§12 Logaritmi

Definizione

$$\log_b(x) = y \qquad \Longleftrightarrow \qquad b^y = x$$

Il logaritmo in base b di x è quel numero a cui si deve elevare b per ottenere x.

In altri termini, i logaritmi non sono che esponenziali scritti in maniera buffa. La proprietà che definisce il logaritmo è appunto che queste due formule dicono la stessa cosa

$$\log_b(\square) = \triangle \qquad \longleftrightarrow \qquad b^{\triangle} = \square$$

qualunque espressione ci sia al posto di $\triangle$ e $\square$.

Lo stesso può essere espresso mediante queste identità, che è importante conoscere

$$b^{\log_b(x)} = x \qquad \log_b\left(b^y\right) = y$$

Perché valgono queste identità? Se, al posto di $\square$, scriviamo x, e al posto di $\triangle$ scriviamo $\log_b(x)$, abbiamo

$$\log_b(\square) = \triangle \qquad \longleftrightarrow \qquad b^{\triangle} = \square$$

$$\log_b(x) = \log_b(x) \qquad \longleftrightarrow \qquad b^{\log_b(x)} = x$$

Dal momento che la formula di sinistra è ovviamente vera — dice che una cosa è uguale a se stessa — anche la formula di destra deve essere vera. Questa è la prima identità; la seconda si ottiene analogamente ponendo $\square = b^y$ e $\triangle = y$.

§12.1 Proprietà dei logaritmi

Le proprietà dei logaritmi sono proprietà dell'esponenziale scritte in maniera buffa.

P. degli esponenziali	P. corrispondente dei logaritmi
$b^0 = 1$	$\log_b(1) = 0$
$b^1 = b$	$\log_b(b) = 1$
$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$	$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y)$
$b^x / b^y = b^{x-y}$	$\log_b(x/y) = \log_b(x) - \log_b(y)$
$\left(b^x\right)^y = b^{x \cdot y}$	$\log_b\left(x^y\right) = y \cdot \log_b(x)$
$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$	$\log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \cdot \log_b(x)$

Approfondimento (fuori programma)
Giustifichiamo, per esempio, la formula per $\log_b(x \cdot y)$. Poniamo $\square = x \cdot y$ e $\triangle = \log_b(x) + \log_b(y)$; la formula da dimostrare e la sua gemella sono

$$\log_b(x \cdot y) = \log_b(x) + \log_b(y) \qquad \longleftrightarrow \qquad b^{\log_b(x)+\log_b(y)} = x \cdot y$$

Basta quindi verificare quella di destra. Per la proprietà dell'esponenziale, però,

$$b^{\log_b(x)+\log_b(y)} = \underbrace{b^{\log_b(x)}}_{=x} \cdot \underbrace{b^{\log_b(y)}}_{=y} = x \cdot y \qquad \text{Ok!}$$

§12.2 Formula del cambiamento di base dei logaritmi

Di solito calcolatrici e linguaggi informatici forniscono la funzione logaritmo solo in alcune basi: tipicamente in base e (detto logaritmo naturale; in alcuni sistemi viene rappresentato semplicemente come log, in altri col simbolo ln) e in base 10 (anch'esso denotato, alle volte, semplicemente dal simbolo log).

Nota importante
Quando si incontra una funzione chiamata "log" in un contesto che non si conosce, è cosa saggia accertarsi di quale sia la base di questo logaritmo.

È facile ricondurre i logaritmi in una base x qualunque a quelli in un'altra base b — tipicamente e o 10 — grazie a questa formula.

$$\log_x(y) = \frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}$$

Per esempio, se desideriamo calcolare $\log_7(15)$ e disponiamo solo di una funzione per i logaritmi in base 10, possiamo calcolare

$$\log_7(15) = \frac{\log_{10}(15)}{\log_{10}(7)} = \frac{1.17609}{0.845098} \approx 1.39$$

Approfondimento (fuori programma)
Per verificare la formula dobbiamo vedere che $x^{\frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}} = y$. Infatti

$$x^{\frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}} = \left(b^{\log_b(x)}\right)^{\frac{\log_b(y)}{\log_b(x)}} = b^{\cancel{\log_b(x)} \cdot \frac{\log_b(y)}{\cancel{\log_b(x)}}} = b^{\log_b(y)} = y$$

dove nel primo e nell'ultimo passaggio si è usata l'identità $b^{\log_b(\square)} = \square$.

