"la funzione $f(x)$"	e sarebbe corretto	"la funzione f"
$\sin 30°$	"	$\sin(30°)$
$\cos^2 7$	"	$(\cos(7))^2$

Nel dubbio, conviene utilizzare la forma pedante.

Una funzione non deve necessariamente possedere una espressione di natura algebrica. Per esempio, i valori assunti da una funzione (quindi la funzione stessa) potrebbero essere determinati sperimentalmente, o stabiliti per convenzione, e dati in forma grafica o tabulare.

Esempio
- la funzione che associa un punto della Terra alla sua quota sul livello del mare — definita sperimentalmente;
- la funzione che associa ad ogni data il giorno della settimana corrispondente — definita per convenzione;
- sarebbe SBAGLIATO parlare della funzione che associa ad x il numero y tale che $y^2 = x$ — infatti questo numero non è determinato univocamente: a 4 si potrebbe associare sia 2 sia -2.

§10.1 Rappresentazioni di funzioni

Il modo più immediato di rappresentare una funzione f è forse una tabella che elenca, per ogni valore di x ritenuto interessante, il corrispondente valore di $f(x)$.

Esempio
La funzione $f(x) = 1 + x^2$ può dar luogo alla tabella

x	-1	-0.5	0	0.5	1	2	100
$f(x)$	2	1.25	1	1.25	2	5	$10\,001$

Per quanto semplice, questa rappresentazione non determina f univocamente: come fare se il valore di x che ci interessa non è fra quelli tabulati? Vedremo come ovviare, in parte, a questo inconveniente quando parleremo di interpolazione lineare. Ad ogni modo, avendo qualche informazione sulla forma di $f(x)$, può darsi che si riesca a ricostruire la funzione da una tabella.

Esercizio
Data la tabella

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1.5	4	7.5	12

e sapendo che la funzione f è della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina l'espressione di f.

Soluzione. Dobbiamo determinare le tre costanti a, b, c: ci aspettiamo, quindi, di dover sfruttare tre condizioni. Possiamo provare con:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= f(0) = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c &= f(2) = 4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &= f(4) = 12 \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} c = 0 \\ a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 4 \\ a \cdot 16 + b \cdot 4 + c = 12 \end{cases}$$

A sinistra: le uguaglianze sono vere per via della forma di f, e i valori $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ sono letti dalla tabella.

Risolvendo il sistema otteniamo

$$a = \tfrac{1}{2} \qquad b = 1 \qquad c = 0 \qquad \implies \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x$$

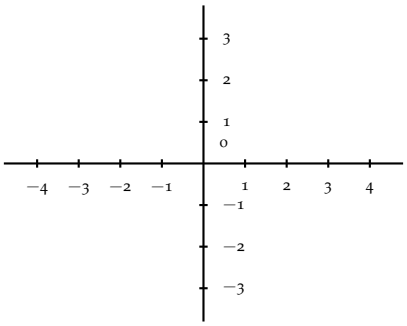
□

Nota importante
È ora importante verificare questo risultato ricostruendo la tabella dei valori di f a partire dalla formula che abbiamo trovato. Una discrepanza indicherebbe un errore.

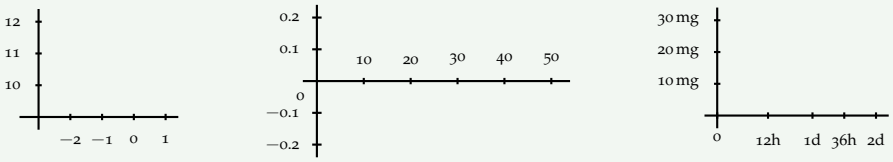
Nota
Abbiamo scelto di scrivere le tre condizioni necessarie per trovare i coefficienti usando i valori tabulati per f in 0, 2, 4. Matematicamente, astrattamente, qualunque terna di valori sarebbe stata adatta allo scopo (per esempio 0, 1, 2). Tuttavia, in pratica, è buona norma usare valori più distanti possibile fra loro, per minimizzare l'impatto degli errori di arrotondamento e delle eventuali incertezze di misura nei dati tabulati.

§10.2 Grafici

Considerando due assi ortogonali e graduati secondo la distanza da un certo punto fissato, si ottiene, come è ben noto, un diagramma cartesiano.



