

Prova in itinere del 7.xi.2025 - Soluzioni

ESERCIZIO A

La concentrazione di un farmaco nel plasma sanguigno di un paziente si può misurare in milligrammi al litro. Questa quantità, per un certo farmaco, decresce esponenzialmente nel tempo, a partire dal momento della somministrazione per via endovenosa, con un tempo di dimezzamento di 8.0 ore.

1. Quanto occorre perché una concentrazione iniziale di 5.0 mg/l decresca fino a 0.10 mg/l? (3 punti)
2. Al momento della somministrazione di una dose di farmaco, la concentrazione plasmatica **aumenta**, molto rapidamente, di 5.0 mg/l, poi riprende a decadere esponenzialmente. Il paziente riceve una dose **ogni** 12.0 ore. Traccia un diagramma cartesiano che rappresenti l'andamento della concentrazione plasmatica di questo paziente in un periodo di 48 ore dalla prima somministrazione del farmaco. (3 punti per le prime 12 ore, 3 punti per il resto)
3. A lungo andare, fra che coppia di valori oscilla la concentrazione plasmatica del paziente? (2 punti extra)

1.

$$\text{concentrazione}(t) = 5.0 \text{ mg/l} \cdot 2^{-\frac{t-t_0}{8h}} = 0.10 \text{ mg/l}$$
$$2^{-\frac{t-t_0}{8h}} = \frac{0.1}{5}$$
$$t-t_0 = -8h \log_2(0.02) \approx \underline{45 h}$$

2. Nel tempo di 12 ore, la concentrazione passa da x a $x \cdot 2^{-12/8} \approx x \cdot 0.3536$, quindi, a partire da una concentrazione iniziale nulla, ogni 12 ore

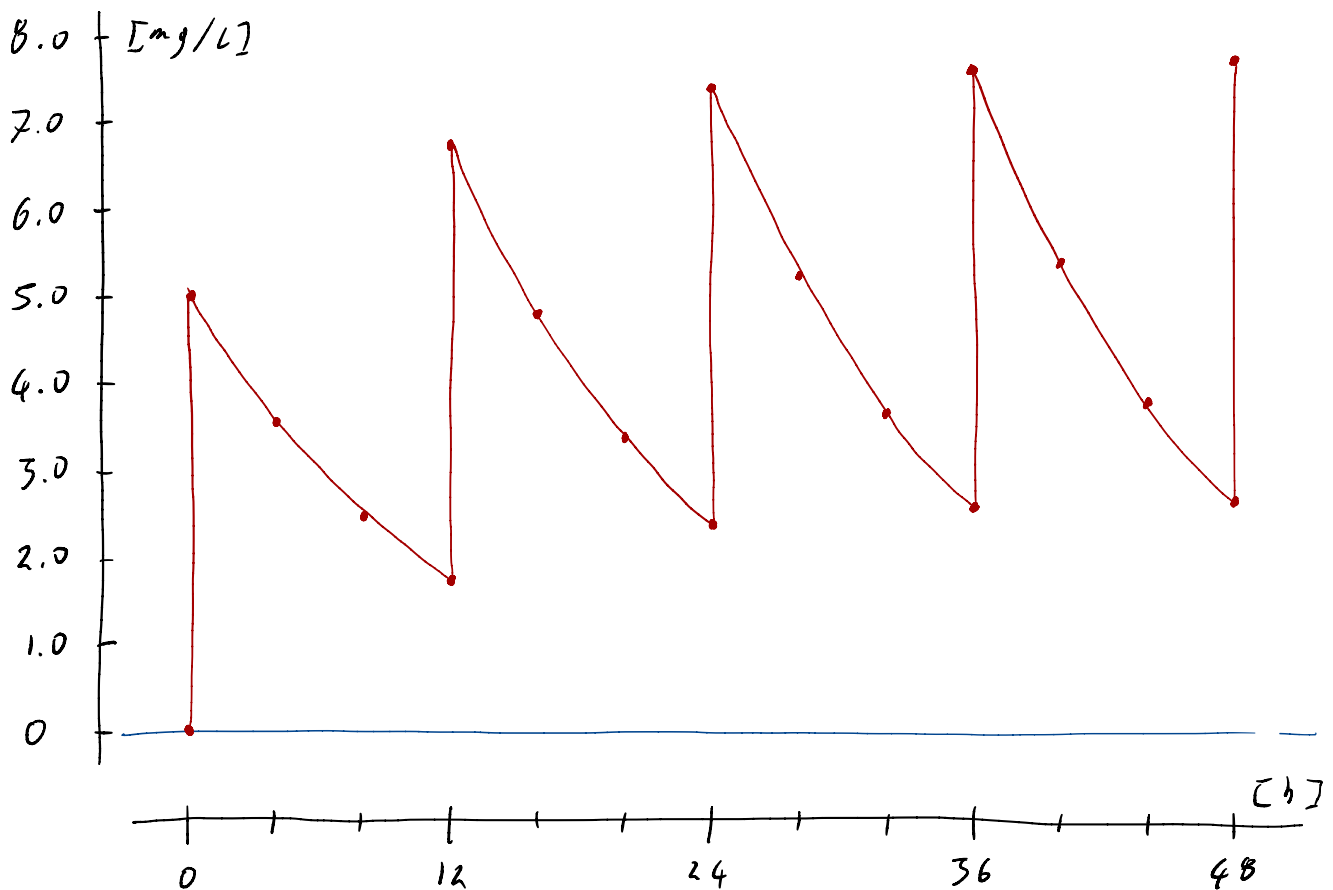
si aggiungono alla concentrazione 5.0 mg/l , poi si moltiplica il risultato per $2^{-12/8}$. In questo modo si ottiene

