Parte III
Elementi di analisi matematica

§22 Introduzione

Questa parte del corso presenta i rudimenti dell'analisi matematica. Questa disciplina si fonda su un cambiamento di prospettiva rispetto alla matematica elementare della prima parte del corso: il nostro oggetto di studio è stato il concetto di quantità, concretizzato dai numeri e dalle grandezze fisiche; ora, invece, studieremo quantità continuamente variabili. Concretamente, una quantità variabile, per esempio nel tempo, sarà rappresentata da una funzione; quindi, mentre nella prima parte del corso abbiamo studiato operazioni fra numeri (operazioni aritmetiche, ma anche, per esempio, esponenziali, logaritmi, funzioni trigonometriche), in quest'ultima parte studieremo operazioni *fra funzioni*.

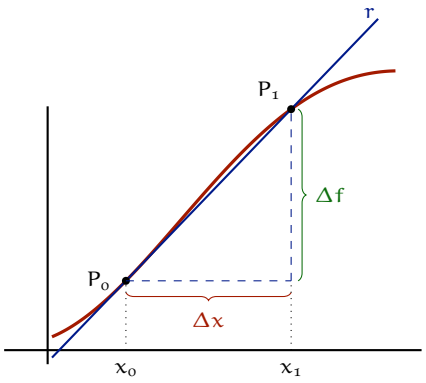
Senza dubbio, date due funzioni della stessa variabile, ha senso sommarle, moltiplicarle, elevarle l'una all'altra, &c. Queste operazioni non aggiungono nulla a quello che già sappiamo. C'è però una novità: data una funzione, diciamo del tempo, $f(t)$, possiamo derivare da questa una nuova funzione $f'(t)$ che rappresenta la velocità di variazione di f. Per esempio, se $f(t)$ rappresenta la concentrazione di un certo reagente in una reazione chimica al tempo t, possiamo considerare la velocità con cui quella concentrazione varia (qui diminuisce, perché il reagente si consuma), e anche questa sarà una quantità variabile col tempo, che chiameremo $f'(t)$: la derivata di f rispetto a t. L'operazione di derivazione non è meramente *numerica*: se so che la mia concentrazione ad un certo tempo t_0 è, poniamo, $12.5\,\mathrm{mmol/L}$, questo non mi dice nulla della sua velocità di variazione, diciamo, fra il tempo t_0 e un altro tempo arbitrario $t_0 + \Delta t$. La derivazione, che passa da una quantità variabile alla sua velocità di variazione, e l'integrazione, che compie il cammino inverso, saranno le due operazioni fondamentali studiate in questa parte di corso.

Come le quantità sono spesso legate fra loro in maniere complicate, per cui, per determinarne la misura, occorre risolvere *equazioni*; così avviene che le quantità variabili siano legate fra loro in maniere complicate: per esempio la velocità con cui un reagente si consuma ne determina il variare della concentrazione, però questa velocità stessa non è costante, e dipende da quant'è il reagente disponibile (più ce n'è, più velocemente, ci aspettiamo, si consuma), ossia proprio dalla sua concentrazione. Per sbrogliare questi grovigli, le semplici equazioni numeriche non bastano: servono equazioni in cui l'incognita non è un numero, bensì un'intera funzione, le equazioni differenziali. Le equazioni differenziali sono fondamentali in tutte le scienze esatte, anzi, le leggi della natura, per come le capiamo al momento, *sono* equazioni differenziali. In questa parte del corso, introdurremo le equazioni più semplici, che incontrerai, per esempio, nello studio della fisica, della termodinamica, della cinetica chimica, della farmacocinetica.

