

UNIVERSITÀ DI PISA

CORSO DI LAUREA IN CHIMICA E TECNOLOGIA FARMACEUTICHE

PROVA DI MATEMATICA ED ELEMENTI DI STATISTICA DEL 18·XII·2024, A.A. 2024-25

Puoi usare strumenti da scrittura e disegno, calcolatrice, libri e appunti. Non puoi comunicare se non con il docente.

Il compito consta di un totale di quattro esercizi, che valgono nove punti ciascuno.

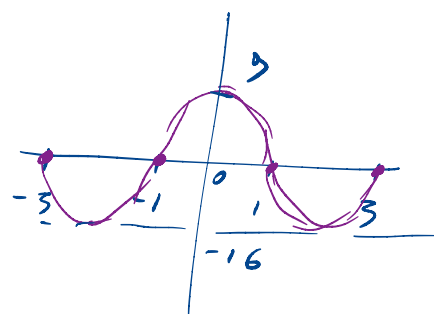
Hai a disposizione due ore.

$$= x^4 - 10x^2 + 9$$

ESERCIZIO A

$$= (x^2 - 9)(x^2 - 1)$$

Considera la funzione $f(x) = (x-3)(x-1)(x+1)(x+3)$.



1. Traccia un grafico di $f(x)$ per $-3 \leq x \leq 3$.
2. Trova i punti stazionari di $f(x)$.
3. Calcola il massimo ed il minimo dei valori assunti da $f(x)$ nell'intervallo $-3 \leq x \leq 3$.

ESERCIZIO B

$$f'(x) = 4x^3 - 20x$$

Considera la funzione $f(x) = x - \sin(x)$.

$$f' = x^2 - 2x \sin(x) + (\sin(x))^2$$

1. Traccia un grafico di $f(x)$ per $0 \leq x \leq 1$.
2. Calcola $\int_0^1 (f(x))^2 dx$.
3. Trova il valore di α che rende minimo $\int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx$.

Nota: puoi approssimare, per esempio col metodo dei trapezi, gli integrali che non riesci a calcolare in maniera analitica.

$$\cos(2x) = (\cos(x))^2 - (\sin(x))^2$$
$$1 - (\sin(x))^2$$

ESERCIZIO C

Considera la funzione $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right)$
con $\tau = 20$ e $P = 1$.

$$(\sin(x))^2 = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

1. Traccia un grafico di $f(t)$ per $0 \leq t \leq 3$.
2. Scrivi un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti che ammetta la soluzione particolare $f(t)$.
3. Supponi che τ sia noto con un'incertezza relativa del 10% e P di 10 parti per milione. Calcola l'incertezza relativa sui coefficienti dell'equazione.

$$\tau = 20 \pm 10\%$$

$$P = 1 \pm 10 \text{ ppm}$$

Considera la funzione $f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right)$
 con $\tau = 20$ e $P = 1$.

$$f(t) = e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right)$$

$$f'(t) = -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) - \frac{2\pi}{P} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right)$$

$$\begin{aligned} f''(t) &= \frac{1}{\tau^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + \frac{2\pi}{\tau P} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) \\ &\quad + \frac{2\pi}{\tau P} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) - \frac{4\pi^2}{P^2} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) \\ &= \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{4\pi^2}{P^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) \\ &\quad + \frac{4\pi}{\tau P} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) \end{aligned}$$

$$f'' = a f' + b f$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{\tau^2} - \frac{4\pi^2}{P^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) + \frac{4\pi}{\tau P} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right) &= \\ = a \left(-\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) - \frac{2\pi}{P} e^{-\frac{t}{\tau}} \sin\left(\frac{2\pi t}{P}\right)\right) & \\ + b e^{-\frac{t}{\tau}} \cos\left(\frac{2\pi t}{P}\right) & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau^2} - \frac{4\pi^2}{p^2} = -\frac{a}{\tau} + b \\ \frac{\cancel{4\pi}}{\cancel{\tau}^2} = -\frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{p}^2} a \end{cases}$$

$$b = -\frac{1}{\tau^2} - \frac{4\pi}{p^2}$$

$$a = -\frac{2}{\tau}$$

$$b = -\frac{1}{\tau^2} - \frac{4\pi}{p^2}$$

$$a = -\frac{2}{\tau}$$

$\tau = 20 \pm 10\%$	$p = 1 \pm 10 \text{ ppm}$
----------------------	----------------------------

$\nearrow$
0.001 %

$$a = -0.10 \pm 10\%$$

$$b = -\frac{1}{400 \pm 20\%} - \frac{4\pi}{1 \pm 20 \text{ ppm}}$$

$$= -\left(\underbrace{0.0025 \pm 20\%}_{\pm 0.0005} + \underbrace{12.56637061 \pm 20 \text{ ppm}}_{\pm 0.00025} \right)$$

$$= -12.5689 \pm 0.0008$$

3. Trova il valore di α che rende minimo $\int_0^1 (f(x) - \alpha)^2 dx$.

$$\int_0^1 (f(x))^2 - 2\alpha f(x) + \alpha^2 dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 (f(x))^2 dx}_{\boxed{1}} - \underbrace{\int_0^1 2\alpha f(x) dx}_{\Delta} + \underbrace{\int_0^1 \alpha^2 dx}_{\alpha^2}$$

$$= \boxed{1} - 2\alpha \underbrace{\int_0^1 f(x) dx}_{\Delta} + \alpha^2$$

$$= \boxed{1} - 2\alpha \Delta + \alpha^2$$

$$\frac{d}{d\alpha} (\quad) = -2\Delta + 2\alpha$$

$$\alpha_{\min} = \Delta = \int_0^1 f(x) dx$$

ESERCIZIO D

A $p < 0.05$ B $p < 0.01$

Supponi di avere due farmaci A e B contro la medesima malattia. L'efficacia del farmaco A è corroborata da uno studio clinico con livello di significatività $p < 0.05$, l'efficacia di B è corroborata da uno studio con significatività $p < 0.01$. Per ciascuna delle seguenti affermazioni indica se sia giustificata oppure no, spiegando la ragione della tua scelta:

- F 1. Il farmaco A è efficace almeno nel 95% dei casi di malattia, mentre il farmaco B almeno nel 99%.
- ✓ 2. C'è maggiore evidenza statistica a favore dell'efficacia del farmaco B rispetto al farmaco A.
- ✓ 3. Anche se supponiamo che entrambi i farmaci siano effettivamente efficaci, non è detto che il farmaco B produca un effetto più forte del farmaco A.
- ✓ 4. Anche se supponiamo che entrambi i farmaci siano effettivamente efficaci, non è detto che il farmaco B curi un maggior numero di casi del farmaco A.
- F 5. Se il farmaco A non fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 95% di probabilità di rigettare l'ipotesi nulla.
- ✓ 6. Se il farmaco A non fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 95% di probabilità di non riprodurre il risultato positivo di quest'ultimo.
- F 7. Se il farmaco A fosse efficace, una replica dello studio relativo avrebbe il 5% di probabilità di non rigettare l'ipotesi nulla.

- F 8. La probabilità che il farmaco A non sia efficace è minore del 5%.
- F 9. Se un secondo test, indipendente, del farmaco A, producesse un risultato positivo con $p < 0.05$, comunque, in totale, l'evidenza statistica a favore del farmaco A sarebbe minore di quella a favore del farmaco B.