

Nome e cognome: _____

Matricola: _____

UNIVERSITÀ DI PISA

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE

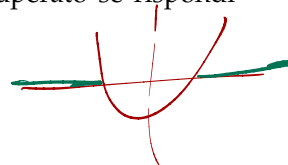
TEST DI MATEMATICA ED ELEMENTI DI STATISTICA DEL 20-XI-2024, A.A. 2024-25

Scrivi le tue risposte direttamente sul foglio, le brutte non vanno consegnate. Le risposte numeriche devono essere *esatte*, salvo nei casi in cui la domanda richiede esplicitamente un'approssimazione.

Non è consentito l'uso della calcolatrice né di libri, appunti, quaderni, etc.

Il test consta di un totale di dieci domande, e si ritiene superato se rispondi correttamente ad almeno sette delle stesse.

Hai a disposizione 20 minuti.



1 - Risolvi la disequazione $x^2 - 1 \geq 0$.

$3 \leq x \leq 12$

Risposta: $x \leq -1 \vee 1 \leq x$

2 - Calcola la mediana di 7 4 5 8 12.

Risposta: 7

3 - Quanto vale $5/3$ arrotondato a tre cifre significative?

Risposta: 1.67

4 - Calcola $\log_{10}(500) - \log_{10}(0.5)$. $= \log_{10} \frac{500}{0.5} = \log_{10} 1000$

Risposta: 3

5 - Calcola in notazione scientifica $8.3 \cdot 10^4 - 2.5 \cdot 10^3$. $= 0.25 \cdot 10^4$

Risposta: $8.05 \cdot 10^4$

6 - A che percentuale equivale la frazione $3/15$?

Risposta: 20%

7 - In una gaussiana, che percentuale della popolazione ricade oltre una deviazione standard sopra la media?

Risposta: 16%

8 - Calcola $(10.0 \pm 0.2) \cdot (5.0 \pm 0.1)$ con l'incertezza assoluta. $\pm 2\% \quad \pm 2\%$

Risposta: 50 ± 2

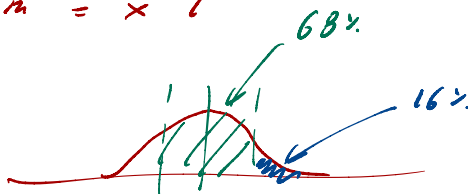
9 - Che formula lega $\sin(x)$ e $\cos(x)$?

Risposta: $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$

10 - Quanti litri sono 0.02 metri cubi?

Risposta: 20

$0.02 \text{ m}^3 = \times 1$



UNIVERSITÀ DI PISA
CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE
PROVA DI MATEMATICA ED ELEMENTI DI STATISTICA DEL 20·XI·2024, A.A. 2024–25

Puoi usare strumenti da scrittura e disegno, calcolatrice, libri e appunti. Non puoi comunicare se non con il docente.

Il compito consta di un totale di quattro esercizi, che valgono nove punti ciascuno.

Hai a disposizione due ore.



Esercizio A

La crescita di una popolazione di microorganismi segue la curva logistica

$$P(t) = \frac{P_0 K e^{t/\tau}}{K - P_0 + P_0 e^{t/\tau}}$$

con $P_0 = 1.50 \cdot 10^6$, $K = 3.70 \cdot 10^9$ e $\tau = 2.00$ h.

1. Rappresenta l'andamento della popolazione, per tempi compresi fra 0 e 24 ore, in un diagramma cartesiano.
2. Rappresenta la medesima funzione mettendo la popolazione in scala logaritmica.
3. Nelle prime ore, la crescita è approssimativamente esponenziale: rappresenta questa funzione per mezzo di un'espressione analitica, e aggiungi il grafico dell'esponenziale ai due diagrammi precedenti.

Esercizio B

Si vuole preparare una soluzione di NaOH con la concentrazione di 0.2000 moli per litro di soluzione. Per farlo, si riempie un matraccio tarato da 100.00 ± 0.08 ml con l'opportuna quantità di NaOH, pesata usando una bilancia che ha l'incertezza di ± 0.01 g, e acqua distillata. Una mole di NaOH pesa 39.9971 g.

1. Quanti grammi di soluto è necessario pesare?
2. Che incertezza assoluta abbiamo sulla concentrazione della soluzione?
3. Usando una bilancia più precisa, sarebbe possibile ottenere una incertezza di ± 0.0001 moli al litro?

ESERCIZIO C

Si estrae un campione casuale di dieci individui da una popolazione molto vasta.

La variabile statistica X assume, su questi dieci individui, i seguenti valori

28.6 33.1 36.5 36.9 37.6 41.7 43.0 44.7 45.9 51.6

1. Calcola media, mediana e distanza interquartile di X sul campione.
2. Se stimiamo la media di X su tutta la popolazione con la media del campione, che intervallo di confidenza al 95% abbiamo?
3. Usando un campione più grande, potremmo determinare la media della popolazione con un intervallo di confidenza al 95% di ± 1.0 : quanto dovrebbe essere grande questo campione?