§23 La derivata

Data una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si chiama rapporto incrementale di f fra x_0 e x_1 il numero

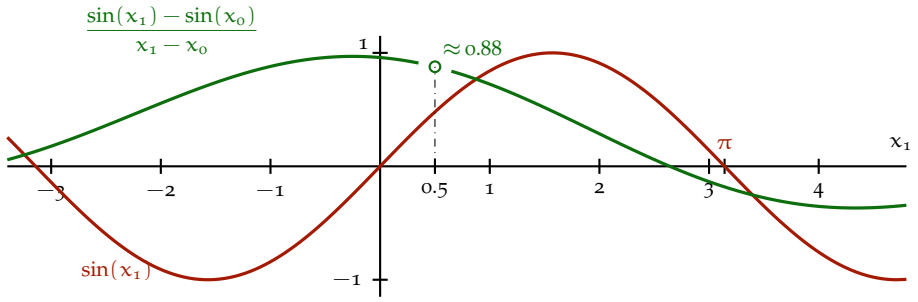
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\overbrace{f(x_1) - f(x_0)}^{\Delta f}}{\underbrace{x_1 - x_0}_{\Delta x}}$$



Questo numero è il coefficiente angolare o pendenza della retta passante per i punti $P_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ e $P_1\big(x_1, f(x_1)\big)$.

Esempio
Tracciamo il grafico del rapporto incrementale della funzione $f(x) = \sin(x)$, per $x_0 = 0.5$ fissato, al variare di x_1:

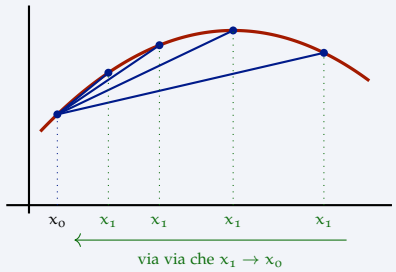
$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sin(x_1) - \sin(0.5)}{x_1 - 0.5}$$



Il rapporto incrementale nell'esempio non è definito in $x_1 = x_0 = 0.5$, perché il denominatore si annulla. Però, osserviamo che, per x_1 che si avvicina a x_0, il rapporto incrementale si avvicina a ≈ 0.88: è come se alla curva del rapporto incrementale mancasse il singolo punto $(0.5, \approx 0.88)$. Questo ci dice che la pendenza della curva $\sin(x)$ misurata vicino all'ascissa $x_0 = 0.5$, a patto di andare *abbastanza* vicino, è ≈ 0.88. Chiameremo questo numero la derivata di $\sin(x)$ in 0.5.

In generale, via via che x_1 si avvicina a x_0, il rapporto incrementale $\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$ rappresenta la pendenza di rette che approssimano il grafico di f sempre meglio nelle più immediate vicinanze di x_0.

Definizione



La derivata di $f(x)$ in x_0, indicata col simbolo $f'(x_0)$, è il valore al quale converge il rapporto incrementale di f fra x_0 e x_1, via via che x_1 si avvicina a x_0. In simboli (fuori programma):

$$f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

La derivata di f (che indichiamo con f') può essere calcolata in ogni x_0, è quindi una nuova funzione che associa a ogni x_0 il valore $f'(x_0)$. Geometricamente, questa funzione rappresenta la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0.

Operativamente, possiamo dedurre l'espressione di f' direttamente dalla espressione di f. Le regole sono qui sotto.

§23.1 Derivate delle funzioni elementari

$$(\text{costante})' = 0 \qquad \left(e^x\right)' = e^x \qquad \left(\log_e(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(x^k\right)' = k\,x^{k-1} \qquad \left(a^x\right)' = a^x \log_e(a) \qquad \left(\log_b(x)\right)' = \frac{1}{x \cdot \log_e(b)}$$

$$\left(\sin(x)\right)' = \cos(x) \qquad \left(\tan(x)\right)' = \frac{1}{\left(\cos(x)\right)^2} \qquad \left(\arctan(x)\right)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\left(\cos(x)\right)' = -\sin(x) \qquad = 1 + \left(\tan(x)\right)^2$$

$$\left(\arcsin(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\arccos(x)\right)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

§23.2 Regole di derivazione

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \left(f(g(x))\right)' = f'\left(g(x)\right)\,g'(x)$$

$$(f-g)' = f' - g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad \left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$$

Nota
Le regole scritte in verde si possono dedurre a partire dalle altre regole: provaci per esercizio.

