Logaritmi

$$\log_b y = x \iff b^x = y$$

$$b^{\log_b y} = y \qquad \log_b b^x = x$$

P. ESP

$$b^0 = 1$$

$$b^1 = b$$

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

$$b^x / b^y = b^{x-y}$$

$$(b^x)^y = b^{xy}$$

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

P. LOG

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b (s \cdot t) = \log_b s + \log_b t$$

$$\log_b \left(\frac{s}{t}\right) = \log_b s - \log_b t$$

$$\log_b (s^t) = t \cdot \log_b s$$

$$\log_b \left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log_b x$$

Es

$$\log_2\left(\frac{4^{6.1}}{8}\right) = \log_2(4^{6.1}) - \log_2(8) =$$

$$= 6.1 \cdot \underbrace{\log_2(4)}_{2} - \underbrace{\log_2(8)}_{3} = 9.2$$

$2^2 = 4$ $\quad$ $2^3 = 8$

Es $\quad \log_{10}(x) = 7 \qquad \log_{10}\left(\frac{\sqrt{x}}{10}\right) = ?$

$$\log_{10}\left(\underbrace{\sqrt{x}}_{x^{\frac{1}{2}}}\right) - \log_{10} 10 = \frac{1}{2}\underbrace{\log_{10}(x)}_{7} - \underbrace{\log_{10}(10)}_{1}$$

$$= 2.5$$

Formula di cambiamento di base

$$\log_b x = \frac{\log_{\square} x}{\log_{\square} b} = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} b} \quad \overset{1.33}{\approx}$$

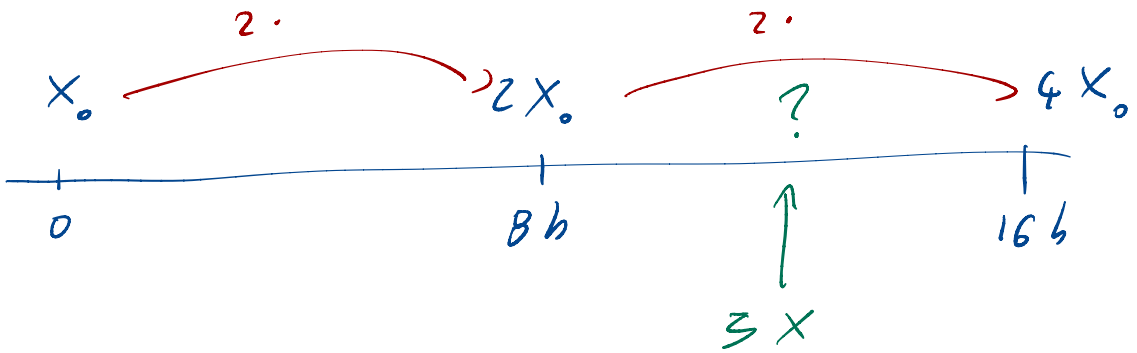
Es $\quad \log_{10} x = 4 \qquad \log_{1000} x = \frac{\log_{10} x}{\log_{10} 1000} = \frac{4}{3}$

Crescita e decadimenti esponenziali

$$X(t) = X(t_0) \cdot \text{base}^{\frac{t - t_0}{\tau}}$$

(τ ← tempo)

Es I batteri in una coltura raddoppiano ogni otto ore. In quanto tempo triplicano?



$\frac{t}{8h}$ ← n. di periodi di 8h fino a t

$$X(t) = X_0 \cdot 2$$

t	0	8h	16h	24h
$x(t)$	x_0	$2x_0$	$2^2 x_0$	$2^3 x_0$

$X(t) = 3x_0$ trova t.

$$X_0 \cdot 2^{\frac{t}{8\,h}} = 3\,X_0$$

$$\frac{t}{8\,h} = \log_2 3$$

$$t = 8 \cdot (\log_2 3)\ h \approx 12.7\ h$$

$$X(t) = X_0 \cdot 2^{\frac{t}{8\,h}} = X_0 \cdot 3^{\frac{t}{12.7\,h}}$$

Esercizio 75 (soluzione a p. ??)
Il carbonio-14 (^{14}C) è un isotopo radioattivo del C che ha un tempo di dimezzamento di 5700 anni. La concentrazione di ^{14}C in una mummia è il 40.0% di quella in un vivente. A quanto tempo fa risale la mummia?