tempo [h]	conc. prima della somministrazione [mg/l]	conc. dopo la somministrazione [mg/l]
0	0	5.0
12	1.77	6.77
24	2.39	7.39
36	2.61	7.61
48	2.69	7.69

Sfruttando il decadimento esponenziale possiamo completare questa tabella con alcuni tempi intermedi

tempo [h]	conc. [mg/l]	tempo [h]	conc. [mg/l]
0	$0 \rightarrow 5$		
4	3.56	28	5.23
8	2.50	32	3.70
12	$1.77 \rightarrow 6.77$	36	$2.61 \rightarrow 7.61$
16	4.79	40	5.38
20	3.38	44	3.81
24	$2.39 \rightarrow 7.39$	48	$2.69 \rightarrow 7.69$

Da cui il grafico



3. A lungo andare la concentrazione oscillerà fra due valori x e y tali che

$$y = x \cdot 2^{-12/8}$$

$$x = y + 5.0 \text{ mg/L}$$

Da cui si ricava

$$x = \frac{5.0 \text{ mg/L}}{1 - 2^{-12/8}} = \underline{\underline{7.7 \text{ mg/L}}}$$

$$y = \underline{\underline{2.7 \text{ mg/L}}}$$

ESERCIZIO B

Uno sperimentatore dispone di un cilindro graduato avente la precisione di ± 0.5 ml. Con questo strumento, misura 40.0 ml di una soluzione 0.450 ± 0.005 molare di NaOH. Egli aggiunge, poi, acqua distillata fino a portare il livello della soluzione nel cilindro a 60.0 ml. Determina la molarità della soluzione risultante, indicando l'incertezza assoluta su questo risultato.

