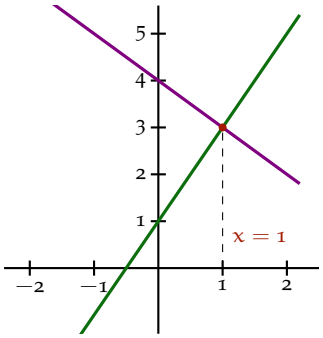
§15 Soluzione grafica & numerica di equazioni

Risolvere l'equazione $f(x) = g(x)$ significa trovare le ascisse dei punti di intersezione dei grafici di f e g.

Esempio ($2x + 1 = 4 - x$)

$$\underbrace{2x+1}_{f(x)} = \underbrace{4-x}_{g(x)}$$



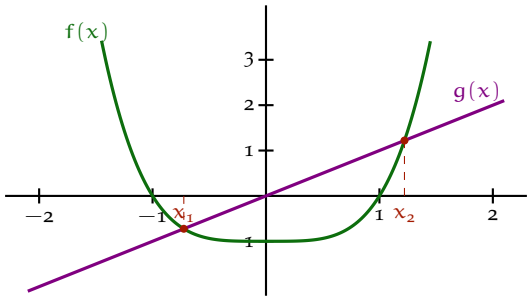
Algebricamente:

$$\begin{aligned} 2x+1 &= 4-x \\ 2x+x &= 4-1 \\ 3x &= 3 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Esempio (quante soluzioni ha $x^4 - 1 = x$?)
Chiamiamo f e g i due membri dell'equazione,

$$\underbrace{x^4-1}_{f(x)} = \underbrace{x}_{g(x)}$$

e disegniamo i due grafici: si vede che ci sono due intersezioni, quindi l'equazione ha due soluzioni.

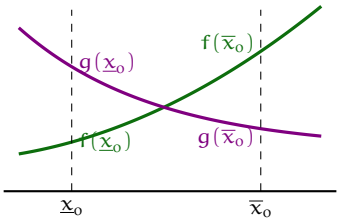


§15.1 Calcolo numerico delle soluzioni

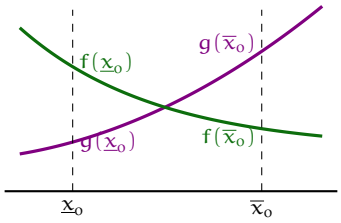
Molte equazioni non possono essere risolte in maniera algebrica — vale a dire per mezzo di formule esatte, come invece capita, per esempio, per le equazioni di primo e secondo grado. In questi casi è possibile stabilire in maniera approssimativa dove si trovino le soluzioni avvalendosi di un grafico, oppure di qualche ragionamento *ad hoc*. Poi le soluzioni possono essere calcolate in maniera numerica, cioè approssimata.

Il metodo più semplice e più sicuro per risolvere numericamente un'equazione è per bisezione. Si parte da due valori $\underline{x}_0$ e $\overline{x}_0$, con $\underline{x}_0 < \overline{x}_0$, tali che i grafici di f e g abbiano,

fra questi due valori, precisamente una intersezione. Ci troviamo quindi in uno dei due casi seguenti.



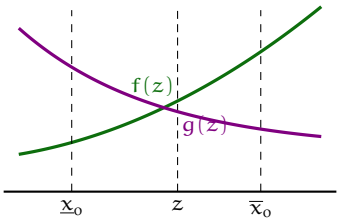
Primo caso



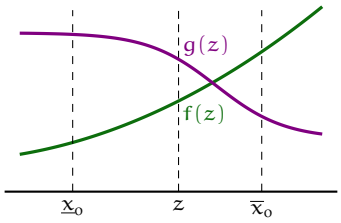
Secondo caso

$$\underbrace{f(\underline{x}_0) < g(\underline{x}_0) \;\text{ e }\; f(\overline{x}_0) > g(\overline{x}_0)}_{\text{primo caso}} \qquad \underbrace{f(\underline{x}_0) > g(\underline{x}_0) \;\text{ e }\; f(\overline{x}_0) < g(\overline{x}_0)}_{\text{secondo caso}}$$

Poniamo di trovarci nel primo caso, altrimenti si procede simmetricamente. Scegliamo un numero z fra $\underline{x}_0$ e $\overline{x}_0$: può capitare che $f(z) > g(z)$ oppure che $f(z) < g(z)$.