Nota importante
Queste regole illustrano l'importanza del numero e. Infatti $\left(10^x\right)' = 10^x \log_e(10)$: non è possibile calcolare le derivate di esponenziali e logaritmi in una base qualunque senza fare uso del logaritmo in base e.

Esercizio
Sia $h(x) = \underbrace{\sin(x^2)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g(x)}$. Calcola $h'(x)$.

Soluzione. Applichiamo $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$:

$$h'(x) = \Big(\sin(x^2)\Big)' \cdot \cos(x) + \sin(x^2) \cdot \underbrace{\Big(\cos(x)\Big)'}_{-\sin(x)}$$

Per il primo fattore applichiamo $\big(f(g(x))\big)'$ con $f(y) = \sin(y)$ e $g(x) = x^2$. Siccome $f'(y) = (\sin(y))' = \cos(y)$ otteniamo

$$\Big(\sin(x^2)\Big)' = \cos(x^2) \cdot \underbrace{\left(x^2\right)'}_{2x} = 2x\cos(x^2)$$

Nel primo passaggio si usa $\left(x^k\right)' = k\,x^{k-1}$. In conclusione

$$h'(x) = 2x\cos(x^2)\cos(x) - \sin(x^2)\sin(x)$$

□

Esempio ($f(x) = (x+1)^2$, in due modi)
Primo modo. Scriviamo $f(x) = g\big(h(x)\big)$, con $h(x) = x+1$ e $g(y) = y^2$. Allora $g'(y) = 2y$ e $h'(x) = 1$, quindi

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = 2(x+1) = 2x+2$$

Secondo modo. $f(x) = x^2 + 2x + 1$, quindi

$$f'(x) = \underbrace{\left(x^2\right)'}_{2x} + \underbrace{\left(2x\right)'}_{2} + \underbrace{\left(1\right)'}_{0} = 2x+2$$

Esercizio
Calcola la derivata di $f(x) = \sin\big(\sin(\sin(x))\big)$.

Soluzione. Calcoliamo prima la derivata di $g(x) = \sin\big(\sin(x)\big)$:

$$g'(x) = \sin'\big(\sin(x)\big) \cdot \sin'(x) = \cos\big(\sin(x)\big) \cdot \cos(x)$$

Ora $f(x) = h\big(g(x)\big)$ con $h(x) = \sin(x)$, quindi

$$f'(x) = h'\big(g(x)\big) \cdot g'(x) = \cos\big(\sin(\sin(x))\big) \cdot \cos\big(\sin(x)\big) \cdot \cos(x)$$

□

Esempio ($f(x) = \tan(x)$)
Questa derivata è tabulata nello specchietto delle derivate di funzioni elementari. Calcoliamola, però, a partire dalla definizione $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$:

$$\big(\tan(x)\big)' = \frac{\big(\sin(x)\big)'\cos(x) - \sin(x)\big(\cos(x)\big)'}{\big(\cos(x)\big)^2} = \frac{\big(\cos(x)\big)^2 + \big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2}$$

Da qui si può concludere in due modi. Usando $\sin^2 + \cos^2 = 1$:

$$\big(\tan(x)\big)' = \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2}$$

oppure, spezzando la frazione,

$$\frac{\big(\cos(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} + \frac{\big(\sin(x)\big)^2}{\big(\cos(x)\big)^2} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 = 1 + \big(\tan(x)\big)^2$$

Esercizio
Calcola la derivata di $f(x) = x^{x^2}$.