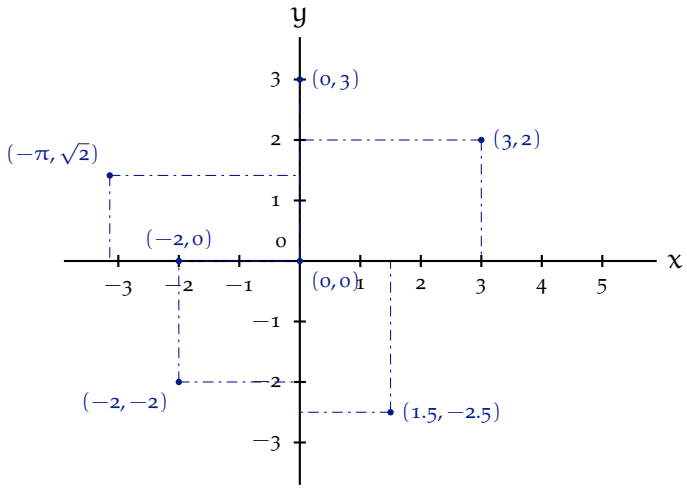
Nota
Nulla obbliga lo zero a trovarsi nel punto di incontro degli assi, né gli assi ad essere graduati nella medesima unità.



Alcuni diagrammi cartesiani.

Un asse è tipicamente rappresentato orizzontalmente e detto asse delle ascisse; l'altro, disposto verticalmente, si chiama asse delle ordinate.

Un diagramma cartesiano ci permette di assegnare ad ogni punto del piano un nome, che è la coppia di valori che si leggono in corrispondenza delle proiezioni del punto rispettivamente — in quest'ordine! — sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate.



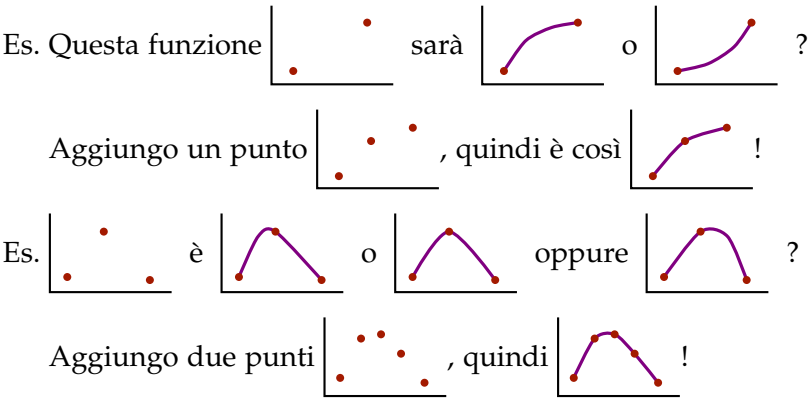
Viceversa, ogni coppia di valori è rappresentata da un punto del diagramma.

Definizione (grafico di una funzione)
Il grafico di una funzione f è costituito da tutti i punti del tipo $\big(x, f(x)\big)$.

Se fosse possibile disegnare tutti gli infiniti punti $\big(x, f(x)\big)$ il loro insieme formerebbe, solitamente, una linea, che è il grafico di f. In pratica, ci si deve limitare al calcolo di una quantità finita di punti, che poi si congiungono tracciando una linea che, ragionevolmente, dovrebbe seguire il vero grafico (teorico).

§10.3 Come si disegna un grafico in pratica?

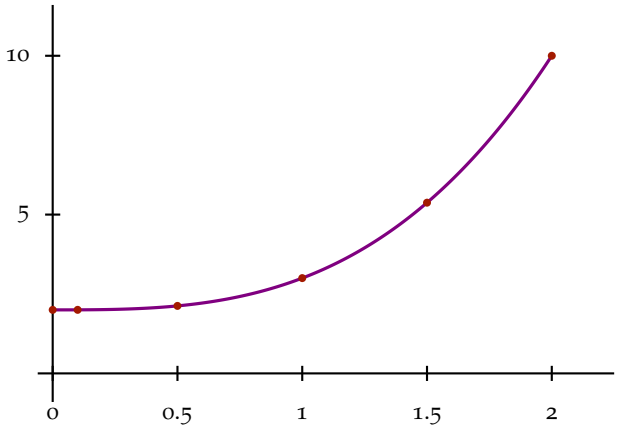
1. Calcolo il valore della funzione in alcuni (pochi) punti per capire come impostare gli assi.
2. Traccio gli assi e riporto i punti calcolati.
3. Aggiungo punti in quelle zone dove l'andamento del grafico non mi è chiaro.



Esercizio
Traccia il grafico di $x \mapsto 2 + x^3$ per x compreso fra 0 e 2.

Soluzione.

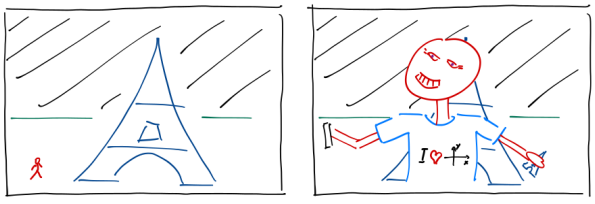
x	f(x)
0	2
0.1	2.001
0.5	2.13
1	3
1.5	5.38
2	10



□

Nota importante

Nel tracciare il diagramma di una funzione è importante prestare attenzione alla scelta della scala e alla centratura. Se un turista ti chiede una foto, la vuole come quella di destra.