Prima situazione



Seconda situazione

$$\underbrace{f(z) > g(z)}_{\text{prima situazione}} \qquad \underbrace{f(z) < g(z)}_{\text{seconda situazione}}$$

Ora, la soluzione x è compresa fra $\underline{x}_0$ e $\overline{x}_0$, ma noi desideriamo intrappolarla in un intervallo più piccolo. Nella prima situazione x è compresa fra $\underline{x}_0$ e z, quindi scriviamo

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 \qquad \overline{x}_1 = z$$

Nella seconda situazione x è fra z e $\overline{x}_0$, quindi scriviamo

$$\underline{x}_1 = z \qquad \overline{x}_1 = \overline{x}_0$$

In ambo i casi abbiamo due nuovi valori $\underline{x}_1$ e $\overline{x}_1$ che racchiudono la soluzione incognita x (poiché le diseguaglianze $f(\underline{x}_1) < g(\underline{x}_1)$ e $f(\overline{x}_1) > g(\overline{x}_1)$ sono invertite l'una rispetto all'altra). Ripetiamo fino ad ottenere $\underline{x}_n$ e $\overline{x}_n$ così vicini che determinano x entro l'approssimazione desiderata.

Nota
Nella scelta di z è importante che si prenda un valore compreso fra $\underline{x}$ e $\overline{x}$, ed è conveniente sceglierlo grosso modo a metà fra $\underline{x}$ e $\overline{x}$. Non c'è nessun obbligo, però, di prendere esattamente il valor medio $\frac{\underline{x}+\overline{x}}{2}$: spesso conviene scegliere un numero con poche cifre, che sia comodo da calcolare.

Esercizio
Calcola la soluzione positiva di $x^4 - 1 = x$, con tre cifre significative di precisione.

Soluzione. Avvalendoci del grafico dell'esempio precedente possiamo iniziare da $\underline{x}_0 = 1$ e $\overline{x}_0 = 1.4$. Vale

$$f(\underline{x}_0) = 0 \quad g(\underline{x}_0) = 1 \qquad f(\overline{x}_0) \approx 2.8 \quad g(\overline{x}_0) = 1.4$$

quindi $f(\underline{x}_0) < g(\underline{x}_0)$ e $f(\overline{x}_0) > g(\overline{x}_0)$: siamo nel primo caso. Scegliamo $z = 1.2$: si ha $f(z) \approx 1.07 < 1.2 = g(z)$, siamo nella seconda situazione e quindi $\underline{x}_1 = 1.2$, $\overline{x}_1 = 1.4$. Proseguendo così:

			passo					
$f(x)$	$g(x)$	x	0	1	2	3	4	5
$0 < 1$		1	$\underline{x}_0$					
$1.07 < 1.2$		1.2	z	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$		
$1.215 < 1.22$		1.22				z	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$
$1.29 > 1.23$		1.23					z	$\overline{x}_5$
$1.44 > 1.25$		1.25			z	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	
$1.86 > 1.3$		1.3		z	$\overline{x}_2$			
$2.8 > 1.4$		1.4	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$				

La soluzione x è dunque compresa fra $\underline{x}_5 = 1.22$ e $\overline{x}_5 = 1.23$. Per capire se dobbiamo arrotondare a 1.22 o a 1.23 calcoliamo un ultimo passo ponendo $z = 1.225$:

$$f(z) \approx 1.25 > 1.225 = g(z) \qquad f(\underline{x}_5) = 1.215 < 1.22 = g(\underline{x}_5)$$

Le due diseguaglianze sono invertite, quindi la soluzione è fra 1.22 e 1.225: si approssima

$$x = 1.22$$

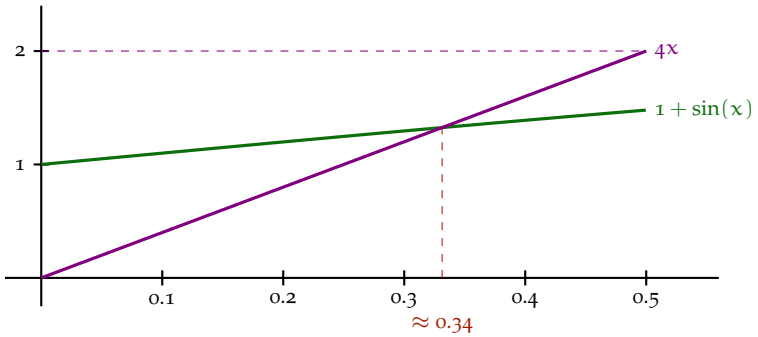
□

Esercizio
Risolvi l'equazione $1 + \sin(x) = 4x$, con tre cifre significative di precisione.

Soluzione. Cominciamo col restringere il campo. Siccome $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, e possiamo riscrivere l'equazione nella forma $\sin(x) = 4x - 1$, abbiamo

$$-1 \leqslant 4x - 1 \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$$

Le soluzioni sono quindi obbligate a stare in questo intervallo, e sono questi i valori di x che dobbiamo studiare.