ESERCIZIO D

Considera le seguenti coppie di valori assunti dalle variabili statistiche X e Y su un campione di sei individui.

X	0.7	9.4	4.3	3.2	6.9	5.3
Y	4.1	9.9	6.8	6.6	7.2	9.8

1. Rappresenta questi punti su un diagramma di dispersione.
2. Calcola la retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente).
3. È possibile affermare a un livello di significatività statistica, p -value, di 0.05 che le variabili X e Y sono linearmente correlate?

ESERCIZIO A

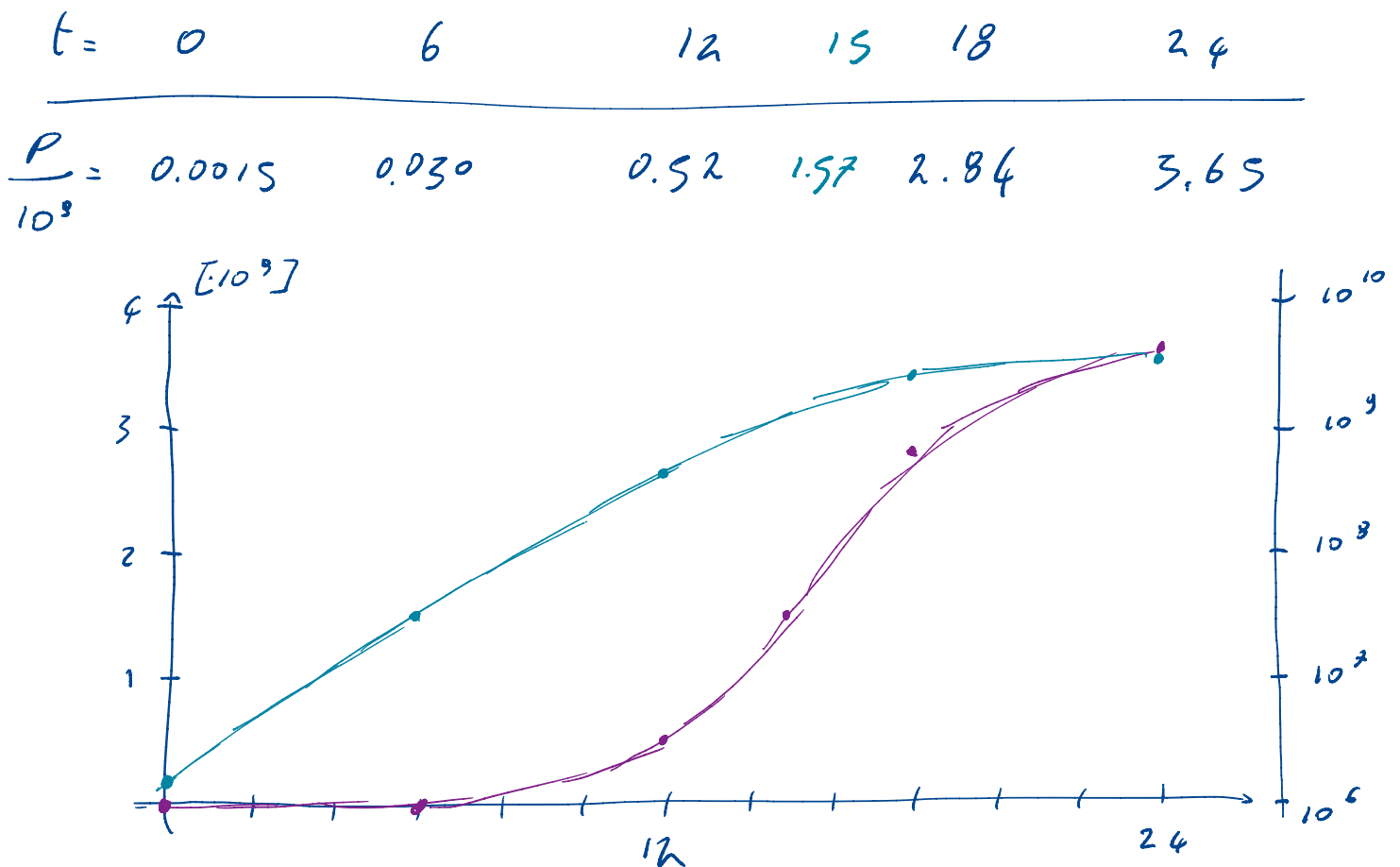
La crescita di una popolazione di microorganismi segue la curva logistica

$$P(t) = \frac{P_0 K e^{t/\tau}}{K - P_0 + P_0 e^{t/\tau}} = \frac{K}{\frac{K-P_0}{P_0} e^{-t/\tau} + 1}$$

2466 $\approx$ $\frac{K-P_0}{P_0}$

con $P_0 = 1.50 \cdot 10^6$, $K = 3.70 \cdot 10^9$ e $\tau = 2.00$ h.

