

Trovare rapporti di numeri interi

Vogliamo risolvere il seguente problema:

dato un numero arrotondato x trovare la frazione $\frac{a}{b}$,
ridotta ai minimi termini, tale che $\frac{a}{b} = x$.

Livello 1: denominatori piccoli

Memorizza le seguenti frazioni

$$\frac{1}{5} = 0.2$$

$$\frac{1}{2} = 0.5$$

$$\frac{1}{3} = 0.333\dots$$

$$\frac{1}{4} = 0.25$$

$$\frac{2}{5} = 0.4$$

$$\frac{2}{3} = 0.666\dots$$

$$\frac{3}{4} = 0.75$$

$$\frac{3}{5} = 0.6$$

$$\frac{4}{5} = 0.8$$

Se la frazione cercata $\frac{a}{b}$ ha
denominatore $b \leq 5$ riconoscerai
questo caso osservando la *parte frazionaria* di x .

Esempio $x = 1.666$

$$x = 1.666 = 1 + 0.666 = 1 + \frac{2}{3} = \boxed{\frac{5}{3}}$$

p. intera $\nearrow$ *p. frazionaria* $= \frac{2}{3}$

Esempio $x = 2.498$

In questo caso è facile che ci sia un errore di

arrotondamento sulla cifra meno significativa.

Conviene quindi assumere che, in realtà, il valore di x sia $2.500 \approx 2.498$. Abbiamo allora

$$x = 2.500 = 2 + 0.5 = 2 + \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5}{2}}$$

L'alternativa sarebbe scrivere $x = \frac{2498}{1000} = \frac{1249}{500}$ che è aritmeticamente corretto, però non semplifica la scrittura di x .

Livello 2: reciproci

Se $0 < x < 1$ allora il numeratore a è più piccolo del denominatore b , per cui, anziché cercare la frazione $x = \frac{a}{b}$, conviene cercare $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$.

Esempio $x = 0.4286$

Mnemonicamente, non riconosco questa parte frazionaria, provo allora a calcolare $\frac{1}{x}$

$$\frac{1}{x} = 2.3332 = 2 + 0.3332 = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

errore di arrotondamento

Siccome $\frac{1}{x} = \frac{7}{3}$, deduco che $\boxed{x = \frac{3}{7}}$

Importante: per verifica calcolo $\frac{3}{7} = 0.428571428...$ e constato che è compatibile col dato $x = 0.4286$. ☺

Quasi sicuramente, le semplici tecniche precedenti bastano a gestire i casi che incontrerai negli esercizi di stechiometria. Con poco sforzo, però, possiamo imparare un metodo generale.

Livello 3: la combinazione vincente

Combiniamo le due tecniche precedenti. La parte frazionaria di x ha il medesimo denominatore di x stesso. D'altro canto, una parte frazionaria deve essere compresa fra 0 e 1.

Quindi è **garantito** che la frazione corrispondente al numero

$$\frac{\text{parte frazionaria di } x}{1} = \frac{1}{x - \text{parte intera di } x}$$

è più semplice della frazione di x .

Esempio $x = 2.3077$

Calcolo

$$\frac{1}{x - 2} = \frac{1}{0.3077} = 3.2499 \overset{\text{errore di arrotondamento}}{\approx} 3.25 = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

Da cui ottengo l'equazione

$$\frac{1}{x - 2} = \frac{13}{4} \Rightarrow x = 2 + \frac{4}{13} = \boxed{\frac{30}{13}}$$

Livello Ninja: metodo delle frazioni continue

Siccome il trucco del livello 3 ci *garantisce* di semplificare il problema, se non riusciamo a concludere al primo tentativo, *semplicemente lo ripetiamo*. Prima o poi è sicuro che otterremo una frazione che riconosciamo.

Esempio $x = 2.6957$

Scrivo $x_0 = 2.6957$ e calcolo

$$\boxed{x_1 = \frac{1}{x_0 - 2}} = \frac{1}{0.6957} = 1.4374 \quad \text{ricavando } x_0 \text{ da questa ho} \quad x_0 = 2 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{0.4374} = 2.2862 \quad x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{1}{0.2862} = 3.4941 \quad x_2 = 2 + \frac{1}{x_3}$$

Nota che, probabilmente, $x_3 = 3.5 = \frac{7}{2}$ al netto dello errore di arrotondamento già presente nel dato del problema ($x = 2.6957$ non esattamente, bensì arrotondato alla quarta cifra decimale). Assumendo $x_3 = \frac{7}{2}$ calcolo, usando le formule nella colonna a destra

$$\begin{aligned}
 x = x_0 &= 2 + \frac{1}{x_1} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{x_2}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{x_3}}} = \\
 &= 2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{7}}} = 2 + \frac{1}{1 + \frac{7}{16}} = 2 + \frac{16}{23} = \boxed{\frac{62}{23}}
 \end{aligned}$$

Per verifica $\frac{62}{23} = 2.69565217\dots$ è compatibile con il dato $x = 2.6957$.