§12.3 Crescite & decadimenti esponenziali

Molti fenomeni sono descritti da una formula del tipo

$$\text{Variabile}(t) = \text{Variabile}(t_0) \cdot \text{base}^{\pm \frac{t-t_0}{\tau}}$$

questi fenomeni sono detti crescite o decadimenti esponenziali, rispettivamente se l'esponenziale è crescente o decrescente — l'esponenziale è crescente se base > 1 e il segno all'esponente è $+$, o $0 <$ base < 1 e il segno è $-$; altrimenti è decrescente.

I parametri della formula non sono determinati in modo univoco dal fenomeno rappresentato, vale a dire che c'è una certa misura di libertà nella loro scelta. Per esempio

$$100 \cdot 4^{\frac{t-3\,s}{6\,s}} = 100 \cdot 2^{2 \cdot \frac{t-3\,s}{6\,s}} = 100 \cdot 2^{\frac{t}{3\,s}-1} = 50 \cdot 2^{\frac{t}{3\,s}}$$

vediamo quindi che le scelte di parametri

$t_0 = 3\,s$	$t_0 = 0\,s$
$\tau = 6\,s$	$\tau = 3\,s$
$\text{base} = 4$	$\text{base} = 2$
$\text{Variabile}(t_0) = 100$	$\text{Variabile}(t_0) = 50$

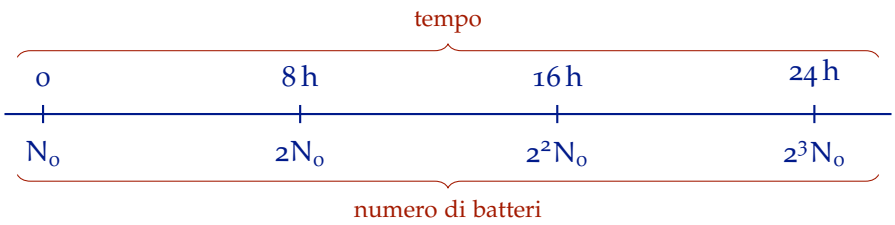
sono equivalenti: descrivono il medesimo fenomeno.

In generale, possiamo fissare t_0 e la base ad arbitrio, e la formula rimane generale. Frequentemente si prende $t_0 = 0$, e la base più comoda a seconda dell'applicazione.

> **Nota**
> Quando studieremo le equazioni differenziali, vedremo che gli esponenziali risolvono una classe naturale di equazioni lineari, e questo ne spiega l'utilità.

Esercizio
I batteri in una coltura raddoppiano ogni otto ore: dopo quanto tempo sono triplicati?

Soluzione. I batteri raddoppiano ogni 8 ore, quindi, in 8 ore, il loro numero si moltiplica per 2, in 16 per 2 due volte, ossia per 2^2, in 24 per 2 tre volte, ossia per 2^3, &c.



In generale, detto N_t il numero di batteri, abbiamo

$$N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{8\,h}} \quad \} \text{ esponente = numero di periodi di 8 ore fra 0 e t}$$

questa formula è vera non solo quando l'esponente del 2 è intero, ma in generale, per ogni t. La crescita di una colonia di batteri — quando non è limitata dalla disponibilità di nutrienti o di spazio — è, anzi, l'esempio tipico di crescita esponenziale.

L'esercizio chiede di trovare a che tempo t_1 sia

$$N_{t_1} = N_0 \cdot 3$$

Siccome, dalla formula generale, $N_{t_1} = N_0 \cdot 2^{\frac{t_1}{8\,h}}$, abbiamo l'equazione

$$\cancel{N_0} \cdot 2^{\frac{t_1}{8\,h}} = \cancel{N_0} \cdot 3 \qquad \Longrightarrow \qquad 2^{\frac{t_1}{8\,h}} = 3 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{t_1}{8\,h} = \log_2(3)$$

$$t_1 = 8 \cdot \log_2(3)\,h$$

Per ottenere un risultato in forma numerica, possiamo adoperare la formula del cambiamento di base

$$t_1 = 8\log_2(3)\,h = 8\,\frac{\log_{10}(3)}{\log_{10}(2)}\,h \approx 12.7\,h$$

□

Esercizio
Il carbonio-14 (^{14}C) è un isotopo radioattivo del C che ha un tempo di dimezzamento di 5700 anni. La concentrazione di ^{14}C in una mummia è il 40.0% di quella in un vivente. A quanto tempo fa risale la mummia?