La molarità cercata è data dall'equazione

$$\underbrace{(40.0 \pm 0.5 \text{ ml}) \cdot (0.450 \pm 0.005 \text{ mol/l})}_{\text{quantità di NaOH prima della diluizione}} = \underbrace{(60.0 \pm 0.5 \text{ ml}) \cdot x}_{\text{quantità di NaOH dopo la diluizione}}$$

Per cui

$$x = \frac{40.0 \pm 0.5 \text{ ml} \quad \pm 1.25\%}{60.0 \pm 0.5 \text{ ml} \quad \pm 0.83\%} \cdot (0.450 \pm 0.005 \text{ mol/l}) \quad \pm 1.11\%$$

$$= 0.3 \pm 3.13\% \text{ mol/l} = \underline{0.300 \pm 0.010 \text{ mol/l}}$$

ESERCIZIO C

Considera la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 - x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$$

1. Traccia un diagramma cartesiano, uno semi-logaritmico e uno bi-logaritmico, di questa funzione, per $10 \leq x \leq 1000$. (2 punti a diagramma)
2. Quale di queste affermazioni è verosimile, per opportuni valori di a e b, nell'intervallo considerato? (1 punto)

$$f(x) \approx ax + b \quad f(x) \approx ab^x \quad f(x) \approx ax^b$$

3. Determina i valori di a e b corretti per l'espressione identificata al punto precedente. (2 punti)

Nota: ti ricordo che l'argomento del seno si intende espresso in **radianti**.