1. Rappresenta l'andamento della popolazione, per tempi compresi fra 0 e 24 ore, in un diagramma cartesiano.

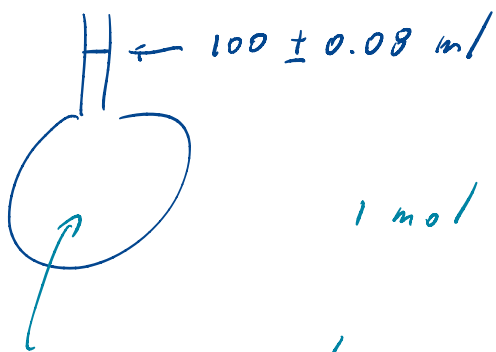


$$P(t) = \frac{K}{\underbrace{\frac{K-P_0}{P_0}}_{\gg 1} \underbrace{e^{-t/\tau}}_{\text{Trascurato}} + 1} \approx \frac{K}{\frac{K-P_0}{P_0} e^{-t/\tau}} = \frac{K P_0}{K-P_0} e^{t/\tau}$$

ESERCIZIO B

Si vuole preparare una soluzione di NaOH con la concentrazione di 0.2000 moli per litro di soluzione. Per farlo, si riempie un matraccio tarato da 100.00 ± 0.08 ml con l'opportuna quantità di NaOH, pesata usando una bilancia che ha l'incertezza di ± 0.01 g, e acqua distillata. Una mole di NaOH pesa 39.9971 g.

1. Quanti grammi di soluto è necessario pesare?
2. Che incertezza assoluta abbiamo sulla concentrazione della soluzione?
3. Usando una bilancia più precisa, sarebbe possibile ottenere una incertezza di ± 0.0001 moli al litro?



1 mol NaOH pesa 39.9971 g

$$100 \text{ ml} \cdot 0.2 \frac{\text{mol}}{\text{l}} = 0.02 \text{ mol}$$

$$1 \text{ mol} : 39.9971 \text{ g} = 0.02 \text{ mol} : x \text{ g}$$

$$0.1 \cancel{\text{ l}} \cdot 0.2 \frac{\text{mol}}{\cancel{\text{ l}}} =$$

$$x = 39.9971 \cdot 0.02 \text{ g}$$

$$= 0.799942 \text{ g}$$

$$= 0.1 \cdot 0.2 \text{ mol}$$

$$= 0.02 \text{ mol}$$

$$\text{conc.} = \frac{\text{moli di soluto}}{\text{vol. di soluzione}} = \frac{\frac{(0.789 \dots \pm 0.013) \cdot 1 \text{ mol}}{59.93 \dots 3}}{100 \pm \underbrace{0.08 \text{ ml}}_{0.08\%}} =$$

$$= 0.2 \pm 1.33\% \frac{\text{mol}}{\text{l}} = 0.2 \pm 0.00267 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

$$= \underline{0.200 \pm 0.003} \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

$$\text{conc.} = \frac{\text{moli di soluto}}{\text{vol. di soluzione}} = \frac{\frac{(0.789 \dots \pm \cancel{0.013}) \cdot 1 \text{ mol}}{59.93 \dots 3}}{100 \pm \underbrace{0.08 \text{ ml}}_{0.08\%}} =$$

$$= 0.2 \pm 0.08\% \frac{\text{mol}}{\text{l}} = 0.2 \pm 0.00016 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$$

↑
> 0.0001

ESERCIZIO C

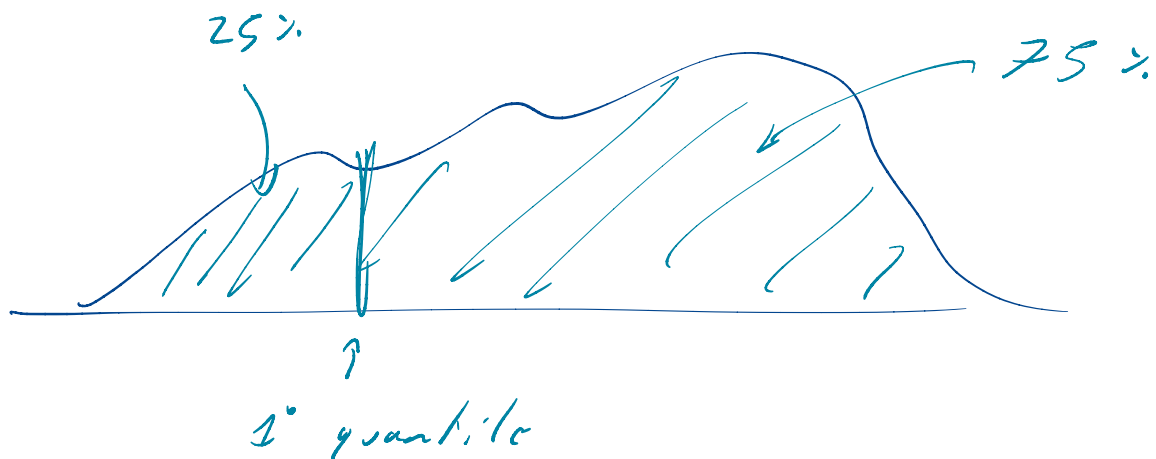
Si estrae un campione casuale di dieci individui da una popolazione molto vasta. La variabile statistica X assume, su questi dieci individui, i seguenti valori