Soluzione. Siccome non abbiamo una regola per gli elevamenti a potenza di funzioni, adoperiamo i logaritmi per portare la funzione a una forma più maneggevole:

$$f(x) = x^{x^2} = \Big(e^{\log_e(x)}\Big)^{x^2} = e^{x^2 \log_e(x)} = g\big(h(x)\big) \qquad g(y) = e^y, \quad h(x) = x^2 \log_e(x)$$

Ora

$$h'(x) = \big(x^2\big)' \log_e(x) + x^2\big(\log_e(x)\big)' = 2x \log_e(x) + x \qquad g'(y) = e^y$$

e quindi

$$f'(x) = g'\big(h(x)\big) \cdot h'(x) = e^{x^2 \log_e(x)} \cdot \big(2x \log_e(x) + x\big) = \big(2 \log_e(x) + 1\big) \cdot x^{1+x^2}$$

□

Nota importante
$x^{x^2} = x^{(x^2)}$ non è $(x^x)^2$. Per esempio $3^{3^2} = 3^9$, mentre $(3^3)^2 = 3^6$.

Nota
Nei testi si può trovare la formula per la derivata del logaritmo nella forma

$$\big(\log_b(x)\big)' = \frac{\log_b(e)}{x}$$

Questa formula, in realtà, è equivalente alla nostra, perché vale l'identità

$$\log_\square(\triangle) = \frac{1}{\log_\triangle(\square)}$$

Per renderci conto, a sua volta, di questa, applichiamo la formula di cambiamento di base per scrivere $\log_\square(\triangle)$ usando la base $\triangle$:

$$\log_\square(\triangle) = \frac{\overbrace{\log_\triangle(\triangle)}^{=1}}{\log_\triangle(\square)} = \frac{1}{\log_\triangle(\square)}$$

§23.3 Notazioni per le derivate

La derivata della derivata si chiama derivata seconda, e si indica con $f''(x)$. Continuando a calcolare derivate successive si ottiene la derivata terza $f'''(x)$ e, più in generale, la derivata n-esima $f^{(n)}(x)$.

Nelle formule $y = f(x)$, $z = f'(x)$, eccetera, la x si chiama variabile indipendente. Quando è chiaro quale sia la variabile indipendente si può omettere di indicarla: per esempio, anziché scrivere

$$y = f(x) = 3x^2 \qquad z = f'(x) = 6x$$

possiamo abbreviare in

$$y = 3x^2 \qquad z = y' = 6x$$

Nota importante
Non sempre la variabile indipendente è x. Per esempio, nella cinematica x è tendenzialmente una variabile dipendente, mentre la variabile indipendente è il tempo t: potresti quindi incontrare

$$x = \sin(2t) \qquad x' = 2\cos(2t)$$

Un modo di scrivere le derivate comodo, specialmente quando sono in gioco diverse variabili, è

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Questa notazione, che richiama il rapporto incrementale $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ (e non va confusa con esso!), ha il vantaggio di indicare la variabile indipendente al denominatore.

Inoltre, se, come capita nelle applicazioni, $f(x)$ e x sono grandezze fisiche, la notazione $f' = \frac{df}{dx}$ aiuta a ricordare le dimensioni della derivata. Immaginiamo per esempio che x sia una lunghezza misurata in metri, $[x] = m$, e che $f(x)$ sia un potenziale elettrico in volt, $[f(x)] = V$: allora

$$[f'] = \frac{[df]}{[dx]} = \frac{V}{m} = V \cdot m^{-1}$$

ossia un'intensità di campo elettrico. Altri esempi tipici: se $[x] = m$ e $[t] = s$, allora $[x'] = m/s$ e $[x''] = m/s^2$.

Notazione
In questo sistema di notazione la derivata seconda si indica con

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2}$$

Troverai anche la scrittura $\frac{\partial f}{\partial x}$ — con ∂ al posto di d. Questa scrittura si usa quando f dipende da diverse variabili, fra cui x, che sono (o possono essere) a loro volta legate fra loro. La scrittura $\frac{\partial f}{\partial x}$ fa esplicitamente riferimento alla derivata dell'espressione di f rispetto a x considerando ogni altra variabile come se fosse una costante, vale a dire trascurando ogni possibile dipendenza delle altre variabili da x. In termodinamica — per soprammercato — si indica anche, a pedice, la variabile che si tiene costante: $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ si legge "derivata di V rispetto a T a P costante".