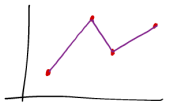


Anche le funzioni preferiscono essere in primo piano — e hanno, bene o male,

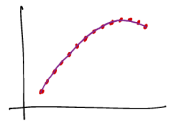
tanto buon gusto quanto il grosso dei turisti. In maniera più seria, un grafico è un mezzo per comunicare informazione. È fondamentale far uso di tutto lo spazio disponibile in maniera informativa.

Siccome lo spazio vuoto non comunica informazione, è bene che i grafici occupino tutto lo spazio disponibile.

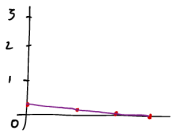
§10.4 Come NON tracciare un grafico



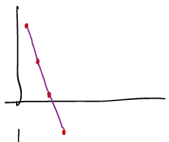
Spezzata (salvo se la funzione è davvero una spezzata).



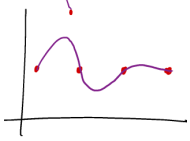
Calcolare 2000 **punti** non è sbagliato, ma spreca tempo.



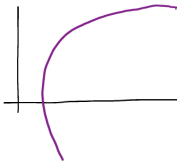
Scala sbagliata: può convenire usare unità diverse sui due assi.



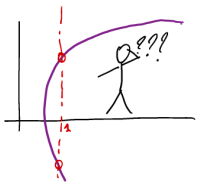
Centratura sbagliata: non tutti i numeri sono positivi.



Comportamento non evidenziato dai punti calcolati.



Uncino: quanto vale $f(1)$?



§10.5 Un esercizio

Nota importante
In questo corso, le funzioni trigonometriche si intendono in radianti.

Esercizio
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - \sin(x) \qquad -0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$$

Soluzione.

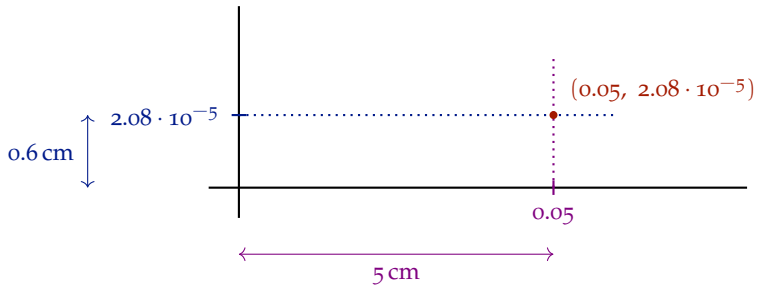
1. Comincio con

$$f(-0.1) = -1.67 \cdot 10^{-4} \qquad f(0) = 0 \qquad f(0.1) = 1.67 \cdot 10^{-4}$$

(Attenzione: $\sin(0.1) = 0.0998334$, per cui $0.1 - 0.0998334 = 0.0001666$ è la differenza fra due numeri quasi uguali, che si mangia le prime cifre. Per avere tre cifre significative del risultato, il seno va preso con almeno sette cifre decimali.)

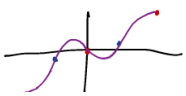
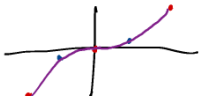
2. Imposto il grafico. Attenzione: mi sono venuti numeri molto piccoli. Converrà usare una scala opportuna per le ordinate, tipo 3 cm corrispondono a 10^{-4}.
Nota. I valori si riportano mediante la proporzione con determinate unità di misura. Per esempio, se decido che, in ascissa 10 cm corrispondono a 0.1, mentre in ordinata 3 cm corrispondono a 10^{-4}, come riporto il punto $(0.05,\ f(0.05))$, cioè $(0.05,\ 2.08 \cdot 10^{-5})$?

$$10\,\text{cm} : 0.1 = x : 0.05 \longrightarrow x = 5\,\text{cm}$$
$$3\,\text{cm} : 10^{-4} = y : 2.08 \cdot 10^{-5} \longrightarrow y = 0.624\,\text{cm} \approx 0.6\,\text{cm}$$



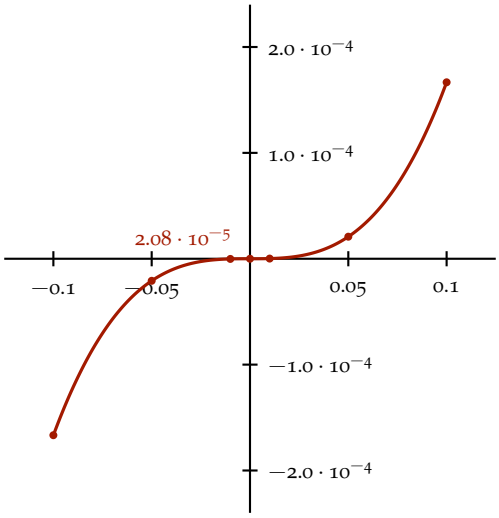
3. Per ora ho un grafico così  ma dubito che sia rettilineo.
Per controllare calcolo $f(0.05) \approx 2.08 \cdot 10^{-5}$, $f(-0.05) \approx -2.08 \cdot 10^{-5}$.