Il grafico ci dice che c'è una sola soluzione, che questa vale forse circa 0.34 e comunque è certamente compresa fra 0.3 e 0.4. Procediamo quindi come nell'esercizio precedente a partire da $\underline{x}_0 = 0.3$ e $\overline{x}_0 = 0.4$. (Attenzione: qui $f(\underline{x}_0) > g(\underline{x}_0)$, siamo cioè nel *secondo* caso.)

			passo						
$f(x)$	$g(x)$	x	0	1	2	3	4	5	6
$1.30 > 1.2$		0.3	$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$					
$1.324 > 1.320$		0.33		z	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$		
$1.325 > 1.324$		0.331					z	$\underline{x}_5$	$\underline{x}_6$
$1.325 < 1.326$		0.3315						z	$\overline{x}_6$
$1.326 < 1.328$		0.332				z	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$	
$1.329 < 1.340$		0.335			z	$\overline{x}_3$			
$1.34 < 1.40$		0.35	z	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$				
$1.39 < 1.6$		0.4	$\overline{x}_0$						

Siamo giunti alla conclusione che la soluzione è compresa fra 0.331 e 0.3315. Espressa con tre cifre significative correttamente arrotondate è quindi

$$x = 0.331$$

Se, per esempio, fosse risultata compresa fra 0.3315 e 0.332, allora avremmo dovuto arrotondare a $x = 0.332$. □

§15.2 Esercizi

Esercizio 84 (soluzione a p. 298)
Determina, con tre cifre significative, la soluzione dell'equazione

$$e^{-x} = x$$

Esercizio 85 (soluzione a p. 298)
La funzione $f(x)$ assume i valori seguenti.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1.00	2.68	4.76	7.16	9.83

Determina, usando il metodo dell'interpolazione lineare, un'approssimazione del valore di $f(3.7)$ ed una della soluzione dell'equazione $f(x) = 15 - x^2$. Esprimi i risultati arrotondati al centesimo.

Esercizio 86 (soluzione a p. 299)
Trova tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin(x) = 1 - 0.2\,x$$

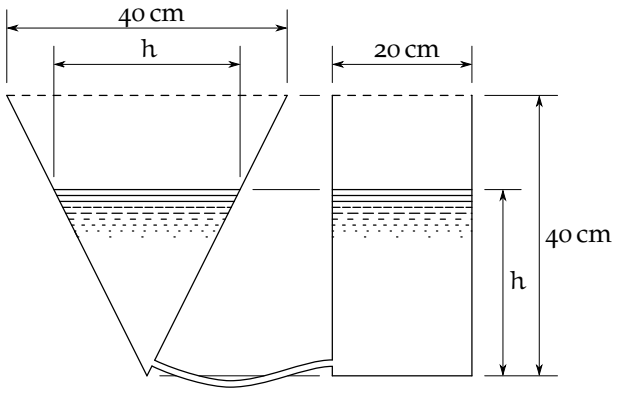
arrotondate alla seconda cifra decimale.

Esercizio 87 (soluzione a p. 301)
Trova la soluzione positiva dell'equazione

$$2x = 3\sin\big(\arctan(x)\big)$$

con almeno tre cifre significative: in modo esatto se puoi, altrimenti in maniera approssimata.

Esercizio 88 (soluzione a p. 302)
L'apparato rappresentato in figura è costituito da due contenitori, uno conico ed uno cilindrico, disposti con il loro asse in posizione verticale. In essi si introduce un certo volume V di acqua. Un tubicino di volume trascurabile connette i due contenitori, così che, per la legge dei vasi comunicanti, il livello h raggiunto dal liquido nei due contenitori coincide.



1. Determina l'espressione analitica della funzione che associa al livello h il corrispondente volume $V(h)$; traccia quindi un grafico cartesiano di questa funzione.
2. Calcola, con la precisione di tre cifre significative, a che livello bisogna

riempire l'apparecchio affinché esso contenga 15.0 litri d'acqua.

3. Supponendo che il volume della domanda precedente sia noto con un errore di $\pm 2\%$, che errore assoluto abbiamo sulla risposta?

Esercizio 84 (p. 98)
Determina, con tre cifre significative, la soluzione dell'equazione

$$e^{-x} = x$$

Soluzione. Poniamo $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = x$. La prima è decrescente e vale 1 in $x = 0$; la seconda è crescente e parte da 0: si incontrano una volta sola. Con due tentativi restringiamo il campo:

$$f(0.5) \approx 0.607 > 0.5 \qquad f(0.6) \approx 0.549 < 0.6$$

quindi la soluzione è fra 0.5 e 0.6, e partiamo da $\underline{x}_0 = 0.5$, $\overline{x}_0 = 0.6$. (Siamo nel *secondo* caso: f sta sopra a sinistra e sotto a destra, quindi $f(z) > g(z)$ vuol dire che la soluzione sta a destra di z.)

			passo					
$f(x)$	$g(x)$	x	0	1	2	3	4	5
$0.6065 > 0.5$		0.5	$\underline{x}_0$					
$0.5769 > 0.55$		0.55	z	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$			
$0.5712 > 0.56$		0.56			z	$\underline{x}_3$		
$0.5672 > 0.567$		0.567				z	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$
$0.5669 < 0.5675$		0.5675					z	$\overline{x}_5$
$0.5655 < 0.57$		0.57		z	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	
$0.5488 < 0.6$		0.6	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$				

Al passo 5 la soluzione è intrappolata fra 0.567 e 0.5675: con tre cifre significative

$$x = 0.567$$

(il valore esatto è 0.56714…, la cosiddetta costante omega).