Soluzione. Questo è, invece, l'esempio tipico di decadimento esponenziale: il decadimento radioattivo. Il tempo di dimezzamento è, per definizione, il tempo che impiega metà del ^{14}C in un campione a decadere — in sostanza trasformandosi in azoto. Quindi dopo 5700 anni la concentrazione di ^{14}C nel campione è la metà di quella iniziale, dopo $2 \cdot 5700$ anni è $\frac{1}{4}$, dopo $3 \cdot 5700$ anni è $\frac{1}{8}$, &c.

In generale

$$^{14}C \text{ al tempo } t = {}^{14}C \text{ iniziale} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700\,\text{anni}}}$$

L'esercizio ci chiede a che tempo t valga

$$^{14}C \text{ al tempo } t = {}^{14}C \text{ iniziale} \cdot \frac{40}{100}$$

Come nell'esercizio precedente otteniamo, quindi,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5700\,\text{anni}}} = \frac{40}{100}$$

$$t = 5700 \cdot \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{40}{100}\right)\,\text{anni} = 5700 \cdot \frac{\log_{10}(0.4)}{\log_{10}(0.5)}\,\text{anni} \approx 7500\,\text{anni}$$

□

Nota
In realtà, la datazione al ^{14}C, anche senza considerare la difficoltà di misurare accuratamente la concentrazione di ^{14}C in un campione archeologico, è una questione più complicata di quanto potrebbe sembrare da questo esercizio. Principalmente, il guaio è che bisogna assumere una concentrazione iniziale pari a quella presente nell'atmosfera quando il campione era in vita, però questa concentrazione non si è mantenuta costante durante i millenni. Occorre, dunque, in qualche modo, ricostruire quanto ^{14}C ci fosse nell'atmosfera millenni fa, per poi calibrare la procedura in modo da tenere conto di questa informazione.

§12.4 Esercizi

Test 72 (soluzione a p. 284)
Sapendo che $\log_e(x) = 10$, quanto vale $\log_e\left(x \cdot \sqrt{x}\right)$?

Test 73 (soluzione a p. 284)
Sapendo che $\log_{10}(x) = 12.4$, quanto vale $\log_{100}(x)$?

Test 74 (soluzione a p. 285)

Calcola $\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right)$.

Esercizio 75 (soluzione a p. 285)
Il numero dei batteri in una coltura cresce del 50% ogni sei ore.

- Di quanto cresce, in percentuale, in dodici ore? E in tre?
- Quanto tempo, in ore e minuti, impiegano i batteri per crescere del 10%? E per raddoppiare?

Esercizio 76 (soluzione a p. 286)
Il numero di batteri nella coltura X raddoppia ogni 18 ore. Quello della coltura Y ogni 24 ore. Inizialmente, il numero di individui nella coltura X è un decimo di quello di Y.

1. Dopo quanto tempo le due colture contengono il medesimo numero di batteri?
2. Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?
3. Si è misurato che al tempo $t = 0$ una terza coltura Z contiene $(1.5 \pm 0.1) \cdot 10^7$ individui. Al tempo $t = 10\,h \pm 20\,min$, la stessa coltura ne contiene $(2.5 \pm 0.2) \cdot 10^7$. Calcola quanto tempo impiega Z per raddoppiare indicando l'errore relativo.

Esercizio 77 (soluzione a p. 288)
In una soluzione acquosa un principio attivo si decompone, e la sua concentrazione decresce esponenzialmente nel tempo. A un certo istante la concentrazione è $(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}$ mol/L. Esattamente sei ore dopo è scesa a $(9.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$ mol/L. Qual è il tempo di dimezzamento del principio attivo? Che errore relativo hai su questo risultato?

Test 70 (p. 76)
Risolvi $1000 \cdot 10^x = 100^{x-7}$.