4. Ora ho questa situazione 

Sarà così  o così  ?

Calcolo $f(0.01) \approx 1.67 \cdot 10^{-7}$, $f(-0.01) \approx -1.67 \cdot 10^{-7}$.

5. I punti confermano la seconda ipotesi: probabilmente bastano per tracciare un grafico approssimativo (la figura seguente).



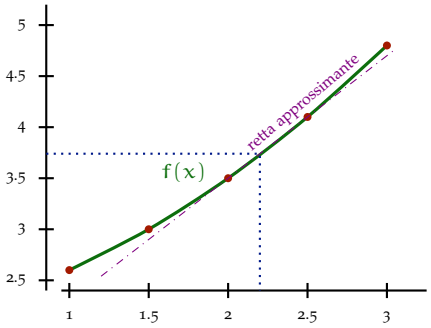
□

§10.6 Tabelle & interpolazione lineare

Può capitare che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, liscia, regolare, &c. ci sia data solo sotto forma di tabella. Per esempio

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.6	3.0	3.5	4.1	4.8

In questo caso come possiamo ottenere una stima dei valori non tabulati, ad esempio $f(2.2)$? Facciamo finta che fra i due valori tabulati più vicini a quello che ci interessa, 2.2, la funzione sia lineare. Non lo è, ma non può discostarsi troppo, se la tabella è costruita bene.



In questo caso i due valori sono 2.0 e 2.5. Se la funzione fosse lineare avremmo $f(2.0) = 3.5$, $f(2.5) = 4.1$, e, usando la formula della retta per due punti, $f(x) = 1.1 + x \cdot 1.2$. Sostituendo, $f(2.2) = 3.74 \approx 3.7$.

Nota
Se questo è il risultato del nostro calcolo scriveremo 3.7 con due cifre significative, perché la tabella è data con due cifre significative. Se però si tratta di un passaggio intermedio conviene mantenere 3.74, e approssimare alla fine.

In definitiva, se vogliamo interpolare $f(x)$ con x fra x_0 e x_1, e abbiamo i valori tabulati $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$, allora:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

Facendo riferimento alla tabella precedente, sapendo $f(x) = 3.1$, quanto vale x? Dovremo interpolare fra

$$f(\overbrace{1.5}^{x_0}) = \overbrace{3.0}^{y_0} \qquad \text{e} \qquad f(\overbrace{2.0}^{x_1}) = \overbrace{3.5}^{y_1}$$

Primo metodo: risolviamo

$$\underbrace{3.1}_{f(x)} = (x - \underbrace{1.5}_{x_0}) \cdot \frac{\overbrace{3.5}^{y_1} - \overbrace{3.0}^{y_0}}{\underbrace{2.0}_{x_1} - \underbrace{1.5}_{x_0}} + \underbrace{3.0}_{y_0}$$

$$3.1 = x + 1.5 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1.6$$

Secondo metodo: usiamo la formula scambiando x e y.

$$x = (f(x) - y_0)\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} + x_0$$

$$x = (\underbrace{3.1}_{f(x)} - \underbrace{3.0}_{y_0}) \frac{\overbrace{2.0}^{x_1} - \overbrace{1.5}^{x_0}}{\underbrace{3.5}_{y_1} - \underbrace{3.0}_{y_0}} + \underbrace{1.5}_{x_0} = 1.6$$

Approfondimento (fuori programma) (Giustificazione della formula)
Risolviamo il sistema di equazioni per calcolare l'equazione della retta $y = ax + b$ passante per (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \implies b = y_0 - ax_0 \\ ax_1 + b = y_1 \implies ax_1 + y_0 - ax_0 = y_1 \implies a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

$$b = y_0 - ax_0 = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0$$

e quindi

$$f(x) = ax + b = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{a} x + \underbrace{y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0}_{b} = (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

§10.7 Esercizi

Esercizio 58 (soluzione a p. 275)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - 0.01 \cdot x^3$$

per $0 \leqslant x \leqslant 15$.

Esercizio 59 (soluzione a p. 276)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - 2\cos(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 5$. Attenzione: il coseno è in radianti!