Esercizio 85 (p. 99)
La funzione $f(x)$ assume i valori seguenti.

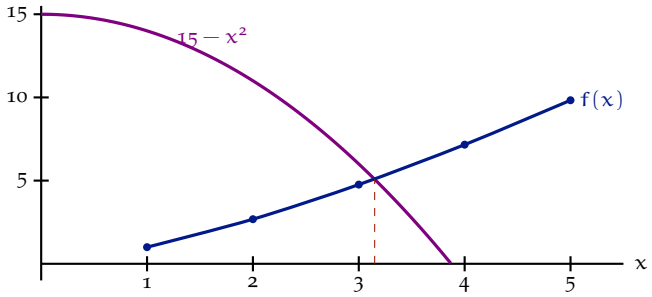
x	1	2	3	4	5
$f(x)$	1.00	2.68	4.76	7.16	9.83

Determina, usando il metodo dell'interpolazione lineare, un'approssimazione del valore di $f(3.7)$ ed una della soluzione dell'equazione $f(x) = 15 - x^2$. Esprimi i risultati arrotondati al centesimo.

Soluzione. **Il valore di** $f(3.7)$**.** Il numero 3.7 è compreso fra le ascisse tabulate $x_0 = 3$ e $x_1 = 4$, quindi

$$f(3.7) \approx (3.7 - 3) \cdot \frac{7.16 - 4.76}{4 - 3} + 4.76 = 0.7 \cdot 2.40 + 4.76 = 6.44$$

La soluzione di $f(x) = 15 - x^2$**.** Un grafico approssimativo, con i punti della tabella e la parabola $15 - x^2$, mostra dove cercare.



La soluzione x è compresa fra 3 e 4: in $x = 3$ la parabola sta sopra ($6 > 4.76$), in $x = 4$ sotto ($-1 < 7.16$). Fra 3 e 4 approssimiamo $f(x)$ con l'interpolazione lineare, come sopra:

$$f(x) \approx (x-3) \cdot 2.40 + 4.76 = 2.40\,x - 2.44$$

e l'equazione diventa di secondo grado:

$$2.40\,x - 2.44 = 15 - x^2 \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + 2.40\,x - 17.44 = 0$$

$$x = \frac{-2.40 \pm \sqrt{2.40^2 + 4 \cdot 17.44}}{2} = \frac{-2.40 \pm \sqrt{75.52}}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x \approx 3.15 \quad \text{oppure} \quad x \approx -5.55$$

Soltanto la prima ha senso, perché l'approssimazione di $f(x)$ che stiamo usando vale solo per x compreso fra 3 e 4. La soluzione cercata è

$$x = 3.15$$

Esercizio 86 (p. 99)
Trova tutte le soluzioni dell'equazione

$$\sin(x) = 1 - 0.2\,x$$

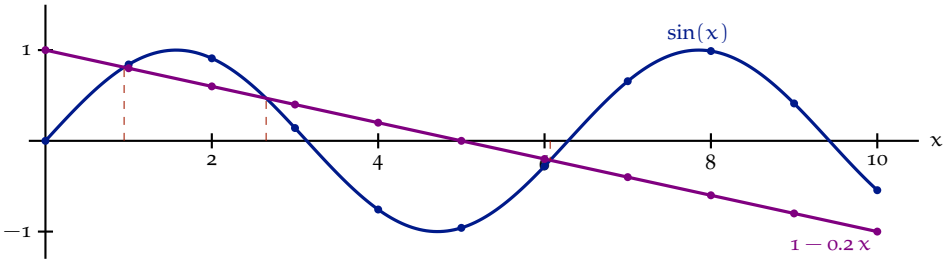
arrotondate alla seconda cifra decimale.