§23.4 Esercizi

Test 122 (soluzione a p. 333)
Calcola la derivata di $f(x) = x(x-1)(x+1)$.

Test 123 (soluzione a p. 333)
Calcola la derivata di $f(x) = x^4 - \sin(x) + 10^x$.

Test 124 (soluzione a p. 333)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$.

Test 125 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = e^x \cos(x)$.

Test 126 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = e^{x\cos(x)}$.

Test 127 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = x^x$.

Test 128 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = \tan(x) + \log_e(x)$.

Test 129 (soluzione a p. 335)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(x^2) + \log_{10}(x)$.

Test 130 (soluzione a p. 335)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_x(2)$.

Test 131 (soluzione a p. 336)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_e(x^4)$.

Esercizio 132 (soluzione a p. 336)
Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ tale che $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$ e $f(1) = 0$.

§24 Grafici e derivate

Siccome sappiamo che $f'(x_0)$ è la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0 (in un diagramma in cui ascisse e ordinate abbiano la stessa scala), possiamo farci un'idea qualitativa (ossia priva di accuratezza numerica) del grafico di f' semplicemente osservando il grafico di f. Conviene tenere a mente questi principi.

Fatto

- Dove il grafico di f è orizzontale, $f' = 0$.
- Dove il grafico di f è crescente, $f' > 0$.
- Dove il grafico di f è decrescente, $f' < 0$.
- Maggiore è l'inclinazione del grafico di f rispetto all'orizzontale, maggiore è $|f'|$.

Esercizio
Traccia un grafico qualitativo della derivata della funzione $f(x)$ il cui grafico è dato in figura.

Soluzione della domanda 2. Conviene cercare le righe in cui i due gruppi differiscono di più. Per l'umore abbiamo 35, 33, 32 risposte contro 24, 53, 23, con totali 59, 86 e 55, quindi le frequenze teoriche sono 29.5, 43 e 27.5 per entrambi i gruppi, e

$$\chi^2 = 2 \cdot \left(\frac{(35-29.5)^2}{29.5} + \frac{(33-43)^2}{43} + \frac{(32-27.5)^2}{27.5} \right) \approx 2 \cdot (1.025 + 2.326 + 0.736) \approx 8.17$$

Siccome $8.17 > \chi^2_{0.05,2} = 5.99$, rifiutiamo l'ipotesi nulla al livello di significatività 0.05, e possiamo prendere P = umore. Andrebbe bene anche la forza muscolare, con $\chi^2 \approx 7.40$ — sono gli unici due parametri, su trenta, per cui il test risulta significativo. □

Soluzione della domanda 3. Il parametro P non è stato fissato prima di raccogliere i dati, ma lo abbiamo scelto dopo averli guardati, fra trenta parametri, ossia, in pratica, abbiamo eseguito trenta test. Se il farmaco non avesse alcun effetto, ciascun test darebbe comunque un falso positivo con probabilità 0.05, quindi su trenta test ce ne aspetteremmo in media $30 \cdot 0.05 = 1.5$. Noi ne abbiamo trovati due, più o meno quanti ce ne aspetteremmo per il mero effetto del caso, assumendo che il farmaco non faccia niente.

Per tenere conto della molteplicità dei test in maniera precisa, applichiamo la correzione di Bonferroni, e, per ogni singolo test, usiamo la soglia $p < \frac{0.05}{30} \approx 0.0017$. Per l'umore $\chi^2 = 8.17$ è minore di $\chi^2_{0.01,2} = 9.21$, quindi il risultato non è significativo nemmeno al livello di significatività 0.01, e tanto meno al livello 0.0017 che sarebbe necessario. Lo stesso vale per la forza muscolare. L'esperimento non fornisce quindi evidenza statistica di un effetto del farmaco su alcun parametro. □

Test 122 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = x(x-1)(x+1)$.