Soluzione.

$$10^{3+x} = \underbrace{1000}_{10^3} \cdot 10^x = 100^{x-7} = \left(10^2\right)^{x-7} = 10^{2\cdot(x-7)}$$

Confrontando i due estremi della catena,

$$10^{3+x} = 10^{2\cdot(x-7)} \qquad \Longrightarrow \qquad 3 + x = 2 \cdot (x-7) \qquad \Longrightarrow \qquad x = 17$$

Test 71 (p. 77)
Risolvi $10^{2x} + 10^x - 2 = 0$.

Soluzione. Usando l'identità $10^{2x} = \left(10^x\right)^2$, l'equazione diventa

$$\left(10^x\right)^2 + 10^x - 2 = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'indeterminata 10^x. Riscriviamo quindi l'equazione ponendo $y = 10^x$:

$$y^2 + y - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Se $y = 1$, allora $10^x = 1$, quindi $x = 0$. D'altro canto $y = -2$ è impossibile, perché avremmo $10^x = -2$, e l'esponenziale 10^x è necessariamente positivo. In conclusione, c'è la sola soluzione $x = 0$.

Test 72 (p. 82)
Sapendo che $\log_e(x) = 10$, quanto vale $\log_e\left(x \cdot \sqrt{x}\right)$?

Soluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi

$$\log_e\left(x \cdot \sqrt{x}\right) = \log_e(x) + \log_e\left(\sqrt{x}\right) = \underbrace{\log_e(x)}_{10} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\log_e(x)}_{5} = 15$$

Test 73 (p. 82)
Sapendo che $\log_{10}(x) = 12.4$, quanto vale $\log_{100}(x)$?

Soluzione. Applicando la formula di cambiamento di base

$$\log_{100}(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(100)} = \frac{12.4}{2} = 6.2$$

Test 74 (p. 82)

Calcola $\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right)$.

Soluzione. Metodo 1 (proprietà dell'esponenziale). Siccome è richiesto il logaritmo in base 2, iniziamo con lo scrivere l'argomento del logaritmo, $8^{3.7}/4$, come potenza di 2:

$$\frac{8^{3.7}}{4} = \frac{\left(2^3\right)^{3.7}}{2^2} = \frac{2^{3\cdot 3.7}}{2^2} = 2^{3\cdot 3.7-2} = 2^{9.1}$$

ora, usando l'identità $\log_b\left(b^y\right) = y$,

$$\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right) = \log_2\left(2^{9.1}\right) = 9.1$$

Metodo 2 (proprietà dei logaritmi).

$$\log_2\left(\frac{8^{3.7}}{4}\right) = \log_2\left(8^{3.7}\right) - \log_2(4) = 3.7 \cdot \underbrace{\log_2(8)}_{=3} - \underbrace{\log_2(4)}_{=2} = 3.7 \cdot 3 - 2 = 9.1$$

$$\log_2(8) = 3 \text{ siccome } 2^3 = 8; \quad \log_2(4) = 2 \text{ siccome } 2^2 = 4.$$

Osservazione
In pratica, i due approcci a questo esercizio sono due maniere diverse di scrivere precisamente i medesimi calcoli.

Esercizio 75 (p. 82)
Il numero dei batteri in una coltura cresce del 50% ogni sei ore.

- Di quanto cresce, in percentuale, in dodici ore? E in tre?
- Quanto tempo, in ore e minuti, impiegano i batteri per crescere del 10%? E per raddoppiare?

Soluzione. Sappiamo che incrementare una quantità dello x% significa moltiplicarla per $1 + \frac{x}{100}$. Il numero dei batteri si moltiplica quindi per 1.5 ogni sei ore. Di conseguenza il numero di batteri N_t al tempo t vale

$$N_t = N_0 \cdot 1.5^{\frac{t}{6\,h}}$$

Possiamo dunque scrivere il numero dei batteri dopo dodici ore dall'inizio della crescita:

$$N_{12\,h} = N_0 \cdot 1.5^{\frac{12\,h}{6\,h}} = N_0 \cdot 1.5^2 = N_0 \cdot 2.25$$

Detto $x_{12\,h}$% l'incremento percentuale della popolazione in 12 ore abbiamo altresì $N_{12\,h} = N_0 \cdot \left(1 + \frac{x_{12\,h}}{100}\right)$. Di conseguenza

$$\cancel{N_0} \cdot 2.25 = \cancel{N_0} \cdot \left(1 + \frac{x_{12\,h}}{100}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad x_{12\,h} = 125$$

Procedendo alla stessa maniera per $x_{3\,h}$

$$N_{3\,h} = N_0 \cdot 1.5^{\frac{3\,h}{6\,h}} = N_0 \cdot \sqrt{1.5} \qquad N_{3\,h} = N_0 \left(1 + \frac{x_{3\,h}}{100}\right)$$

$$x_{3\,h} = 100 \cdot \left(\sqrt{1.5} - 1\right) \approx 22.5$$

Gli incrementi percentuali cercati sono quindi 125% e $\approx 22.5\%$.