Soluzione. Il seno sta fra -1 e 1, quindi le soluzioni devono avere

$$-1 \leqslant 1 - 0.2\,x \leqslant 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \leqslant x \leqslant 10$$

Tracciamo i due grafici in questo intervallo (il seno in radianti). Per disegnarli calcolo alcuni valori.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\sin(x)$	0.00	0.84	0.91	0.14	−0.76	−0.96	−0.28	0.66	0.99	0.41	−0.54
$1 - 0.2\,x$	1.0	0.8	0.6	0.4	0.2	0.0	−0.2	−0.4	−0.6	−0.8	−1.0



I grafici si incontrano tre volte: vicino a 1, fra 2.5 e 3, e fra 6 e 6.5. Calcoliamo ciascuna soluzione per bisezione. Vicino a 1 partiamo da $\underline{x}_0 = 0.5$ e $\overline{x}_0 = 1$ (primo caso: a sinistra il seno sta sotto la retta):

			passo					
$\sin(x)$	$1 - 0.2\,x$	x	0	1	2	3	4	5
$0.479 < 0.900$		0.5	$\underline{x}_0$					
$0.783 < 0.820$		0.9	z	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$			
$0.796 < 0.816$		0.92			z	$\underline{x}_3$		
$0.808 < 0.812$		0.94				z	$\underline{x}_4$	
$0.810 < 0.811$		0.945					z	$\underline{x}_5$
$0.813 > 0.810$		0.95		z	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
$0.841 > 0.800$		1	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$				

La prima soluzione è fra 0.945 e 0.95: arrotondata ai centesimi, $x_1 = 0.95$. Allo stesso modo, fra 2.5 e 3 (secondo caso)

			passo					
$\sin(x)$	$1 - 0.2\,x$	x	0	1	2	3	4	5
$0.598 > 0.500$		2.5	$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$				
$0.516 > 0.480$		2.6		z	$\underline{x}_2$			
$0.472 > 0.470$		2.65			z	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	$\underline{x}_5$
$0.468 < 0.469$		2.655					z	$\overline{x}_5$
$0.463 < 0.468$		2.66				z	$\overline{x}_4$	
$0.427 < 0.460$		2.7	z	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$		
$0.141 < 0.400$		3	$\overline{x}_0$					

quindi $x_2 = 2.65$, e fra 6 e 6.5 (di nuovo primo caso)

			passo					
$\sin(x)$	$1 - 0.2\,x$	x	0	1	2	3	4	5
$-0.279 < -0.200$		6	$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$				
$-0.231 < -0.210$		6.05		z	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$		
$-0.221 < -0.212$		6.06				z	$\underline{x}_4$	
$-0.216 < -0.213$		6.065					z	$\underline{x}_5$
$-0.212 > -0.214$		6.07			z	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
$-0.182 > -0.220$		6.1	z	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$			
$0.215 > -0.300$		6.5	$\overline{x}_0$					

quindi $x_3 = 6.07$.

L'ultimo passo, con z a metà fra due centesimi consecutivi, serve a decidere l'arrotondamento: per esempio la prima soluzione è fra 0.945 e 0.95, e quindi si arrotonda a 0.95 e non a 0.94.

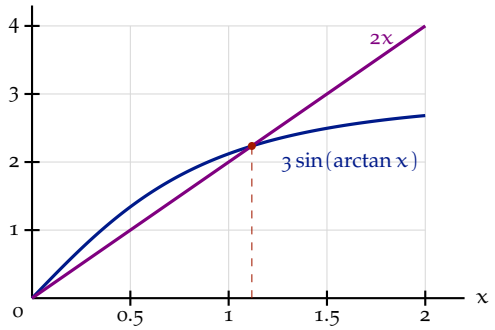
Esercizio 87 (p. 99)
Trova la soluzione positiva dell'equazione

$$2x = 3\sin\big(\arctan(x)\big)$$

con almeno tre cifre significative: in modo esatto se puoi, altrimenti in maniera approssimata.

Soluzione. Localizziamo la soluzione con un grafico. Il seno non supera 1, quindi il membro di destra non supera 3, mentre $2x > 3$ per $x > 1.5$: basta disegnare i due membri fra 0 e 2. Per tracciare la curva calcolo alcuni valori.

x	0	0.5	1	1.5	2
$3\sin(\arctan x)$	0	1.342	2.121	2.496	2.683



Oltre che in $x = 0$, i grafici si incontrano una sola volta, fra 1 e 1.5. Procediamo per bisezione da $\underline{x}_0 = 1$ e $\overline{x}_0 = 1.5$ (primo caso: a sinistra la retta sta sotto la curva).

$2x$	$3\sin(\arctan x)$	x	passo 0	1	2	3	4	5
2.000	< 2.121	1	$\underline{x}_0$	$\underline{x}_1$				
2.200	< 2.220	1.1		z	$\underline{x}_2$	$\underline{x}_3$	$\underline{x}_4$	
2.230	< 2.233	1.115					z	$\underline{x}_5$
2.240	> 2.238	1.12				z	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
2.300	> 2.264	1.15			z	$\overline{x}_3$		
2.400	> 2.305	1.2		z	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_2$		
3.000	> 2.496	1.5	$\overline{x}_0$					

