§9 La teoria degli errori

Le cifre significative offrono un'idea rozza di quanto sia preciso un certo dato di origine sperimentale. La teoria degli errori permette di quantificare le incertezze di misura in modo preciso.

Nota importante
Gli errori di cui si parla sono le incertezze inevitabili nelle misure sperimentali. Gli sbagli e i guai derivanti da uno strumento guasto, o da una tecnica approssimativa, non sono oggetto della teoria degli errori.

Se scriviamo un dato sperimentale nella forma

$$\text{massa} = (42.84 \pm 0.03)\,\text{kg}$$

vogliamo dire che siamo incerti sul valore, in questo caso, della massa, però sappiamo che questo valore è probabilmente compreso fra $(42.84 - 0.03)\,\text{kg}$ e $(42.84 + 0.03)\,\text{kg}$.

Quindi la scrittura precedente significa

$$\text{“probabilmente } 42.81\,\text{kg} \leqslant \text{massa} \leqslant 42.87\,\text{kg”}$$

Chiameremo l'intervallo $42.81 \leqslant \ldots \leqslant 42.87$ (o, più formalmente, $[42.81, 42.87]$) intervallo di incertezza (altri nomi: intervallo di fiducia, i. di errore).

Nota
Nelle formule precedenti, l'unità di misura kg si comporta, algebricamente, come se fosse una variabile moltiplicata per i valori numerici. Per questa ragione, preferisco scrivere $(42.84 \pm 0.03)\,\text{kg}$ anziché $42.84 \pm 0.03\,\text{kg}$, per indicare che l'unità kg si applica sia al valore 42.84 sia all'errore 0.03. Se non c'è rischio di ambiguità, tuttavia, entrambe le scritture sono ammissibili.

Definizione (errore assoluto)
La scrittura

$$x = x_0 \pm \delta x$$

significa

$$\text{“probabilmente } x_0 - \delta x \leqslant x \leqslant x_0 + \delta x\text{”}$$

La quantità δx si chiama errore assoluto di x e l'intervallo $[x_0 - \delta x,\, x_0 + \delta x]$ si chiama intervallo di incertezza di x.

Nota
Abbiamo usato la parola "probabilmente". Non è impossibile specificarne in maniera esatta il significato, ma, per farlo, servono conoscenze che si studieranno in maggior dettaglio nella parte del corso dedicata alla statistica.

Esempio
Nella scrittura raggio $= (41.4 \pm 0.2)\,\text{cm}$

- l'errore assoluto è $0.2\,\text{cm}$;
- l'intervallo di incertezza è: $\underbrace{41.2}_{41.4-0.2}\ \text{cm} \leqslant \text{raggio} \leqslant \underbrace{41.6}_{41.4+0.2}\ \text{cm}.$

La formula della definizione

$$x = x_0 \pm \delta x \qquad \Longrightarrow \qquad x_0 - \delta x \leqslant x \leqslant x_0 + \delta x$$

permette di passare dall'errore assoluto all'intervallo di incertezza. Viceversa, se conosciamo un intervallo di incertezza $\alpha \leqslant x \leqslant \beta$, possiamo ricavare la scrittura $x = x_0 \pm \delta x$ dal sistema di equazioni

$$\begin{cases} \alpha = x_0 - \delta x \\ \beta = x_0 + \delta x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 2x_0 \\ \beta - \alpha = 2\delta x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \delta x = \dfrac{\beta-\alpha}{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi stabilito la formula per il passaggio inverso

$$\alpha \leqslant x \leqslant \beta \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{\alpha+\beta}{2} \pm \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Come vedremo, questa formula si usa per calcolare δx; tuttavia spesso è conveniente calcolare x_0 in altro modo.

Nota
La parola "assoluto" nella locuzione "errore assoluto" non è lì per rendere il linguaggio più pomposo, e così incutere soggezione nella plebe ignorante. Semplicemente, introdurremo in futuro il concetto di "errore relativo", e la parola serve quindi a non far confusione.

§9.1 La propagazione degli errori

Va da sé che un risultato basato su dati incerti è, a sua volta, affetto da incertezza. In altri termini gli errori sui dati si propagano attraverso i calcoli e generano un errore sul risultato. Ci sono varie regole per tener conto di questa propagazione, ma tutte discendono dalla seguente.

Regola (delle regole, della propagazione degli errori)
L'intervallo di incertezza sul risultato ha come estremi il minimo e il massimo valore ottenibile al variare dei dati nei loro rispettivi intervalli di incertezza.

Esercizio
Sapendo che $x = 4.0 \pm 0.4$, calcola $y = x + \sqrt{x}$.

Soluzione. Innanzitutto, se non ci fossero di mezzo le incertezze, avremmo semplicemente $x_0 = 4.0$ quindi $y_0 = x_0 + \sqrt{x_0} = 4 + \sqrt{4} = 6$. La risposta all'esercizio sarà quindi del tipo $y = 6 \pm \delta y$, e noi dobbiamo determinare l'errore assoluto δy.