Soluzione.

$$f(x) = x(x^2-1) = x^3 - x \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = (x^3)' - (x)' = 3x^2 - 1$$

Test 123 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = x^4 - \sin(x) + 10^x$.

Soluzione.

$$f'(x) = (x^4)' - (\sin(x))' + (10^x)' = 4x^3 - \cos(x) + 10^x \log_e(10)$$

Test 124 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(2x)\cos(3x)$.

Soluzione.

$$f'(x) = (\sin(2x))'\cos(3x) + \sin(2x)(\cos(3x))' = 2\cos(2x)\cos(3x) - 3\sin(2x)\sin(3x)$$

Test 125 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = e^x \cos(x)$.

Soluzione.

$$f'(x) = \big(e^x\big)' \cos(x) + e^x \big(\cos(x)\big)' = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x\big(\cos(x) - \sin(x)\big)$$

Test 126 (p. 179)
Calcola la derivata di $f(x) = e^{x\cos(x)}$.

Soluzione. Questa è una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha : \square \mapsto \square\cos(\square)} x\cos(x) \xrightarrow{\beta : \triangle \mapsto e^{\triangle}} e^{x\cos(x)}$$

ossia $f(x) = \beta\big(\alpha(x)\big)$, e quindi $f'(x) = \beta'\big(\alpha(x)\big) \cdot \alpha'(x)$. Ora

$$\alpha'(x) = \big(x\cos(x)\big)' = (x)'\cos(x) + x\big(\cos(x)\big)' = \cos(x) - x\sin(x) \qquad \beta'(\triangle) = e^{\triangle}$$

da cui

$$f'(x) = e^{x\cos(x)} \cdot \big(\cos(x) - x\sin(x)\big)$$

Test 127 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = x^x$.

Soluzione. Come sopra, $x^x = e^{x\log_e(x)}$ è una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha : \square \mapsto \square\log_e(\square)} x\log_e(x) \xrightarrow{\beta : \triangle \mapsto e^{\triangle}} e^{x\log_e(x)}$$

$$\alpha'(x) = (x)'\log_e(x) + x\big(\log_e(x)\big)' = \log_e(x) + 1 \qquad \beta'(\triangle) = e^{\triangle}$$

$$f'(x) = e^{x\log_e(x)} \cdot \big(1 + \log_e(x)\big) = x^x\big(1 + \log_e(x)\big)$$

Test 128 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = \tan(x) + \log_e(x)$.

Soluzione.

$$f'(x) = \big(\tan(x)\big)' + \big(\log_e(x)\big)' = \frac{1}{\big(\cos(x)\big)^2} + \frac{1}{x}$$

Test 129 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(x^2) + \log_{10}(x)$.

Soluzione. Studiamo separatamente i due addendi. Il primo, $\sin(x^2)$, è una funzione composta

$$x \longmapsto x^2 \longmapsto \sin(x^2) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(\sin(x^2)\big)' = \underbrace{\cos(x^2)}_{\sin'} \cdot \underbrace{2x}_{(x^2)'}$$

La derivata di $\log_{10}(x)$ è data da una formula mnemonica

$$\big(\log_b(x)\big)' = \frac{1}{x \cdot \log_e(b)}$$

però si può anche ricavare dalla formula di cambiamento di base:

$$\big(\log_b(x)\big)' = \underbrace{\left(\frac{\log_e(x)}{\log_e(b)}\right)'}_{(k\cdot f(x))' = k\cdot f'(x)} = \frac{1}{\log_e(b)} \cdot \underbrace{\big(\log_e(x)\big)'}_{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x \cdot \log_e(b)}$$

Mettendo le cose insieme

$$f'(x) = \big(\sin(x^2)\big)' + \big(\log_{10}(x)\big)' = 2x\cos(x^2) + \frac{1}{x \cdot \log_e(10)}$$

Test 130 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_x(2)$.