La soluzione è compresa fra 1.115 e 1.12: con tre cifre significative

$$x = 1.12$$

Si poteva fare esattamente. In un triangolo rettangolo con i cateti lunghi 1 e x, l'angolo opposto al cateto x è $\arctan(x)$, e l'ipotenusa è $\sqrt{1+x^2}$. Quindi

$$\sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

e l'equazione diventa

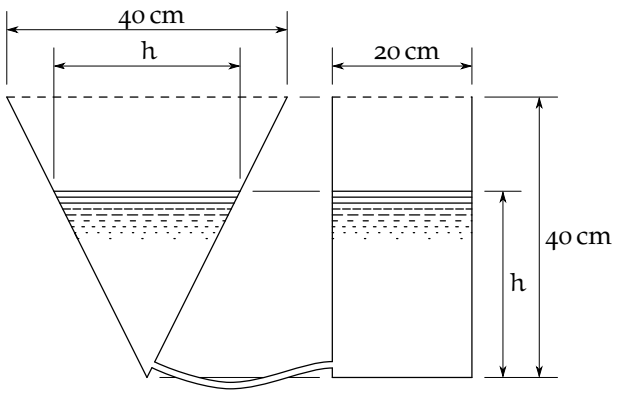
$$2x = \frac{3x}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{1+x^2} = \frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}$$

La soluzione positiva è

$$x = \frac{\sqrt{5}}{2} = 1.1180\ldots$$

che conferma il risultato numerico.

Esercizio 88 (p. 99)
L'apparato rappresentato in figura è costituito da due contenitori, uno conico ed uno cilindrico, disposti con il loro asse in posizione verticale. In essi si introduce un certo volume V di acqua. Un tubicino di volume trascurabile connette i due contenitori, così che, per la legge dei vasi comunicanti, il livello h raggiunto dal liquido nei due contenitori coincide.



1. Determina l'espressione analitica della funzione che associa al livello h il corrispondente volume $V(h)$; traccia quindi un grafico cartesiano di questa funzione.
2. Calcola, con la precisione di tre cifre significative, a che livello bisogna riempire l'apparecchio affinché esso contenga 15.0 litri d'acqua.
3. Supponendo che il volume della domanda precedente sia noto con un errore di $\pm 2\%$, che errore assoluto abbiamo sulla risposta?

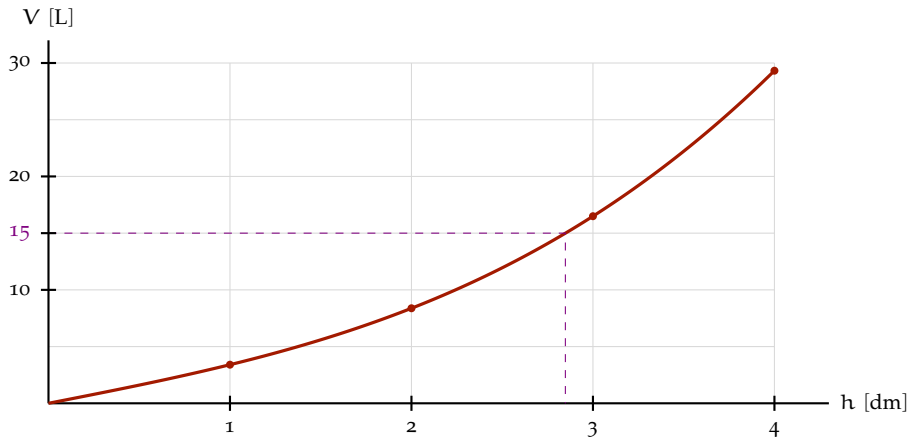
Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Conviene misurare le lunghezze in decimetri, così i volumi vengono in dm^3, cioè in litri. L'acqua forma un cono di altezza h e, come dice la figura, di diametro h, quindi di raggio $\frac{h}{2}$; e un cilindro di altezza h e raggio 1 dm. Quindi

$$V(h) = \underbrace{\frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h}_{\text{cono}} + \underbrace{\pi \cdot (1\,\mathrm{dm})^2 \cdot h}_{\text{cilindro}} = \pi\left(\frac{h^3}{12} + h \cdot 1\,\mathrm{dm}^2\right)$$

I contenitori sono alti 4 dm, quindi tracciamo il grafico per h fra 0 e 4 dm.

h [dm]	0	1	2	3	4
V [L]	0	3.40	8.38	16.49	29.32



□

Soluzione della domanda 2. Il grafico mostra che il volume di 15.0 litri si raggiunge per h fra 2.7 e 2.9 dm. Procediamo per bisezione, confrontando $V(h)$, in litri, con il valore costante 15.0 (primo caso: V cresce).