Esercizio 60 (soluzione a p. 277)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x^3 - 50 \cdot x$$

per $9.8 \leqslant x \leqslant 10.2$.

Esercizio 61 (soluzione a p. 278)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Esercizio 62 (soluzione a p. 279)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \cos(x)$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

Esercizio 63 (soluzione a p. 279)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

Esercizio 64 (soluzione a p. 280)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Esercizio 65 (soluzione a p. 282)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$

per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

§11 Funzioni esponenziali

Sappiamo che

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \ldots \cdot x}_{n \text{ volte}} \qquad \text{e ugualmente} \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \underbrace{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x}}_{n \text{ volte}}$$

e questo è l'ordinario elevamento a potenza. È possibile estendere l'elevamento a potenza in modo tale da ammettere esponenti reali arbitrari (anche frazionari, o persino irrazionali). Il risultato è l'esponenziale b^a, definito per ogni esponente a e per basi b positive. Valgono le seguenti proprietà.

$$b^0 = 1 \qquad b^x \cdot b^y = b^{x+y} \qquad x^a \cdot y^a = (xy)^a \qquad \left(b^x\right)^y = b^{xy}$$

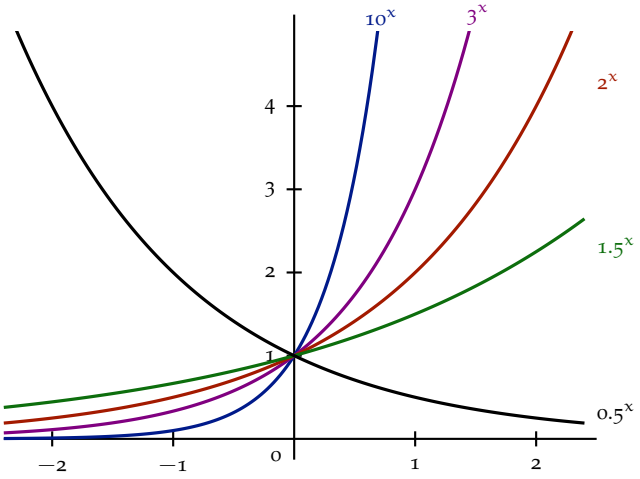
$$b^1 = b \qquad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y} \qquad \frac{x^a}{y^a} = \left(\frac{x}{y}\right)^a \qquad b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{b}$$

$$1^a = 1$$

Nota
La costruzione formale della funzione esponenziale richiede nozioni di analisi ed è al di fuori della portata di questo corso. È possibile, tuttavia, giustificare le proprietà dell'esponenziale pensando al caso più semplice dell'elevamento a potenza. Per esempio:

$$b^x \cdot b^y = \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots}_{x \text{ volte}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots}_{y \text{ volte}} = \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots}_{x+y \text{ volte}} = b^{x+y}$$

§11.1 Grafico dell'esponenziale



Osservando questi grafici possiamo notare alcune proprietà delle funzioni esponenziali.

- Se $b > 1$ la funzione b^x è crescente, ossia assume valori via via più grandi al crescere di x.

- Se $0 < b < 1$ la funzione b^x è decrescente, ossia assume valori via via più piccoli al crescere di x.

Algebricamente questo significa che

- per $b > 1$: $b^x > b^y$ equivale a $x > y$;
- per $0 < b < 1$: $b^x > b^y$ equivale a $x < y$.

Possiamo vedere, inoltre, che b^x cresce tanto più velocemente, al crescere di x, quanto maggiore è la base b. Infine, va da sé che tutti i grafici di b^x devono passare per il punto $(0, 1)$, perché $b^0 = 1$ indipendentemente da b.

§11.2 Alcuni valori della funzione 10^x

Tutti sanno calcolare 10^x quando x è un numero intero:

$$10^2 = 100 \qquad 10^7 = 10\,000\,000 \qquad 10^{-3} = 0.001 \qquad \&c.$$

è una semplice questione di contare gli zeri. Diverso è quando x non è intero: per esempio quanto vale $10^{3.7}$? Un primo passo è scrivere $10^{3.7} = 10^3 \cdot 10^{0.7} = 1000 \cdot 10^{0.7}$, però adesso occorre sapere quanto valga $10^{0.7}$.

Per esercizio, calcoliamo valori approssimati per $10^{0.1}$, $10^{0.2}$, &c. fino a $10^{0.9}$. Sfrutteremo il fatto seguente, che conviene ricordare:

$$10^{0.3} \approx 2 \qquad \text{(valore esatto } 1.99526\ldots\text{)}$$

Iniziamo quindi con questa tabella.