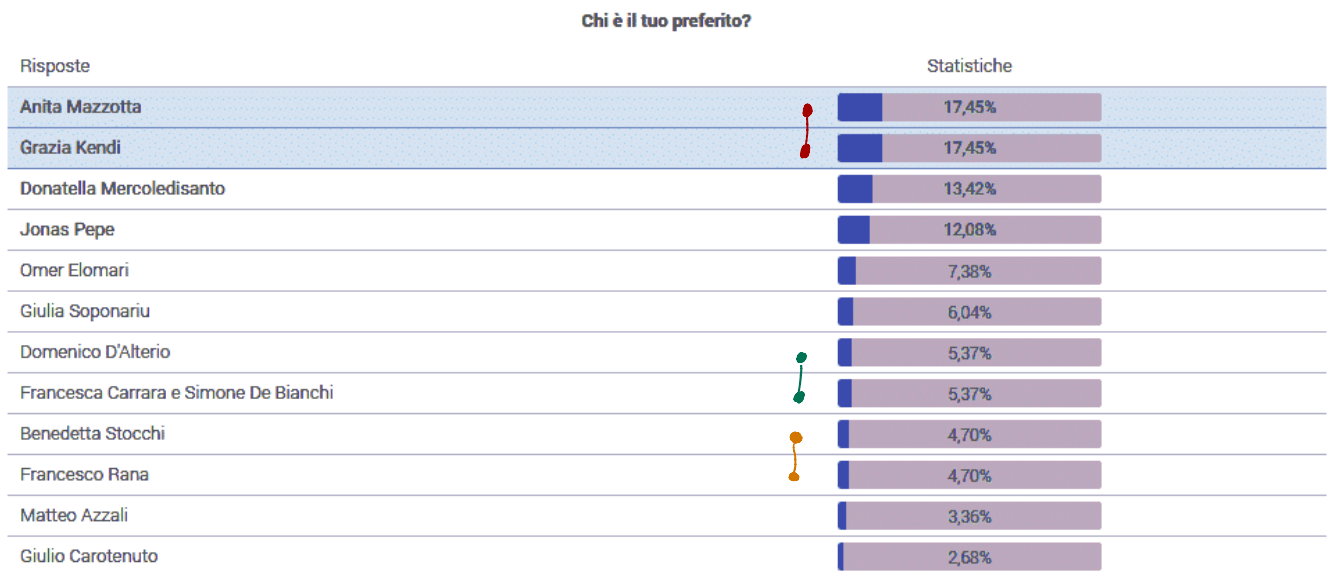
Perché, benché $x = 2.6957$ fosse dato con cinque cifre significative di precisione, abbiamo assunto che $x_3 = 3.4941$ fosse $\frac{7}{2} = 3.5$ tollerando un errore già alla terza cifra? La risposta è che questo procedimento, ad ogni passaggio, estrae un po' di informazione da x e la trasferisce nelle parti intere $2, 1, 2$ che serviranno, alla fine, per ricostruire la frazione. Ad ogni passaggio, viene estratta grossolanamente una cifra di informazione. Ci aspettiamo quindi una corrispondente perdita di precisione nelle x di, più o meno, una cifra per passaggio.

Nota importante circa la cifra significativa. La quantità di informazione contenuta in una frazione

è misurata dal totale di cifre fra numeratore e denominatore. Se intendiamo scoprire una frazione i cui termini sono numeri, diciamo, di due cifre, dobbiamo partire avendo non meno di quattro cifre di precisione nel dato. E, in realtà, ne serviranno almeno cinque per avere un risultato ragionevolmente affidabile.

Esercizio

Per un buon esercizio di matematica, non c'è niente come cercare "sondaggi grande fratello" sul web. Questo viene dall'autorità di www.tuttogulgossip.it



Se leggeste risultati del genere in uno studio serio, avreste forti ragioni di sospetto. Ci

sono, infatti, numerose percentuali identiche, e questo suggerisce che il numero degli individui coinvolti nello studio sia limitato.

Domanda: su quanti voti è basato questo studio?

Suggerimento: inizia dal 17.45%. Cerca $\frac{a}{b} = 0.1745$. verifica che il denominatore, b , vada bene anche per le altre percentuali. Se no correggilo, prova arrotondamenti diversi, etc. Avrai finito quando potrai esprimere tutte le percentuali come frazioni aventi il medesimo denominatore, e questo sarà la numerosità del campione cercato.