			passo					
$V(h)$	15.0	h	0	1	2	3	4	5
$13.64 < 15.00$		2.7	$\underline{x}_0$					
$14.54 < 15.00$		2.8	z	$\underline{x}_1$	$\underline{x}_2$			
$14.82 < 15.00$		2.83			z	$\underline{x}_3$		
$14.92 < 15.00$		2.84				z	$\underline{x}_4$	
$14.97 < 15.00$		2.845					z	$\underline{x}_5$
$15.01 > 15.00$		2.85		z	$\overline{x}_2$	$\overline{x}_3$	$\overline{x}_4$	$\overline{x}_5$
$15.50 > 15.00$		2.9	$\overline{x}_0$	$\overline{x}_1$				

La soluzione è fra 2.845 e 2.85 dm, quindi con tre cifre significative

$$h = 2.85\,\text{dm} = 28.5\,\text{cm}$$

□

Soluzione della domanda 3. Il volume è $(15.0 \pm 2\%)\,\text{L} = (15.0 \pm 0.3)\,\text{L}$, cioè l'intervallo di incertezza va da 14.7 a 15.3 L. Siccome $V(h)$ cresce con h, gli estremi dell'intervallo di incertezza di h corrispondono a quelli di V. Procedendo per bisezione come sopra si trova che 14.7 L corrisponde a $h \approx 28.2$ cm, e 15.3 L a $h \approx 28.8$ cm. Quindi

$$\delta h = \frac{28.8\,\text{cm} - 28.2\,\text{cm}}{2} = 0.3\,\text{cm} \qquad h = (28.5 \pm 0.3)\,\text{cm}$$

□

Soluzione della domanda 3. Il campione che cerchiamo sarà grande, quindi l'intervallo di confidenza al 95% sarà $\hat{\mu} \pm 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, e vogliamo che

$$1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.0 \qquad \Longrightarrow \qquad n = (1.96\,\sigma)^2$$

La deviazione standard σ della popolazione non la conosciamo, ma possiamo usare al suo posto la stima migliore che abbiamo, $s = 6.737$, e otteniamo

$$n = (1.96 \cdot 6.737)^2 = 13.20^2 \approx 174$$

quindi servono circa 200 individui. È una stima grossolana, perché s viene da soli dieci individui, per cui possiamo arrotondare a una sola cifra significativa. Inoltre s è solo una stima: al variare del campione oscilla attorno alla σ vera e, grosso modo, metà delle volte sarà sopra e metà sotto. Per questo, con un campione di 200 individui ci aspettiamo solo una probabilità del 50%, più o meno, di ottenere un intervallo di ± 1.0 o meno. Per avere una ragionevole certezza, invece, sceglierei un campione almeno due volte più grande (per esempio 500 individui). □

Esercizio 103 (p. 142)
Il seguente diagramma ramo-foglia rappresenta i valori assunti da una variabile statistica X su un campione di 100 individui, estratto casualmente da una vasta popolazione.

10	5
11	26
12	268
13	0014555889
14	000122233333344567777888
15	000112234447888899
16	000113333555677788889
17	223455578899
18	112489
19	58

Questi valori sono quindi

$$x_1 = 105 \quad x_2 = 112 \quad x_3 = 116 \quad \dots \quad x_{99} = 195 \quad x_{100} = 198$$

e, per convenienza, sono già state calcolate le somme

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{100} = 15\,482 \qquad x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{100}^2 = 2\,428\,902$$

1. Determina media μ(campione), deviazione standard σ(campione), mediana $\tilde{X}$ e differenza interquartile IQR di X sul campione.
2. Rappresenta i dati per mezzo di un istogramma, dividendo l'asse delle ascisse in classi di ampiezza 10, e indicando sull'asse delle ordinate la densità di probabilità.

3. Rappresenta sul medesimo diagramma una distribuzione gaussiana con media μ(campione) e deviazione standard σ(campione).
4. Calcola un intervallo di confidenza al 95% per la media μ di X sulla popolazione.

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Dalle due somme otteniamo media e deviazione standard, usando l'identità $\sigma^2 = \frac{x_1^2+\cdots+x_n^2}{n} - \mu^2$ (qui applicata al campione):

$$\mu(\text{campione}) = \frac{15\,482}{100} = 154.82$$
$$\sigma^2(\text{campione}) = \frac{2\,428\,902}{100} - 154.82^2 = 319.79 \qquad \sigma(\text{campione}) = \sqrt{319.79} = 17.88$$

Per mediana e quartili contiamo le foglie di ciascuna riga, e i totali progressivi:

riga	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
foglie	1	2	3	10	25	19	20	12	6	2
fino a qui	1	3	6	16	41	60	80	92	98	100

La mediana è la media di $x_{(50)}$ e $x_{(51)}$, che stanno nella riga 15 (posti dal 42 al 60) e ne sono la nona e la decima foglia, entrambe 4, quindi $\tilde{X} = 154$.