Per la seconda domanda è necessario procedere in senso inverso. Dobbiamo trovare a che tempo $t_{10\%}$ la coltura è cresciuta del 10%, ossia $N_{t_{10\%}} = N_0 \cdot \left(1 + \frac{10}{100}\right)$. Abbiamo quindi l'equazione

$$\cancel{N_0} \cdot 1.5^{\frac{t_{10\%}}{6\,h}} = \cancel{N_0} \cdot \underbrace{\left(1 + \frac{10}{100}\right)}_{1.1} \qquad \Longrightarrow \qquad t_{10\%} = 6\,h \cdot \log_{1.5}(1.1) = 1.4104\,h$$

Similmente, detto $t_{.2}$ il secondo tempo richiesto,

$$\cancel{N_0} \cdot 1.5^{\frac{t_{.2}}{6\,h}} = \cancel{N_0} \cdot 2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_{.2} = 6\,h \cdot \log_{1.5}(2) = 10.2571\,h$$

I tempi richiesti sono quindi $\approx 1\,h\,25\,min$ e $\approx 10\,h\,15\,min$.

Esercizio 76 (p. 82)
Il numero di batteri nella coltura X raddoppia ogni 18 ore. Quello della coltura Y ogni 24 ore. Inizialmente, il numero di individui nella coltura X è un decimo di quello di Y.

1. Dopo quanto tempo le due colture contengono il medesimo numero di batteri?
2. Quanto vale il rapporto fra questo numero e il numero di individui inizialmente in X?
3. Si è misurato che al tempo $t = 0$ una terza coltura Z contiene $(1.5 \pm 0.1) \cdot 10^7$ individui. Al tempo $t = 10\,h \pm 20\,min$, la stessa coltura ne contiene $(2.5 \pm 0.2) \cdot 10^7$. Calcola quanto tempo impiega Z per raddoppiare indicando l'errore relativo.

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Chiamiamo X_0 il numero iniziale di individui in X; quello iniziale in Y è allora $10X_0$. Le due colture raddoppiano ogni 18 e ogni 24 ore, quindi

$$X_t = X_0 \cdot 2^{\frac{t}{18\,h}} \qquad Y_t = 10X_0 \cdot 2^{\frac{t}{24\,h}}$$

Le due quantità coincidono quando

$$\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{t}{18}} = 10\cancel{X_0} \cdot 2^{\frac{t}{24}} \qquad \Longrightarrow \qquad 2^{\frac{t}{18} - \frac{t}{24}} = 10$$

(si sono divisi ambo i membri per $X_0 \cdot 2^{t/24}$). L'esponente si semplifica:

$$\frac{t}{18} - \frac{t}{24} = t \cdot \frac{4-3}{72} = \frac{t}{72}$$

quindi $2^{\frac{t}{72}} = 10$, ossia

$$\frac{t}{72\,\mathrm{h}} = \log_2(10) = 3.3219 \qquad \Longrightarrow \qquad t = 72\log_2(10)\,\mathrm{h} \approx 239\,\mathrm{h}$$

(poco meno di dieci giorni). □

Soluzione della domanda 2. Il rapporto cercato è

$$\frac{X_t}{X_0} = 2^{\frac{t}{18\,\mathrm{h}}} = 2^{\frac{72\log_2(10)}{18}} = 2^{4\log_2(10)} = \left(2^{\log_2(10)}\right)^4 = 10^4$$