1. Diagramma cartesiano

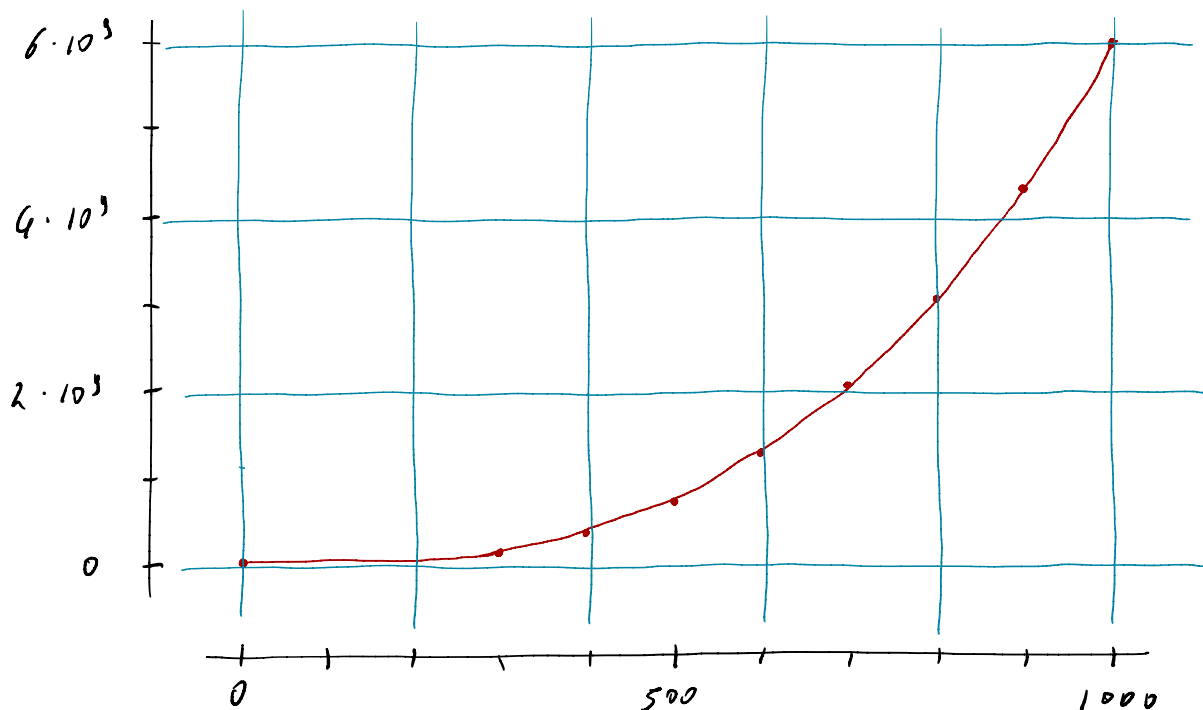


Diagramma semi-logaritmico

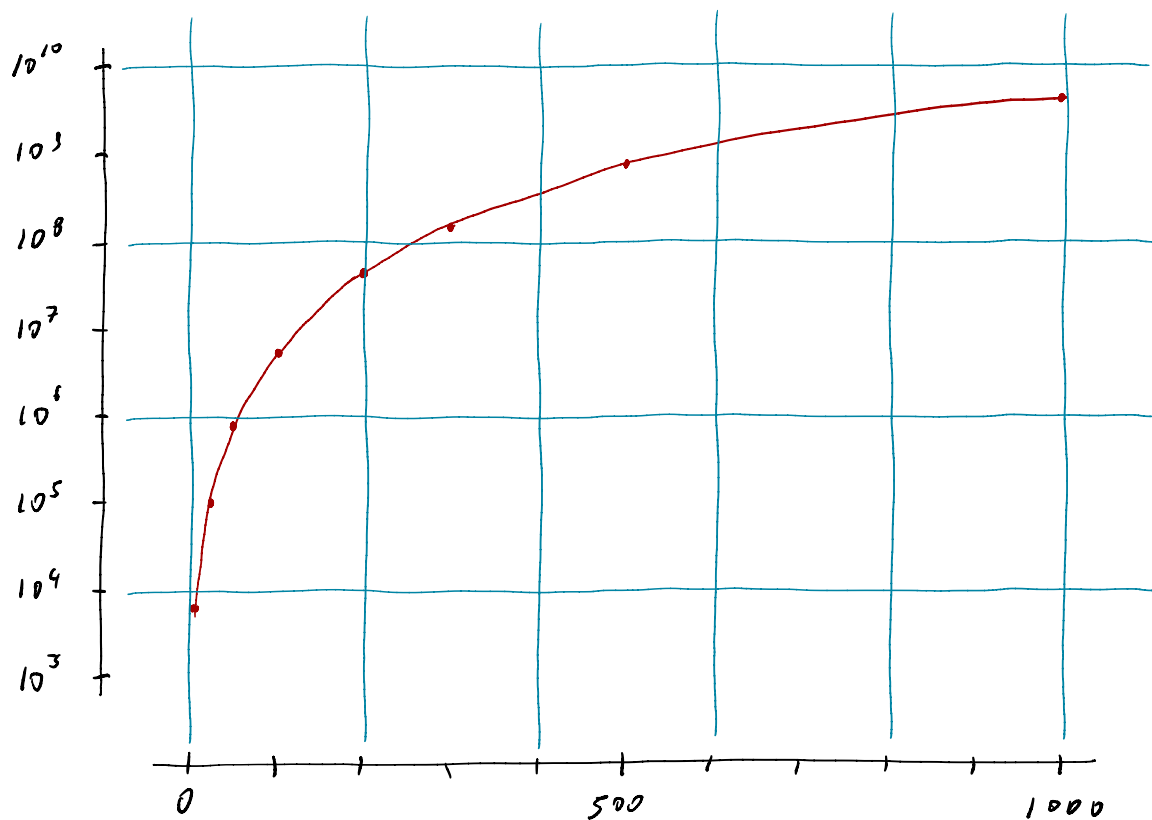
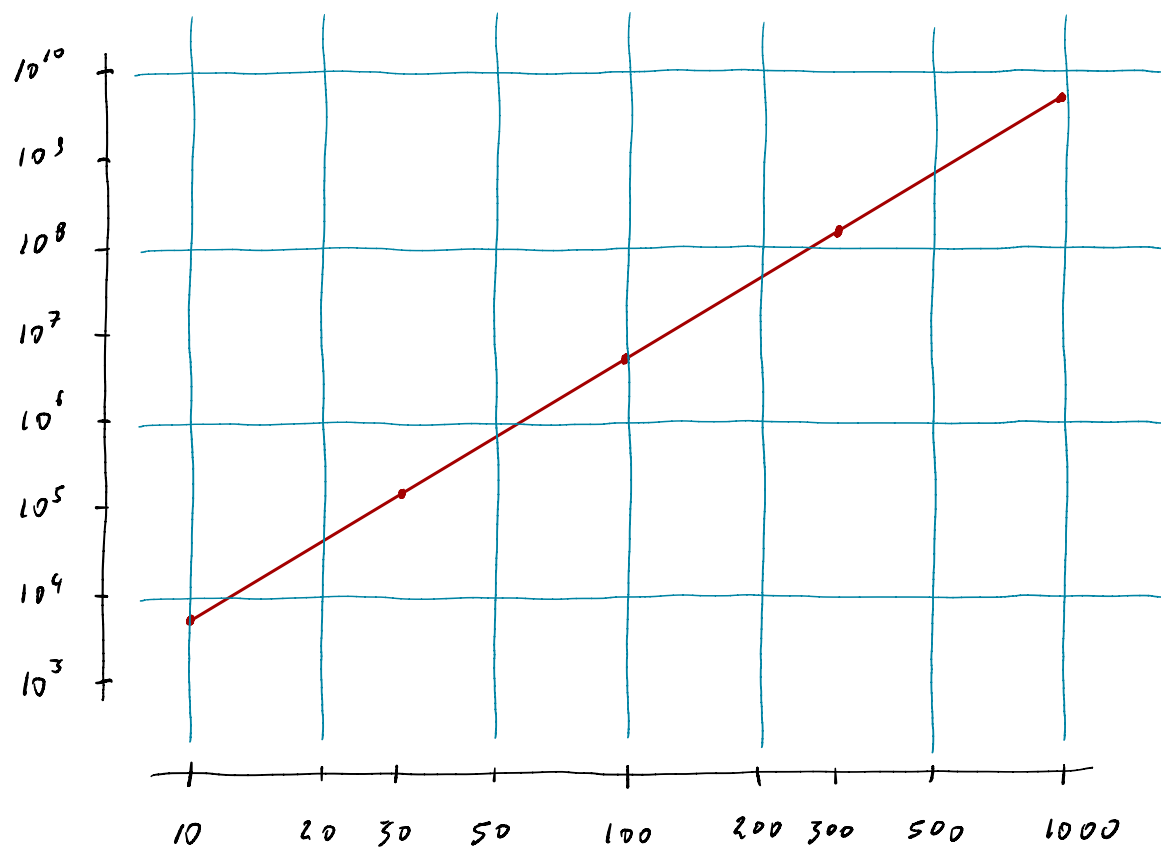


