

Integrazione per parti:

Convenzioni: $\int f(x) dx = F(x) + C$

$$\int g(x) dx = G(x) + C$$

$$\int \underbrace{f(x) \cdot g(x)}_{\int f dx} dx = F(x) \cdot g(x) - \underbrace{\int F(x) \cdot g'(x) dx}_{\int F \cdot g' dx}$$

Es $\int \overset{f}{x} \cdot \overset{g}{\sin(x)} dx \leftarrow \text{SCONVENIENTE!}$

$$\int x dx = \frac{1}{2} x^2 + C \quad F(x) = \frac{1}{2} x^2$$

$$\int x \sin(x) dx = \frac{1}{2} x^2 \sin(x) - \underbrace{\int \frac{1}{2} x^2 \cos x dx}_{\text{ops!}}$$

$\int \overset{g}{x} \cdot \overset{f}{\sin(x)} dx \leftarrow \text{UTILE!}$

$$\int x \cdot \sin(x) dx = \overset{F}{\downarrow} -\cos(x) \cdot \overset{g}{\downarrow} x - \int \overset{F}{\downarrow} -\cos(x) \cdot \overset{g'}{\downarrow} 1 dx =$$

$$= -x \cos(x) + \int \cos x dx = \sin(x) - x \cos(x) + C$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\underbrace{\sin(x)} - \underbrace{x \cos(x)} + \underbrace{C} \right)' = \\
 & = \cancel{\cos(x)} - \left(\cancel{\cos(x)} - x \sin(x) \right) + 0 = \\
 & = x \sin(x) \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Beispiel $\rightarrow F(x) = x$

$$\begin{aligned}
 \int 1 \cdot \log_e(x) dx &= x \cdot \log_e(x) - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx \\
 &= x \cdot \log_e(x) - x + C
 \end{aligned}$$

$$\int \log_e(x) dx = x \log_e(x) - x + C$$

Es

$$\begin{aligned}
 \int \log_7 x \, dx &= \int \frac{\log_e x}{\log_e 7} \, dx = \frac{1}{\log_e 7} \int \log_e x \, dx \\
 &= \frac{1}{\log_e 7} (x \log_e x - x + C) \\
 &= x \log_7 x - \frac{x}{\log_e 7} + \frac{C}{\log_e 7}
 \end{aligned}$$

Ex. $\int x \cdot 7^x dx = (*)$

Calcolo $F(x)$

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$$

$$\int 7^x dx = \int (e^{\log_e 7})^x dx = \int e^{x \cdot \log_e 7} dx$$

$$\frac{1}{\log_e 7} e^{x \cdot \log_e 7} + C = \frac{7^x}{\underbrace{\log_e 7}_{F(x)}} + C$$

$$(*) = \frac{7^x}{\log_e 7} \cdot x - \int \frac{7^x}{\log_e 7} \cdot 1 dx$$

$$= \frac{7^x}{\log_e 7} \cdot x - \frac{1}{\log_e 7} \int 7^x dx$$

$$= \frac{7^x}{\log_e 7} \cdot x - \frac{1}{\log_e 7} \cdot \frac{7^x}{\log_e 7} + C$$

$$= \frac{x \cdot 7^x}{\log_e 7} - \frac{7^x}{(\log_e 7)^2} + C$$

Eg (per voi)

$$\int x^2 \cdot \cos(x) \, dx$$

Eg. differenziali lineari a coeff. costanti
del primo ordine.

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$
coefficienti: NUMERI

① Risolvo l'equazione OMOGENA ASSOCIATA

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

$$f(x) = e^{\lambda \cdot x}$$

$$\overbrace{\lambda \cdot e^{\lambda x}}^{f'} = a \cdot \underbrace{e^{\lambda x}}_f \Rightarrow \lambda = a$$

$$f(x) = C \cdot e^{ax} \leftarrow \text{SOLUZIONE GENERALE}$$

DELL'EQ. OMOGENA ASSOC.

② Cerco una soluzione particolare di

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

Impongo $f'(x) = 0$

$$0 = a \cdot f(x) + b$$

$$f(x) = -\frac{b}{a} \quad \leftarrow \text{SOLUZIONE PARTICOL. DELL'EQ. DATA}$$

$\downarrow$
 $f'(x) = 0 \quad \checkmark$

③ La sol. gen. di

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

è la somma di ① e ②

$$f(x) = C e^{ax} - \frac{b}{a}$$

Eg Trova la soluzione particolare
di $f'(x) = 2f(x) + 6$ tale che
 $f(0) = 0$.

dalla formula.

Soluzione $f(x) = C \cdot e^{2x} - 3$

Impongo la condizione iniziale $f(0) = 0$

$$C \cdot \underbrace{e^{2 \cdot 0}}_1 - 3 = 0 \Rightarrow C = 3$$

La sol. particolare cercata è

$$f(x) = 3e^{2x} - 3$$

Eg. differenziali lineari a coeff. costanti
del ^{secondo} ~~primo~~ ordine.

$$f''(x) = a \cdot f'(x) + b f(x) + c$$

① Risolvo l'omogenea associata

$$f''(x) = a \cdot f'(x) + b f(x)$$

Impongo $f(x) = e^{\lambda x}$ $f'(x) = \lambda e^{\lambda x}$
 $f''(x) = \lambda^2 e^{\lambda x}$

$$\cancel{\lambda^2 e^{\lambda x}} = a \cancel{\lambda e^{\lambda x}} + b \cancel{e^{\lambda x}}$$

$$\lambda^2 = a \lambda + b$$

$$\Delta = a^2 + 4b$$

caso $\Delta > 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$f(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

caso $\Delta = 0$

$$\lambda = \frac{a}{2}$$

$$f(x) = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

caso $\Delta < 0$

$$f(x) = e^{\lambda x} (C_1 \cos(\omega x) + C_2 \sin(\omega x))$$

$$\lambda = \frac{a}{2} \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

② Cerco una soluzione particolare di

$$f''(x) = a \cdot f'(x) + b f(x) + c$$

caso $b \neq 0$

$$\text{Impongo } f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) = 0$$

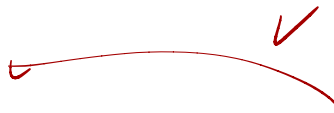
$$b f(x) + c = 0$$

$\Downarrow$

$$f(x) = \frac{-c}{b}$$

Caso $b=0$ e $a \neq 0$

$$f''(x) = a \cdot f'(x) + \cancel{b f(x)} + c$$

Impongo $f''(x) = 0$ 

$$0 = a f'(x) + c \Rightarrow f'(x) = -\frac{c}{a}$$

$$\Downarrow$$
$$f(x) = -\frac{c}{a} \cdot x$$

Caso $a=b=0$

$$f''(x) = c$$

e la risolvo integrando due volte!

③ La soluzione generale cercata è

$$① + ②.$$