— un risultato esatto: la X deve moltiplicarsi per diecimila. □

Soluzione della domanda 3. Per la coltura Z scriviamo $N_t = N_0 \cdot 2^{\frac{t}{\tau}}$, dove τ è il tempo di raddoppio cercato. Allora

$$2^{\frac{t}{\tau}} = \frac{N_t}{N_0} = \frac{2.5 \pm 0.2}{1.5 \pm 0.1} = 1.6667 \pm \underbrace{14.7\%}_{8\%+6.7\%}$$

e quindi

$$\tau = \frac{t}{\underbrace{\log_2(N_t/N_0)}_{D}}$$

Come sempre con i logaritmi, l'incertezza su D si trova calcolando gli estremi dell'intervallo:

$$\underbrace{\log_2\left(\frac{2.5-0.2}{1.5+0.1}\right)}_{0.524} \leqslant D \leqslant \underbrace{\log_2\left(\frac{2.5+0.2}{1.5-0.1}\right)}_{0.948}$$

da cui $D = 0.737 \pm 0.212$, ossia $\pm 28.8\%$ (il valore centrale è $\log_2(1.6667)$, la semiampiezza $(0.948 - 0.524)/2$). L'errore su $t = 10\,\mathrm{h} \pm 20\,\mathrm{min}$ è $\pm 3.3\%$, e nel quoziente gli errori relativi si sommano:

$$\tau = \frac{10\,\mathrm{h}}{0.737 \pm 28.8\%} = 13.57\,\mathrm{h} \pm 32.1\% = 14\,\mathrm{h} \pm 30\%$$

(ossia $\tau = (14 \pm 4)\,\mathrm{h}$: il risultato è poco preciso perché si tratta di un'estrapolazione, in quanto la coltura, nelle dieci ore in cui è stata osservata, non ha fatto in tempo a raddoppiare neppure una volta). □

Esercizio 77 (p. 83)
In una soluzione acquosa un principio attivo si decompone, e la sua concentrazione decresce esponenzialmente nel tempo. A un certo istante la concentrazione è $(7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol/L}$. Esattamente sei ore dopo è scesa a $(9.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol/L}$. Qual è il tempo di dimezzamento del principio attivo? Che errore relativo hai su questo risultato?

Soluzione. La concentrazione al tempo t è $c_t = c_0 \cdot 2^{-\frac{t}{\tau}}$, dove $c_0 = (7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol/L}$ e τ è il tempo di dimezzamento richiesto. Quindi:

$$(9.6 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}\,\mathrm{mol/L} = (7.9 \pm 0.1) \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol/L} \cdot 2^{-\frac{6\,\mathrm{h}}{\tau}}$$

e, moltiplicando ambo i membri per $2^{\frac{6\,\mathrm{h}}{\tau}}$ e dividendo per c_t,

$$2^{\frac{6\,\mathrm{h}}{\tau}} = \frac{7.9 \pm 0.1}{0.96 \pm 0.01} = 8.229 \pm 2.31\% = 8.229 \pm 0.190$$

(l'errore relativo del numeratore è $\pm 1.27\%$, quello del denominatore $\pm 1.04\%$: si sommano). Dunque

$$\tau = \frac{6\,\mathrm{h}}{\underbrace{\log_2(8.229 \pm 0.190)}_{\text{chiamiamo questo D}}}$$

Ora calcoliamo l'intervallo di incertezza del denominatore D.

$$\underbrace{\log_2(8.229 - 0.190)}_{3.007} \leqslant \mathrm{D} \leqslant \underbrace{\log_2(8.229 + 0.190)}_{3.074}$$

Di conseguenza

$$\mathrm{D} = \underbrace{3.041}_{\log_2(8.229)} \pm 0.033 \qquad \text{ossia } \pm 1.1\% \text{ in termini relativi}$$

e quindi, con $6\,\mathrm{h} = 360\,\mathrm{min}$ esatti,

$$\tau = \frac{360\,\mathrm{min}}{3.041 \pm 1.1\%} = 118.4\,\mathrm{min} \pm 1.1\% = (118.4 \pm 1.3)\,\mathrm{min}$$

(l'errore comincia con la cifra 1: lo teniamo a due cifre significative). Poco meno di due ore: in sei ore il principio attivo si è dimezzato circa tre volte, come dice D. Notiamo che il logaritmo ha ridotto a circa la metà l'errore relativo del rapporto, dal 2.3% all'1.1%: più dimezzamenti si osservano, più preciso è il risultato.