Soluzione. Purtroppo non abbiamo una formula per derivare rispetto alla base. Per uscirne dobbiamo quindi usare la formula di cambiamento di base:

$$f(x) = \log_x(2) = \frac{\log_e(2)}{\log_e(x)}$$

Abbiamo ora una funzione composta

$$x \xrightarrow{\alpha : \square \mapsto \log_e(\square)} \log_e(x) \xrightarrow{\beta : \triangle \mapsto \frac{\log_e(2)}{\triangle}} \frac{\log_e(2)}{\log_e(x)}$$

$$f'(x) = -\frac{\log_e(2)}{\big(\log_e(x)\big)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-\log_e(2)}{x\big(\log_e(x)\big)^2}$$

Test 131 (p. 180)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_e(x^4)$.

Soluzione. Metodo 1 (proprietà dei logaritmi).

$$f(x) = \log_e(x^4) = 4\log_e(x) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = 4 \cdot \big(\log_e(x)\big)' = \frac{4}{x}$$

Metodo 2 (funzione composta). $x \longmapsto x^4 \longmapsto \log_e(x^4)$, quindi

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\log_e'(x^4)} \cdot \underbrace{4x^3}_{(x^4)'} = \frac{4}{x}$$

Esercizio 132 (p. 180)
Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ tale che $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$ e $f(1) = 0$.

Soluzione. Il generico polinomio di terzo grado è $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, e la sua derivata è $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$. Sostituiamo nell'equazione:

$$\underbrace{x^2 + 3ax^3 + 2bx^2 + cx}_{x^2 + x \cdot f'(x)} = \underbrace{3ax^3 + 3bx^2 + 3cx + 3d}_{3 \cdot f(x)}$$

I termini $3ax^3$ si cancellano, e portando tutto a primo membro resta

$$(1 - b)x^2 - 2cx - 3d = 0$$

Questa equazione deve essere soddisfatta per qualunque valore della x, di conseguenza i suoi coefficienti sono tutti nulli:

$$1 - b = 0 \quad \Longrightarrow \quad b = 1 \qquad c = 0 \qquad d = 0$$

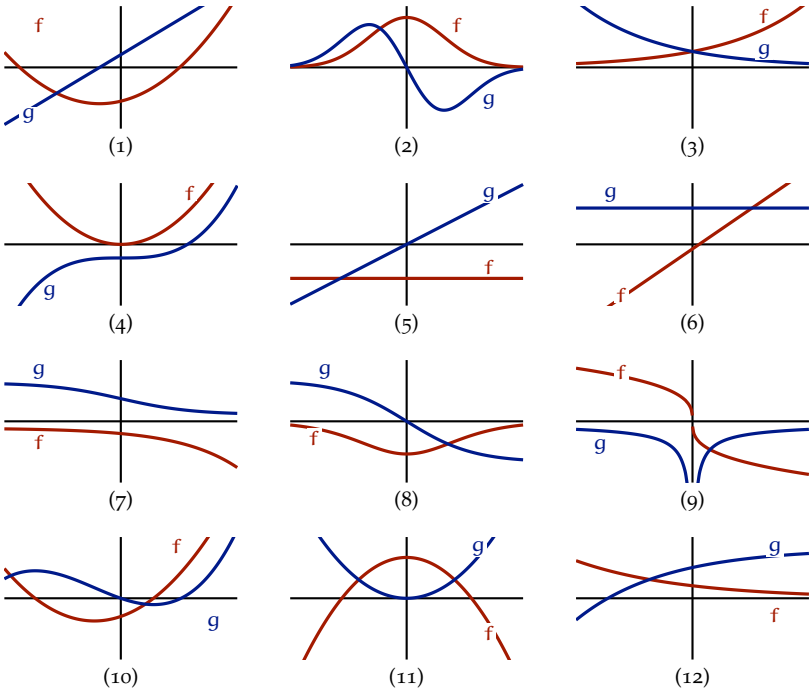
Abbiamo quindi $f(x) = ax^3 + x^2$, però dobbiamo ancora sfruttare il dato $f(1) = 0$:

$$0 = f(1) = a + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a = -1$$

In conclusione $f(x) = -x^3 + x^2$.

