

Prima prova in itinere

data proposta Ven 7.11 (mattina)

Crescite / decadimenti esponenziali p. 116

$$X(t) = X_0 \cdot b^{\frac{t-t_0}{\tau}}$$

t, t_0, τ tempi
 b n. puro
 X, X_0 omogeneo

Di X_0, t_0 una è libera

b, τ una è libera

Eg. In una coltura ci sono inizialmente 10^9 batteri, e raddoppiano ogni 8 h dopo quanto tempo arrivano a 10^{11} ?

$t=0$	$t=8h$	$t=16h$	$t=24h$
10^9	$2 \cdot 10^9$	$4 \cdot 10^9$	$8 \cdot 10^9$

$$X(t) = 10^9 \cdot 2^{\frac{t}{8h}}$$

$$X(t) = 10^9 \cdot 2^{\frac{t}{8h}}$$

$$X_0 = 10^9 \quad t_0 = 0$$

$$b = 2 \quad \tau = 8h$$

$$10^9 \cdot 2^{\frac{t}{8h}} = 10^{11} \rightarrow 2^{\frac{t}{8h}} = 10^2$$

$$\frac{t}{8h} = \log_2(10^2) = \frac{\log_{10}(10^2)}{\log_{10}(2)} = \frac{2}{\log_{10}(2)} \approx 0.3$$

$$\frac{t}{8h} = \frac{2}{0.3} \rightarrow t = \frac{16}{0.3} h = 53 h$$

$$X(t) = 10^9 \cdot 2^{\frac{t}{8h}}$$

$$X(t) = X_0 \cdot 10^{\frac{t}{\tau}}$$

$$X(0) = 10^9$$

$$X(8h) = 2 \cdot 10^9$$

$$\begin{cases} X_0 \cdot 10^{\frac{0}{\tau}} = 10^9 \\ X_0 \cdot 10^{\frac{8h}{\tau}} = 2 \cdot 10^9 \end{cases}$$

$$X_0 = 10^9$$

~~$$10^9 \cdot 10^{\frac{8h}{\tau}} = 2 \cdot 10^9$$~~

$$\frac{8h}{\tau} = \log_{10} 2$$

$$\tau = \frac{8}{\log_{10} 2} h$$

$$\begin{aligned}
 X(t) &= 10^3 \cdot 10^{\frac{t}{\frac{8}{\log_{10} 2}} \text{ h}} = 10^3 \cdot 10^{\frac{t \cdot \log_{10} 2}{8 \text{ h}}} = \\
 &= 10^3 \cdot 10^{(\log_{10} 2) \cdot \frac{t}{8 \text{ h}}} \\
 &= 10^3 \cdot \underbrace{\left(10^{\log_{10} 2}\right)}_2^{\frac{t}{8 \text{ h}}} = 10^3 \cdot 2^{\frac{t}{8 \text{ h}}}
 \end{aligned}$$

I batteri di una colonia raddoppiano ogni 8 h. Dopo quanto tempo triplicano?

$$X(t) = X_0 \cdot 2^{\frac{t}{8 \text{ h}}}$$

$$\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{t}{8 \text{ h}}} = 3 \cancel{X_0}$$