$$X(t) = X_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700\ \text{anni}}}$$

$$X(t) = 0.40\ X_0$$

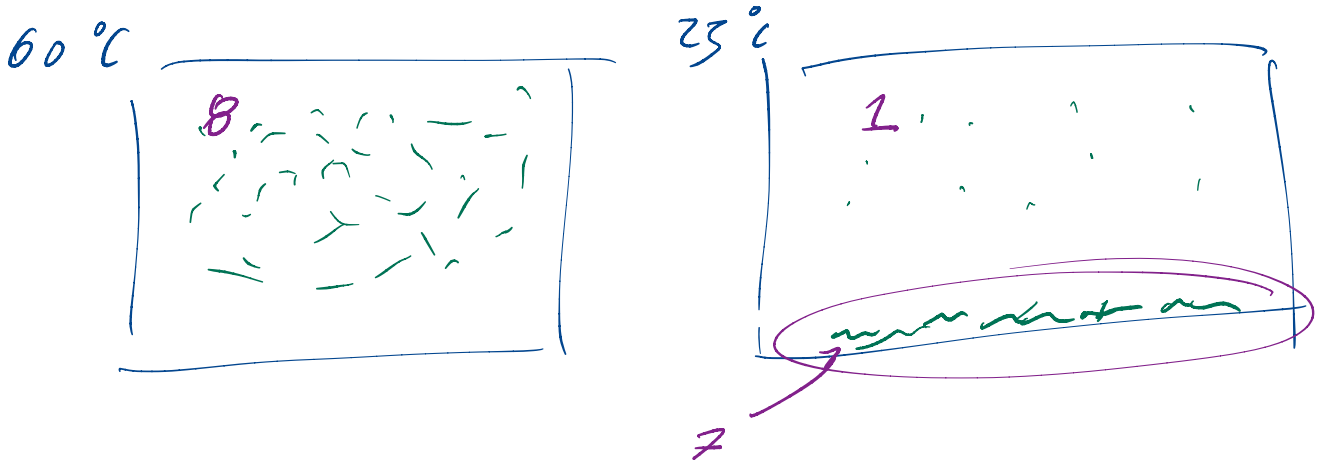
$$0.40\ X_0 = X_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700\ \text{anni}}}$$

$$\frac{t}{5700\ \text{anni}} = \log_{\frac{1}{2}} 0.40 = \frac{\log_{10} 0.40}{\log_{10} \frac{1}{2}} \approx 1.32$$