L'intervallo di incertezza di x è $\underbrace{3.6}_{4.0-0.4} \leqslant x \leqslant \underbrace{4.4}_{4.0+0.4}$: studiamo $x + \sqrt{x}$ al variare di x in questo intervallo.

x	3.6	4.0	4.4
$x + \sqrt{x}$	5.497	6.000	6.498

Seguiamo la regola generale di tenere, nei passaggi intermedi, qualche cifra in più.

Come si vede, y varia nell'intervallo di incertezza $\underbrace{5.497}_{\alpha} \leqslant y \leqslant \underbrace{6.498}_{\beta}$. Otteniamo quindi

$$\delta y = \frac{\beta - \alpha}{2} = 0.5005 \qquad y = 6.000 \pm 0.5005$$

Si pone ora questo problema: a che cifra è opportuno arrotondare il risultato?

Regola (di arrotondamento)
Le incertezze si arrotondano a una cifra significativa. Con una eccezione: se questa cifra è un 1, allora conviene arrotondare a due cifre significative.

I valori affetti da incertezza si arrotondano alla medesima posizione decimale dell'errore assoluto corrispondente (es. se l'errore assoluto è arrotondato alla cifra dei centesimi, anche il valore deve essere arrotondato alla cifra dei centesimi).

Nota
Le una o due cifre significative dell'incertezza sono una regola *di massima*, ossia, secondo le circostanze, può essere ammesso, corretto, ragionevole o anche necessario deviare da questa regola. In assenza di ragioni precise, però, conviene seguirla.

D'altro canto, il fatto che errore assoluto e valore si arrotondano alla medesima posizione decimale non ammette eccezioni.

Alla luce di questa regola, δy va arrotondato a 0.5, ossia ai decimi, di conseguenza anche y va arrotondato ai decimi, dando 6.0. La risposta è quindi

$$y = 6.0 \pm 0.5$$

□

Nota
Se, anziché calcolare il valore 6.0 di y in maniera diretta, avessimo usato la formula $y_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$, avremmo ottenuto

$$y_0 = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{5.497+6.498}{2} = 5.998$$

e questo valore, arrotondato alla cifra dei decimi, fa proprio 6.0. È consigliabile però seguire il metodo diretto, se non altro perché funge da controllo sul calcolo dell'errore: se il valore calcolato direttamente non viene al centro dell'intervallo di incertezza, allora qualcosa non va.

§9.2 Giustificazione della regola di arrotondamento

Ai fini del corso non è necessario sapere questa giustificazione: è soltanto necessario APPLICARE CORRETTAMENTE LA REGOLA. Però questo discorso può aiutare a capire le cose.

Se qualcuno ci dicesse che la massa di un campione è

$$M = (25.000 \pm 0.314)\,\mathrm{g}$$

dovremmo credergli? Questa persona ci starebbe dicendo che i valori di M compresi fra 24.686 g e 25.314 g — una escursione di oltre mezzo grammo — sono plausibili, ma aggiungi un milligrammo e 25.315 no, questo valore è implausibile. Non è realistico che la massa M sia incerta nell'arco di oltre 600 milligrammi, ma questo stesso errore sia noto al milligrammo.

Per quanto, forse, l'idea di sapere molto esattamente di non sapere qualcosa sarebbe potuta piacere a Socrate, viene da chiedersi come faccia il nostro sperimentatore a essere tanto certo a proposito di una cosa su cui è tanto incerto. Conviene diffidare, ma, se anche fosse, conoscere l'incertezza con tanta precisione non servirebbe a molto.

All'atto pratico, sarà possibile e desiderabile sapere l'incertezza con una precisione commisurata all'incertezza stessa — se sono incerto di qualche grammo, potrò stimare di quanto sono incerto al grammo — e questa è appunto la definizione di avere una cifra significativa. Non dilunghiamoci sull'eccezione per l'uno: serve per evitare alcuni casi in cui l'errore di arrotondamento sarebbe eccessivo.

L'errore sulla nostra massa va quindi espresso come ± 0.3 g, ma perché il valore della massa va poi indicato come 25.0 g? I valori plausibili per questa massa sono quelli compresi fra 24.7 g e 25.3 g. Per esempio

M potrebbe essere 24.73 g o 24.89 g o 25.17 g. Cosa si può dire a proposito delle cifre di questi valori?

- la cifra delle decine di grammi: è 2;
- la cifra dei grammi: è 4 o 5;
- la cifra dei decigrammi: può essere $7, 8, 9, 0, 1, 2, 3$;

- la cifra dei centigrammi: boh? può essere qualunque cifra.

Fino alla cifra a cui è stato arrotondato l'errore può, concepibilmente, essere ancora contenuta informazione utile, le successive, però, sono essenzialmente prese a caso. Per questo la regola dice di arrotondare alla medesima cifra dell'incertezza.

§9.3 Propagazione: primi esercizi

Esercizio
Calcola $x - y$ sapendo che $x = 7.6 \pm 0.4$ e $y = 1.4 \pm 0.2$.