Diagramma bi-logaritmico



2. Dall'esame dei grafici deduco che

$$f(x) \approx ax^b$$

3. Risolvo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} a \cdot 10^b = f(10) \\ a \cdot 1000^b = f(1000) \end{cases}$$

Ottenendo

$$b = \log_{100} \frac{f(1000)}{f(10)} \approx \underline{3} \quad a = \frac{f(10)}{10^b} \approx \underline{6}$$

Per cui

$$\underline{f(x) \approx 6 \cdot x^3}$$

nell'intervallo considerato.

ESERCIZIO D

Il seguente *stem-and-leaf plot* rappresenta i valori assunti da una variabile statistica x su un campione, di 100 individui, estratto casualmente da una vasta popolazione.

Srry.

10	5	1
11	26	2
12	268	3
13	0014555889	10
14	000122233333344567777888	25
15	0001122344477888899	19
16	00011333355567778889	20
17	223455578899	12
18	112489	6
19	58	2

100 ← tot.

Ti ricordo che questi valori sono quindi:

$$x_1 = 105 \quad x_2 = 112 \quad x_3 = 116 \quad \dots \quad x_{99} = 195 \quad x_{100} = 198$$

Per tua convenienza, ho calcolato:

$$\underbrace{x_1 + x_2 + \dots + x_{100}}_{\bar{x}} = 15482 \quad \underbrace{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2}_{\sum x^2} = 2428902$$