$$\log_{10} \frac{1}{2} \approx -0.3$$

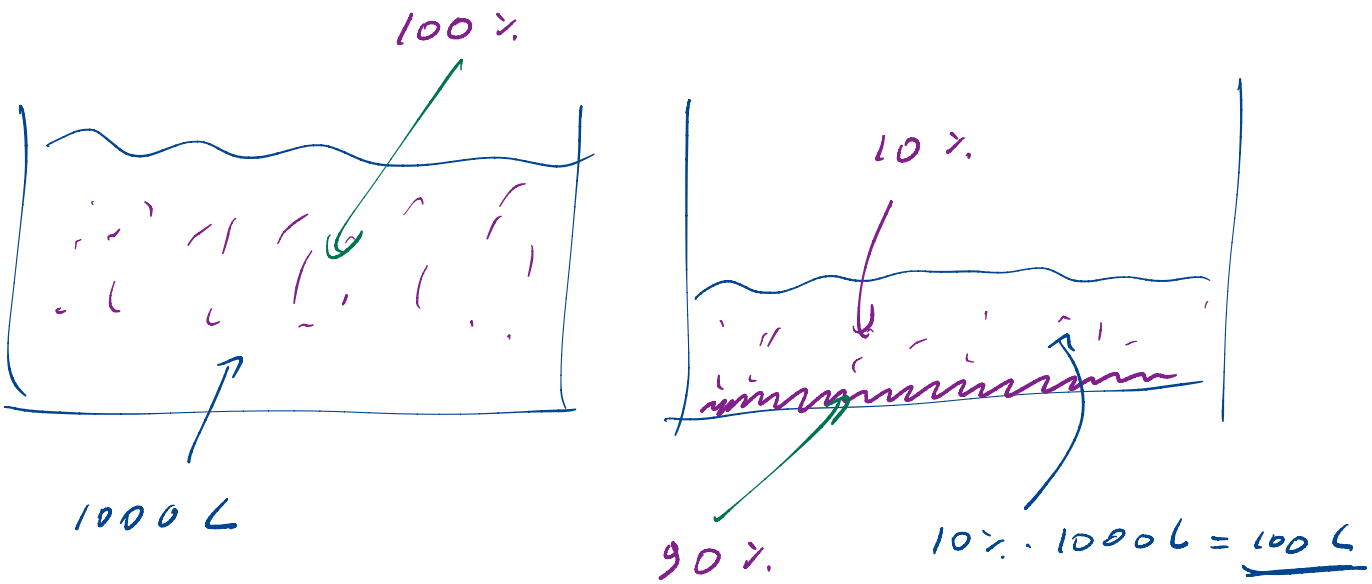
$$t = 1.32 \cdot 5700\ \text{anni} = 7500\ \text{anni}$$

Esercizio 32 (soluzione a p. ??)
Una soluzione satura di un principio attivo viene fatta cristallizzare raffreddandola, a volume costante, da 60 °C a 25 °C. Se la solubilità diminuisce di otto volte, qual è la resa di cristallizzazione?



$$\frac{7}{8} = \frac{7}{8} \cdot 100\,\% = 87.5\,\%$$

Esercizio 33 (soluzione a p. ??)
Una soluzione satura di un principio attivo, con solubilità 20 g/L, viene fatta cristallizzare facendo evaporare il solvente a temperatura costante. Se il volume iniziale del solvente è di 1000 L e la resa di cristallizzazione è del 90%, quanto solvente è evaporato?



1000 L − 100 L = 900 L

$$\text{soluto}_{\text{prima}} : \text{solv.}_{\text{prima}} = \text{soluto}_{\text{dopo}} : \text{solv.}_{\text{dopo}}$$

100 % 1000 L 10 % ?

Esercizio 78 (soluzione a p. ??)
In una soluzione acquosa un principio attivo si decompone, e la sua concentrazione decresce esponenzialmente nel tempo. A un certo istante la concentrazione è $(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}$ mol/L. Esattamente sei ore dopo è scesa a $(9.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$ mol/L. Qual è il tempo di dimezzamento del principio attivo? Che incertezza relativa hai su questo risultato?

$$X(t) = X_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}}$$

$$X(0) = X_0 = 7.9 \cdot 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$X(6\text{h}) = 9.6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

$$9.6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{mol}}{\text{L}} = 7.9 \cdot 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{6\text{h}}{\tau}}$$

$$\frac{6\text{h}}{\tau} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{9.6 \cdot 10^{-3}}{7.9 \cdot 10^{-2}} =$$

$$\sim 3.04$$

$$t = \frac{6\text{h}}{3.04\ldots} \approx 1.9732$$

$$t = \frac{6\text{h}}{\log_{\frac{1}{2}} \frac{(9.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}}{(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}}} = \frac{6\text{h}}{\log_{\frac{1}{2}} (0.1215\ldots \pm 2.31\,\%)}$$

1.04 %
1.27 %
± 2.31 %
0.0028

6h

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(0.1215\ldots \pm \underbrace{2.31\%}_{0.0028}\right)$$

$$[0.1187\ldots,\ 0.1243\ldots]$$

$$\log_{\frac{1}{2}}\ [3.0078,\ 3.0744\ldots]$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(\ldots) = 3.04\ldots \pm \underbrace{0.033\ldots}_{\boxed{\pm 1.1\%}}$$