Approfondimento (fuori programma)
Perché i coefficienti devono essere tutti nulli? Se così non fosse potremmo risolvere l'equazione $(1 - b)x^2 - 2cx - 3d = 0$, e otterremmo alcuni specifici valori di x che la soddisfano, mentre tutti gli altri non la soddisfano. Noi vogliamo, però, che qualunque x la soddisfi, e questo è possibile solo se l'equazione non contiene la x affatto, ossia si riduce a $0 = 0$. Questa osservazione si chiama principio di identità dei polinomi.

Esercizio 133 (p. 187)
Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f potrebbe essere la derivata di g, o g quella di f, oppure non si dà nessuno di questi due casi.



Soluzione. Conviene ragionare sempre allo stesso modo: dove il grafico del candidato "funzione" sale, il candidato "derivata" deve stare sopra l'asse; dove scende, sotto; dove il grafico è orizzontale, la derivata si annulla. Inoltre una retta ha pendenza costante, quindi la sua derivata è una costante.

coppia	$g = f'$	$f = g'$	perché
(1)	✓		f scende dove la retta g è negativa, sale dove è positiva, e ha il minimo dove g taglia l'asse.
		✗	la derivata della retta g è costante, ma f no.
(2)	✓		g si annulla nel massimo di f, ed è positiva dove f sale.
		✗	g scende dopo l'origine, mentre f resta positiva.
(3)	✗		f sale, quindi f' è positiva e crescente, mentre g scende.
		✗	g scende, quindi g' è negativa, mentre f è positiva.
(4)	✗		f sale subito a destra di 0, dove g è ancora negativa.
		✓	g è orizzontale in 0, dove f si annulla, e sale dove $f > 0$.
(5)	✗		f è costante, quindi $f' = 0$, mentre g non è nulla.
		✗	g' è una costante positiva, mentre f è negativa.
(6)	✓		la pendenza di f è costante e positiva, come g.
		✗	la derivata della costante g è nulla.
(7)	✗		f scende, quindi f' è negativa, mentre g è positiva.
		✗	a destra, g si appiattisce, quindi g' si avvicina a zero, mentre f diventa sempre più negativa.
(8)	✗		g è positiva dove f scende, ossia dove f' è negativa, e viceversa.
		✓	g scende sempre, ed è più ripida dove f ha il minimo, piatta dove f si avvicina a zero.
(9)	✓		f scende sempre, e ha tangente verticale in 0: la sua derivata è negativa ovunque e sprofonda in 0, come g.
		✗	g sale a destra di 0, mentre f scende.
(10)	✗		dove f scende, g è positiva.
		✓	g è orizzontale dove f taglia l'asse, e sale dove $f > 0$.
(11)	✗		f scende a destra di 0, dove g è positiva.
		✗	g scende a sinistra di 0, mentre f vicino a 0 è positiva.
(12)	✗		f scende, quindi f' è negativa, mentre g è quasi ovunque positiva.
		✓	g sale sempre più lentamente, e infatti f è positiva e decrescente.

Esercizio 134 (p. 187)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ per $0 \leqslant x \leqslant 3$. Determina quindi il massimo ed il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Soluzione. Calcoliamo la derivata di f,

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

che si annulla per $\sqrt{x} = 1$, ossia in $x = 1$, che cade nell'intervallo. Per $0 < x < 1$ la frazione $1/\sqrt{x}$ è maggiore di 1, quindi $f'(x) < 0$, mentre per $x > 1$ è minore di 1 e $f'(x) > 0$. La funzione scende quindi fino a $x = 1$ e poi risale. Siccome è continua sull'intervallo chiuso, il massimo e il minimo vanno cercati in $x = 1$ e negli estremi, dove f vale

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1 - 2 = -1 \qquad f(3) = 3 - 2\sqrt{3} = 3 - 3.4641 = -0.4641$$