1. Determina media μ , deviazione standard σ , mediana $\tilde{x}$ e distanza interquartile IQR di x . (3 punti)
2. Rappresenta i dati per mezzo di un istogramma, dividendo l'asse delle ascisse in intervalli di ampiezza 10, e indicando sull'asse delle ordinate la densità di probabilità. (2 punti)
3. Rappresenta sul medesimo diagramma una distribuzione gaussiana con media μ e deviazione standard σ . (2 punti)
4. Calcola un intervallo di confidenza al 95% per la media di x sulla popolazione. (2 punti)

$$1. \quad \mu = \frac{\sum x}{100} = \underline{154.82} \quad \sigma^2 = \frac{\sum x^2}{100} - \mu^2 = 319.7876$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \approx \underline{17.88}$$

Leggo dallo stem-plot che

$$x_{25} = x_{26} = 143 \quad x_{50} = x_{51} = 154 \quad x_{75} = x_{76} = 167$$

Per cui:

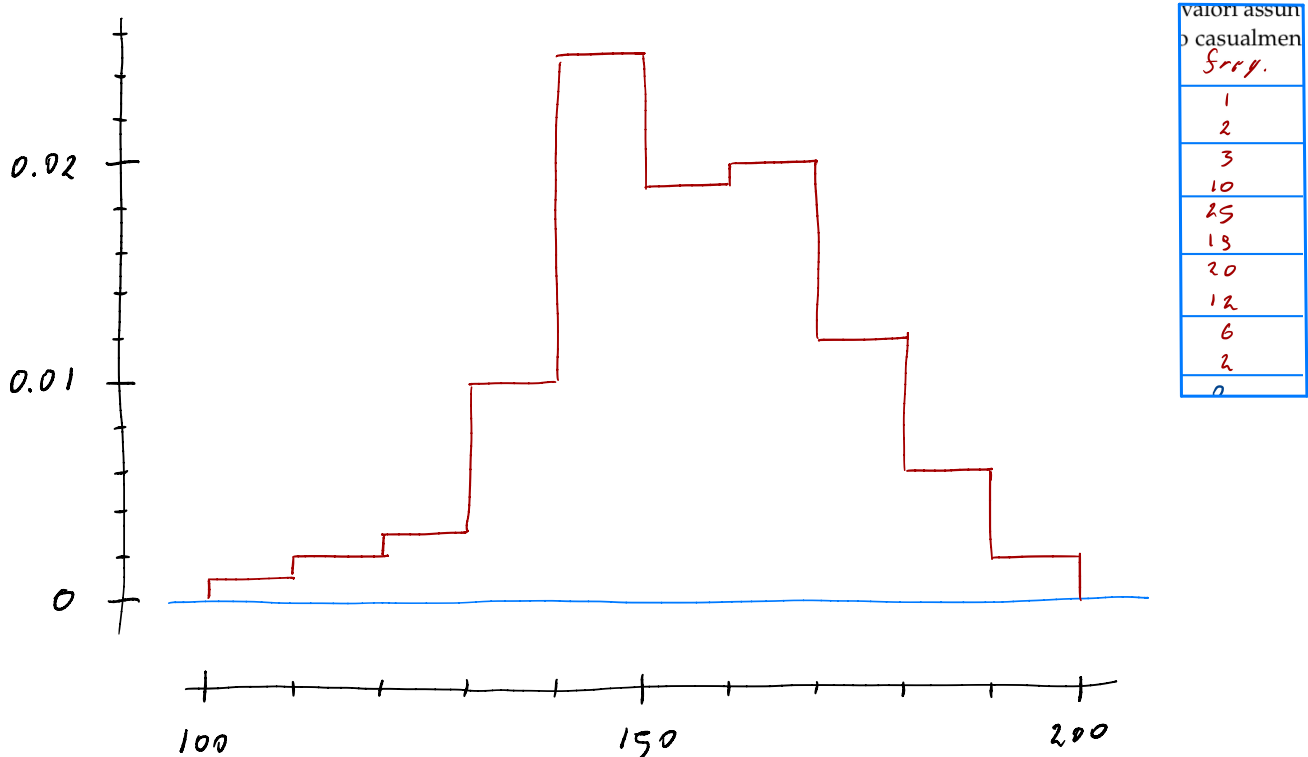
$$\bar{x} = \frac{x_{50} + x_{51}}{2} = \underline{154}$$