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1			2							10

Usando la relazione $10^{x+0.3} = 10^x \cdot 10^{0.3} \approx 10^x \cdot 2$ calcoliamo

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1			2			4			8	10

$0.3 \xrightarrow{+0.3} 0.6 \xrightarrow{+0.3} 0.9$, e corrispondentemente $2 \xrightarrow{\cdot 2} 4 \xrightarrow{\cdot 2} 8$.

Viceversa, usando $10^{x-0.3} = 10^x \cdot 10^{-0.3} = 10^x/10^{0.3} \approx 10^x/2$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1	1.25		2	2.5		4	5		8	10

$1 \xrightarrow{-0.3} 0.7 \xrightarrow{-0.3} 0.4 \xrightarrow{-0.3} 0.1$, e corrispondentemente

$10 \xrightarrow{/2} 5 \xrightarrow{/2} 2.5 \xrightarrow{/2} 1.25$.

Ora ci mancano gli esponenti 0.2, 0.5, 0.8, che sono a passi di 0.3 l'uno dall'altro. Ci basta quindi determinarne uno per poter completare la tabella. Per esempio possiamo considerare

$$10^{0.2} = 10^{0.3-0.1} = \frac{10^{0.3}}{10^{0.1}} \approx \frac{2}{1.25} = 1.6$$

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
10^x	1	1.25	1.6	2	2.5	3.2	4	5	6.4	8	10

$0.2 \xrightarrow{+0.3} 0.5 \xrightarrow{+0.3} 0.8$, e corrispondentemente $1.6 \xrightarrow{\cdot 2} 3.2 \xrightarrow{\cdot 2} 6.4$.

Per curiosità, possiamo confrontare la nostra tabella con i valori esatti.

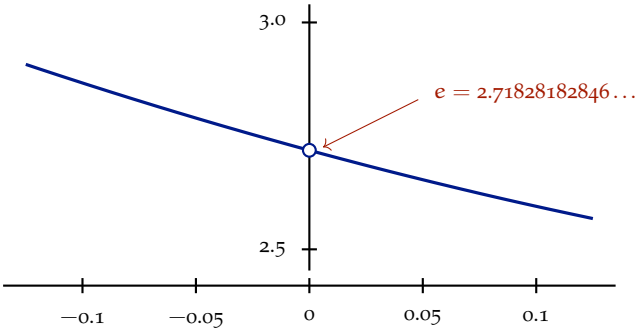
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
$10^x \approx$	1	1.25	1.6	2	2.5	3.2	4	5	6.4	8	10
$=$	1.00	1.26	1.58	2.00	2.51	3.16	3.98	5.01	6.31	7.94	10.00
err. %	0%	−0.7%	+1.0%	+0.2%	−0.5%	+1.2%	+0.5%	−0.2%	+1.4%	+0.7%	0%

Abbiamo commesso il massimo errore per $10^{0.8}$, e questo è dell'1.4% rispetto al valore esatto.

§11.3 Intermezzo: il numero e

Introduciamo il numero $e = 2.71828182846\ldots$, che spesso viene usato come base dei logaritmi (che vedremo nel prossimo capitolo) e degli esponenziali (cioè e^x).

Il numero e — "numero di Eulero", anche "numero di Nepero", che sono due persone diverse, ma poco importa perché comunque lo ha scoperto Jacob Bernoulli — emerge dallo studio della funzione $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$.



Chiaramente $f(0)$ non è definito, perché occorrerebbe calcolare l'esponente $\frac{1}{0}$; tuttavia, tracciando un grafico accurato di $f(x)$ in prossimità di $x = 0$, si vede che questo ha l'aspetto di una curva regolare cui manca il punto di ascissa 0. Il numero e è definito esattamente come l'ordinata di questo punto mancante. In questo corso non studieremo la nozione di limite, ma questo fatto si esprime dicendo che "e è il limite di $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x tendente a 0", e si scrive

$$e = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

Il numero e è quindi una costante matematica nello stesso senso in cui lo è π: un numero fissato non per convenzione — come le 24 ore in un giorno — né dall'osservazione di un fenomeno naturale — come i 365.24 giorni in un anno — ma da una proprietà matematica — la lunghezza della circonferenza per π, e il limite di $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per e.

In pratica, tutte le calcolatrici scientifiche hanno un tasto per la funzione e^x, i linguaggi di programmazione hanno una funzione di libreria che calcola e^x, &c. Quindi non c'è

alcun bisogno di calcolare e. Se volessimo, però, potremmo calcolare $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ per x decrescenti in valore assoluto:

	x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
POSITIVI	0.1	2.594
	0.01	2.705
	0.001	2.717
	0.0001	2.718

	x	$(1+x)^{\frac{1}{x}}$
NEGATIVI	-0.1	2.868
	-0.01	2.732
	-0.001	2.720
	-0.0001	2.718

Quello che otteniamo sono approssimazioni per difetto e per eccesso — secondo che x sia rispettivamente positivo o negativo — del numero e.

