 = \cancel{mm} \cdot m^2$$

$$S = \frac{\frac{14}{7.85}\ l}{0.9\ \cancel{mm}} = \frac{14}{7.85 \cdot 0.9}\ m^2$$