$$28.6 < 33.1 < 36.5 < 36.9 < \underline{37.6 < 41.7} < 43.0 < 44.7 < 45.9 < 51.6$$

1. Calcola media, mediana e distanza interquartile di X sul campione.
2. Se stimiamo la media di X su tutta la popolazione con la media del campione, che intervallo di confidenza al 95% abbiamo?
3. Usando un campione più grande, potremmo determinare la media della popolazione con un intervallo di confidenza al 95% di ± 1.0 : quanto dovrebbe essere grande questo campione?

$$\underline{1.} \quad \mu = 39.96 \quad \text{mediana} = \frac{37.6 + 41.7}{2} = 39.65$$

$$n\text{-esimo quantile} \rightarrow \frac{n \cdot (10 + 1)}{4} = \text{esimo individuo}$$



Cont. SPAGLIATO:

$$\frac{3 \cdot (10 + 1)}{4} - \frac{1 \cdot (10 + 1)}{4} = \dots$$

$$\widehat{SEM} = \frac{S}{\sqrt{10}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{10}} \quad 2.1305$$

$$\sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2}{10} - \mu^2$$

$$S^2 = \frac{(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_{10} - \mu)^2}{9} =$$

$$= \frac{(x_1 - \mu)^2 + \dots + (x_{10} - \mu)^2}{10} \cdot \frac{10}{9} = \sigma^2 \cdot \frac{10}{9}$$

$$\mu \pm 2 \cdot \widehat{SEM} = \mu \pm 4.261 \leftarrow \text{metodo approssimativo}$$

$$\mu \pm 2.26 \widehat{SEM} = \mu \pm 4.39 \leftarrow \text{metodo per piccoli campioni.}$$

$$\begin{array}{c} \widehat{SEM} \cdot 2 = 1.0 \\ \uparrow \\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{array}$$

$$\frac{2\sigma}{\sqrt{n}} = 1$$

$$n = (2\sigma)^2$$

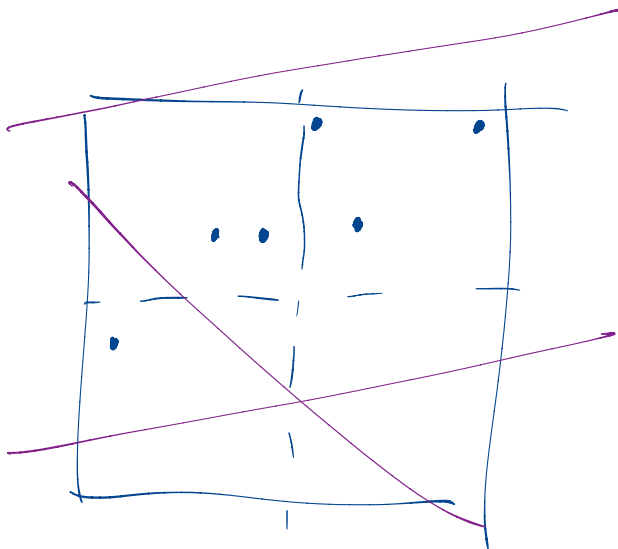
$$\approx 170$$

ESERCIZIO D

Considera le seguenti coppie di valori assunti dalle variabili statistiche X e Y su un campione di sei individui.

X	0.7	9.4	4.3	3.2	6.9	5.3
Y	4.1	9.9	6.8	6.6	7.2	9.8

1. Rappresenta questi punti su un diagramma di dispersione.
2. Calcola la retta di regressione di Y (variabile dipendente) rispetto a X (variabile indipendente).
3. È possibile affermare a un livello di significatività statistica, p-value, di 0.05 che le variabili X e Y sono linearmente correlate? ← Sì



1 p.l., $r = \frac{r}{r}$

$$Y^* = r X^*$$

$$Y = aX + b$$

$$t = r \sqrt{\frac{n-2}{1-r^2}}$$