Per i quartili calcoliamo $k = 1 + 0.25 \cdot 99 = 25.75$ e $k = 1 + 0.75 \cdot 99 = 75.25$. I valori $x_{(25)}$ e $x_{(26)}$ sono la nona e la decima foglia della riga 14, entrambe 3, e $x_{(75)}$ e $x_{(76)}$ la quindicesima e la sedicesima foglia della riga 16, entrambe 7, quindi non abbiamo nulla da interpolare e

$$Q_1 = 143 \qquad Q_3 = 167 \qquad \text{IQR} = 167 - 143 = 24$$

□

Soluzione della domanda 2. Le classi di ampiezza 10 sono le righe del diagramma: 100–110, 110–120, &c. In ciascuna cade un numero di individui pari al numero delle foglie, che su 100 individui è anche la percentuale. La densità di probabilità è questa percentuale divisa per l'ampiezza della classe: per esempio, nella riga 14, $\frac{25\%}{10} = 2.5\,\%/\text{unità}$.

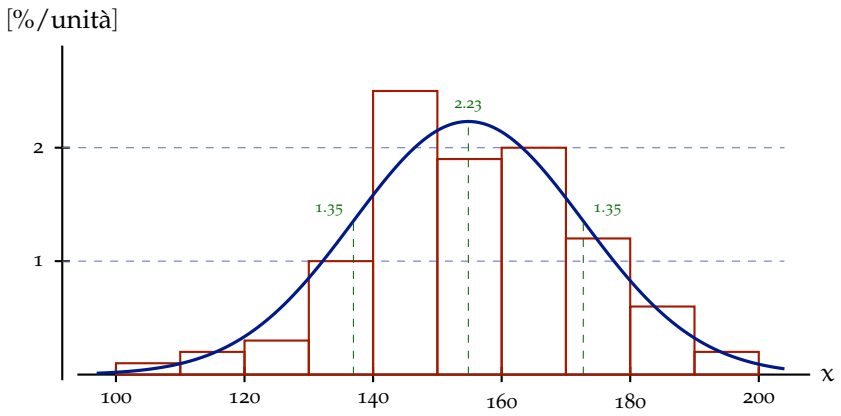
classe da	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190
%/unità	0.1	0.2	0.3	1.0	2.5	1.9	2.0	1.2	0.6	0.2

Disegneremo l'istogramma nella figura della domanda seguente, insieme alla gaussiana.

□

Soluzione della domanda 3. La gaussiana ha il massimo in 154.8 e i flessi a una deviazione standard di distanza, in 154.8 ± 17.9, ossia in 136.9 e 172.7, e le quote corrispondenti sono

$$\frac{39.89\%}{17.88} = 2.23\,\frac{\%}{\text{unità}} \qquad \frac{24.20\%}{17.88} = 1.35\,\frac{\%}{\text{unità}}$$



La gaussiana segue abbastanza bene l'istogramma, e possiamo verificarlo contando gli individui. Entro una deviazione standard dalla media, fra 136.9 e 172.7, ne cadono 69 su 100, ed entro due deviazioni standard, fra 119.1 e 190.6, ne cadono 95, in buon accordo con la regola del 68–95–99.7. □

Soluzione della domanda 4. Con 100 individui il campione è grande, e possiamo usare il metodo per campioni grandi, in cui la stima di σ è $\hat{\sigma} = \sigma(\text{campione})$:

$$\widehat{\text{SEM}} = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{17.88}{\sqrt{100}} = 1.788 \qquad 1.96 \cdot 1.788 \approx 3.50$$

$$\mu = 154.8 \pm 3.5 \qquad \text{cioè fra 151.3 e 158.3, al 95\% di confidenza}$$

Con il metodo più generale non cambierebbe quasi nulla. La deviazione standard campionaria è $s = 17.88 \cdot \sqrt{100/99} = 17.97$, la soglia $t_{0.025,99} \approx 1.98$ prende il posto di 1.96, e otterremmo l'intervallo 154.8 ± 3.6. □

Esercizio 104 (p. 143)
Su un campione di compresse di un lotto si stima il contenuto medio di principio attivo, con l'intervallo di confidenza al 95% da 249 mg a 253 mg. Quali delle affermazioni seguenti sono corrette?

1. Il 95% delle compresse del lotto contiene fra 249 mg e 253 mg di principio attivo.
2. Intervalli costruiti nello stesso modo, a partire da campioni diversi, contengono il contenuto medio vero del lotto nel 95% dei casi.
3. Se si ripetesse il campionamento, il 95% delle nuove medie campionarie cadrebbe fra 249 mg e 253 mg.
4. Con un campione più grande l'intervallo sarebbe, di regola, più stretto.

Soluzione.

1. L'affermazione è falsa, perché l'intervallo che abbiamo calcolato riguarda la *media* del lotto e non le singole compresse, che sono molto più disperse: la loro deviazione standard è $\sqrt{n}$ volte l'errore standard della media.