Approfondimento (fuori programma)
Una delle ragioni per definire il numero e è che l'esponenziale e^x può essere ricondotto alle operazioni algebriche mediante una formula

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3\cdot 2} + \frac{x^4}{4\cdot 3\cdot 2} + \frac{x^5}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} + \dots$$

Questa è una somma infinita, però, via via che si procede, gli addendi diventano sempre più piccoli, è quindi possibile calcolare e^x con precisione arbitraria semplicemente sommando una quantità sufficiente di addendi. È precisamente mediante formule come questa che calcolatrici e computer calcolano l'esponenziale.

§11.4 Esercizi

Test 66 (soluzione a p. 282)
Risolvi la disequazione $2^x < 5^x$.

Test 67 (soluzione a p. 283)
Sapendo che $10^{3x} = 64$, quanto vale 100^x?

Test 68 (soluzione a p. 283)
Sapendo che $8^x = 2.7 \cdot 10^4$, quanto vale 2^x?

Test 69 (soluzione a p. 283)
Metti in ordine crescente $4^{1.5}$, $10^{0.5}$, 5.

Test 70 (soluzione a p. 284)
Risolvi $1000 \cdot 10^x = 100^{x-7}$.

Test 71 (soluzione a p. 284)
Risolvi $10^{2x} + 10^{x} - 2 = 0$.

Esercizio 65 (p. 72)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$

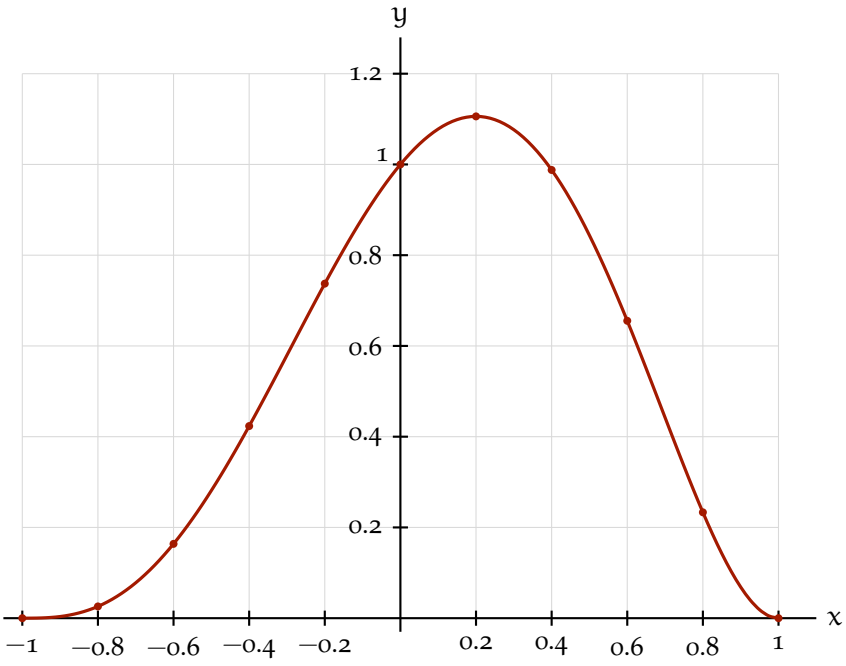
per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Soluzione. Prima di fare i conti guardo la forma fattorizzata, dalla quale si capiscono già parecchie cose. La funzione si annulla agli estremi dell'intervallo, $f(-1) = f(1) = 0$, e nell'intervallo $(x-1)^2 \geqslant 0$ e $(x+1)^3 \geqslant 0$, quindi il grafico sta tutto sopra l'asse delle ascisse. Vicino a $x = -1$ il fattore $(x+1)^3$ è piccolissimo — in $x = -0.9$ vale 0.001 — quindi la curva parte molto piatta; il fattore $(x-1)^2$ è una parabola con vertice in $x = 1$, per cui la curva si appiattisce anche all'estremo destro del grafico.

Calcolo poi i valori di f con passo 0.2:

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	0	0.026	0.164	0.423	0.737	1	1.106	0.988	0.655	0.233	0

Il valore più alto della tabella è $f(0.2) = 1.106$, quindi il grafico ha una gobba un po' spostata a destra.



Test 66 (p. 76)
Risolvi la disequazione $2^x < 5^x$.