$$Q_1 = x_{25} \cdot 0.25 + x_{26} \cdot 0.75 = 143$$

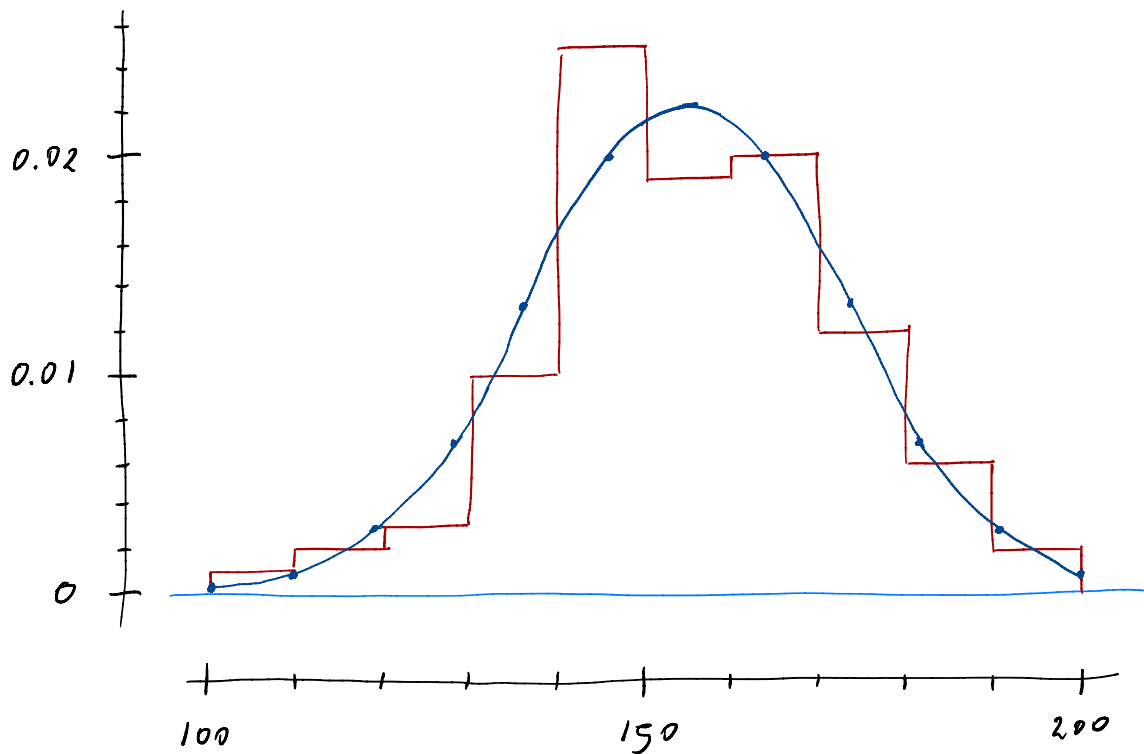
$$Q_3 = x_{75} \cdot 0.75 + x_{76} \cdot 0.25 = 167$$

$$IQR = Q_3 - Q_1 = \underline{24}$$

2. È immediato leggere dallo stem-plot le frequenze degli intervalli $100 \leq x < 110$, $110 \leq x < 120$, etc. Basta infatti contare le cifre in ciascuna riga. Le densità di probabilità si ottengono dividendo le frequenze per la numerosità della popolazione (100) e l'ampiezza degli intervalli (10).



3. Ripeto l'istogramma per non confondere la risposta precedente



4. $\widehat{SEM} = \frac{\sigma}{\sqrt{100}} \approx 1.788$

Per cui l'intervallo cercato è

$$154.82 \pm 1.96 \cdot \widehat{SEM} = \underline{154.8 \pm 3.5}$$

Ossia, la media della popolazione ha il 95% di probabilità (rispetto alla casualità nella scelta del campione) di trovarsi nell'intervallo

$$\underline{151.3 \leq \text{media} \leq 158.3}$$