$$\underline{X(t) = 3 \cdot X_0}$$

$$2^{\frac{t}{8 \text{ h}}} = 3$$

$$\frac{t}{8 \text{ h}} = \log_2 3$$

$$t = 8 \cdot \frac{\log_{10} 3}{\log_{10} 2} \text{ h}$$

$$= 12.68 \text{ h}$$

$$= 12 \text{ h } 41 \text{ min.}$$

Vedono es. p. 119
Es con soluzioni p. 121+

ESERCIZIO A I prova in itinere 2024

La crescita di una popolazione di microorganismi segue la curva logistica

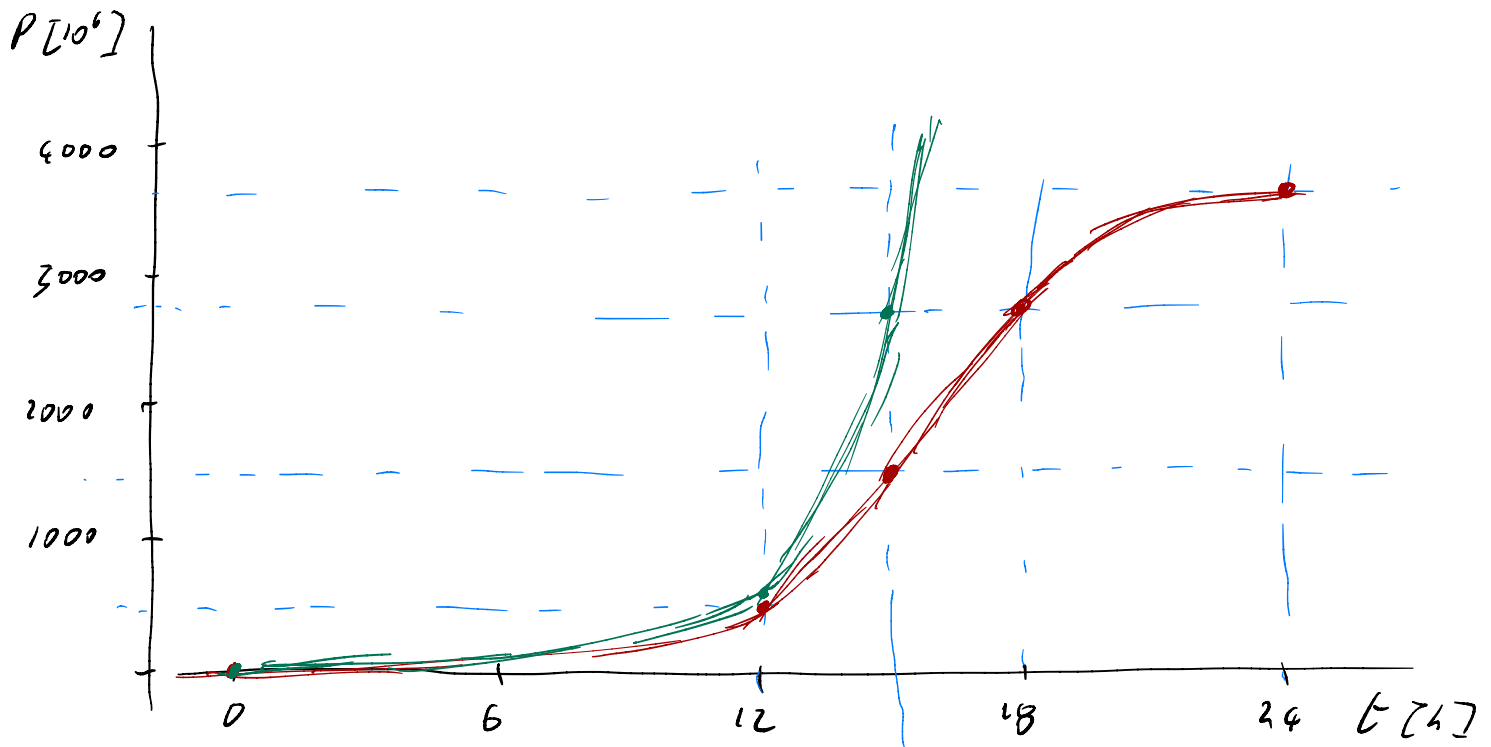
$$P(t) = \frac{P_0 K e^{t/\tau}}{K - P_0 + P_0 e^{t/\tau}} \quad c = 2.718...$$

con $P_0 = 1.50 \cdot 10^6$, $K = 3.70 \cdot 10^9$ e $\tau = 2.00$ h.

1. Rappresenta l'andamento della popolazione, per tempi compresi fra 0 e 24 ore, in un diagramma cartesiano.
- ~~2. Rappresenta la medesima funzione mettendo la popolazione in scala logaritmica.~~
3. Nelle prime ore, la crescita è approssimativamente esponenziale: rappresenta questa funzione per mezzo di un'espressione analitica, e aggiungi il grafico dell'esponenziale ai due diagrammi precedenti.

$$P(t) = \frac{P_0 K e^{t/\tau}}{K - P_0 + P_0 e^{t/\tau}} = \frac{\overset{K}{\frac{K}{\frac{K}{P_0} - 1}}}{\frac{K}{P_0} - 1 + 1} = \frac{\overset{K}{1 + \underbrace{\left(\frac{K}{P_0} - 1\right)}_{2466}} e^{-\frac{t}{\tau}}}{1 + \underbrace{\left(\frac{K}{P_0} - 1\right)}_{2466}} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$t [h]$	0	12 h	15 h	18 h	24 h
$P [10^6]$	1,5	520	1570	2840	3640



$$X(0) = 1.5 \cdot 10^6$$

$$X(36) = 6.71 \cdot 10^6$$

$$X(t) = 1.5 \cdot 10^6 \cdot e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$X(t) = 1.5 \cdot 10^6 \cdot e^{\frac{t}{24}}$$

$$1.5 \cdot 10^6 \cdot e^{\frac{36}{\tau}} = 6.71 \cdot 10^6$$

$$e^{\frac{36}{\tau}} = 4.4754$$

$$\tau = \frac{36}{\log_e 4.4754} = 2.0019 \text{ h}$$