Soluzione. Dividendo ambo i membri per la quantità positiva 2^x:

$$\underbrace{\frac{2^x}{2^x}}_{=1} < \underbrace{\frac{5^x}{2^x}}_{=\left(\frac{5}{2}\right)^x} \iff \underbrace{1}_{\left(\frac{5}{2}\right)^0} < \left(\frac{5}{2}\right)^x \iff \left(\frac{5}{2}\right)^0 < \left(\frac{5}{2}\right)^x \underset{\text{poiché } \frac{5}{2}>1}{\iff} 0 < x$$

Test 67 (p. 76)
Sapendo che $10^{3x} = 64$, quanto vale 100^x?

Soluzione. Analizziamo prima la quantità cercata

$$100^x = \left(10^2\right)^x = 10^{2\cdot x} = 10^{x\cdot 2} = \left(10^x\right)^2$$

Si usa due volte la proprietà $\left(b^{\square}\right)^{\triangle} = b^{\square\cdot\triangle}$.

Ci basta quindi capire quanto valga 10^x. Ripetendo il procedimento su 10^{3x} vediamo che

$$64 = 10^{3\cdot x} = 10^{x\cdot 3} = \left(10^x\right)^3 \qquad \Longrightarrow \qquad 10^x = \sqrt[3]{64} = 4$$

Quindi, sostituendo,

$$100^x = \ldots = \left(10^x\right)^2 = 4^2 = 16$$

Test 68 (p. 76)
Sapendo che $8^x = 2.7 \cdot 10^4$, quanto vale 2^x?

Soluzione. Procedendo come nell'esercizio precedente

$$2.7 \cdot 10^4 = 8^x = \left(2^3\right)^x = \left(2^x\right)^3 \qquad \Longrightarrow \qquad 2^x = \sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4}$$

Resta da calcolare $\sqrt[3]{2.7 \cdot 10^4}$:

$$\sqrt[3]{\underbrace{2.7 \cdot 10^4}_{27\cdot 10^3}} = \sqrt[3]{27 \cdot 10^3} = \left(27 \cdot 10^3\right)^{\frac{1}{3}} = 27^{\frac{1}{3}} \cdot 10^{3\cdot\frac{1}{3}} = 30$$

Si usano $\sqrt[n]{\square} = \square^{\frac{1}{n}}$ e $(\square \cdot \triangle)^x = \square^x \cdot \triangle^x$; poi $\sqrt[3]{27} = 3$ e $10^1 = 10$.

Test 69 (p. 76)
Metti in ordine crescente $4^{1.5}$, $10^{0.5}$, 5.

Soluzione. Possiamo intanto calcolare

$$4^{1.5} = 4^1 \cdot 4^{0.5} = 4 \cdot \sqrt{4} = 8$$

Inoltre $10^{0.5} = \sqrt{10} \approx 3.2$. Quindi l'ordine crescente corretto è

$$10^{0.5} \;<\; 5 \;<\; 4^{1.5}$$

Test 70 (p. 76)
Risolvi $1000 \cdot 10^x = 100^{x-7}$.

Soluzione.

$$10^{3+x} = \underbrace{1000}_{10^3} \cdot 10^x = 100^{x-7} = \left(10^2\right)^{x-7} = 10^{2\cdot(x-7)}$$

Confrontando i due estremi della catena,

$$10^{3+x} = 10^{2\cdot(x-7)} \qquad \Longrightarrow \qquad 3 + x = 2 \cdot (x-7) \qquad \Longrightarrow \qquad x = 17$$

Test 71 (p. 77)
Risolvi $10^{2x} + 10^x - 2 = 0$.

Soluzione. Usando l'identità $10^{2x} = \left(10^x\right)^2$, l'equazione diventa

$$\left(10^x\right)^2 + 10^x - 2 = 0$$

che è un'equazione di secondo grado nell'indeterminata 10^x. Riscriviamo quindi l'equazione ponendo $y = 10^x$:

$$y^2 + y - 2 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \begin{cases} 1 \\ -2 \end{cases}$$

Se $y = 1$, allora $10^x = 1$, quindi $x = 0$. D'altro canto $y = -2$ è impossibile, perché avremmo $10^x = -2$, e l'esponenziale 10^x è necessariamente positivo. In conclusione, c'è la sola soluzione $x = 0$.

Test 72 (p. 82)
Sapendo che $\log_e(x) = 10$, quanto vale $\log_e\left(x \cdot \sqrt{x}\right)$?

Soluzione. Applicando le proprietà dei logaritmi

$$\log_e\left(x \cdot \sqrt{x}\right) = \log_e(x) + \log_e\left(\sqrt{x}\right) = \underbrace{\log_e(x)}_{10} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\log_e(x)}_{5} = 15$$

Test 73 (p. 82)
Sapendo che $\log_{10}(x) = 12.4$, quanto vale $\log_{100}(x)$?

Soluzione. Applicando la formula di cambiamento di base

$$\log_{100}(x) = \frac{\log_{10}(x)}{\log_{10}(100)} = \frac{12.4}{2} = 6.2$$