Soluzione. Gli intervalli di incertezza sono

$$\text{per } x, \quad \underbrace{7.2}_{7.6-0.4} \leqslant x \leqslant \underbrace{8.0}_{7.6+0.4} \quad (\text{ossia } x \in [7.2, 8.0])$$
$$\text{per } y, \quad \underbrace{1.2}_{1.4-0.2} \leqslant y \leqslant \underbrace{1.6}_{1.4+0.2} \quad (\text{ossia } y \in [1.2, 1.6])$$

Qual è il minimo valore possibile per $x - y$? Per far sì che $x - y$ sia più piccolo possibile, dobbiamo partire dalla x più piccola e sottrarre la y più grande: $7.2 - 1.6 = 5.6$.

Analogamente, otterremo il massimo di $x - y$ sottraendo la y più piccola dalla x più grande: $8.0 - 1.2 = 6.8$. Abbiamo così ottenuto l'intervallo di incertezza

$$5.6 \leqslant x - y \leqslant 6.8$$

Procedendo come nell'esercizio precedente

$$x - y = 6.2 \pm \frac{6.8 - 5.6}{2} = 6.2 \pm 0.6$$

□

Nota
Può capitare che non sia facile ragionare su quale combinazione dei dati dia il minimo e quale il massimo risultato. Nei casi di difficoltà conviene calcolare i risultati corrispondenti a tutte le combinazioni degli estremi degli intervalli di incertezza dei dati, per poi vedere quali dei valori ottenuti siano il massimo e il minimo.

La regola delle regole permette sempre di propagare le incertezze correttamente, però, nei casi più frequenti, c'è modo di eseguire i calcoli in maniera più spedita.

§9.4 Somme algebriche

Regola (somme algebriche)
Se $x = x_0 \pm \delta x$ e $y = y_0 \pm \delta y$, allora

$$x + y = x_0 + y_0 \pm (\delta x + \delta y)$$
$$x - y = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y)$$

Questa regola, per esempio, permette di risolvere senza fatica l'esercizio precedente.

Esempio
Calcoliamo $x - y$ sapendo che $x = 7.6 \pm 0.4$ e $y = 1.4 \pm 0.2$.

$$x - y = x_0 - y_0 \pm (\delta x + \delta y) = 7.6 - 1.4 \pm (0.4 + 0.2) = 6.2 \pm 0.6$$

Nota importante
Quando si calcola l'errore su una differenza gli errori si sommano, non si sottraggono!

§9.5 L'errore relativo

Per parlare di prodotti e quozienti conviene introdurre l'errore relativo.

Definizione (errore relativo)
L'errore relativo su una grandezza $x = x_0 \pm \delta x$ è il numero $\dfrac{\delta x}{x_0}$. Usualmente, si indica l'errore relativo in forma percentuale

$$x = x_0 \pm \left(\frac{\delta x}{x_0} \cdot 100 \right) \%$$

La medesima incertezza si può indicare come errore assoluto e come errore relativo.

ERRORE ASSOLUTO		ERRORE RELATIVO
$x = x_0 \pm \delta x$	$\longrightarrow$	$x = x_0 \pm \left(\dfrac{\delta x}{x_0} \cdot 100 \right) \%$
$x = x_0 \pm \dfrac{\alpha \cdot x_0}{100}$	$\longleftarrow$	$x = x_0 \pm \alpha\%$

Esempi.

$$(120 \pm 6)\,\mathrm{m} \longrightarrow (120 \pm \underbrace{5}_{6\cdot 100/120}\,\%)\,\mathrm{m}$$

$$(30.0 \pm 2\%)\,\mathrm{V} \longrightarrow (30.0 \pm \underbrace{0.6}_{2\cdot 30/100})\,\mathrm{V}$$

$\cancel{(37 \pm 5\%)\,°\mathrm{C}}$ NON HA SENSO!

Nota importante
Gli errori relativi non hanno senso applicati a misure basate su uno zero convenzionale (es. °C, ora del giorno).

Regola (prodotti e quozienti)
Se $x = x_0 \pm \alpha\%$ e $y = y_0 \pm \beta\%$, allora

$$x \cdot y = x_0 \cdot y_0 \pm (\alpha + \beta)\%$$
$$x/y = x_0/y_0 \pm (\alpha + \beta)\%$$

Esempio
Se $x = 7.0 \pm 2\%$ e $y = 5.0 \pm 1\%$, quanto valgono $x \cdot y$ e x/y?

$$x \cdot y = \underbrace{35.0}_{7.0\cdot 5.0} \pm \underbrace{3}_{2+1}\,\% \qquad \frac{x}{y} = \underbrace{1.40}_{7.0/5.0} \pm \underbrace{3}_{2+1}\,\%$$

Esempio
Se $x = 2.32 \pm 0.04$ e $y = 10.2 \pm 0.3$, quanto vale x/y con l'errore relativo?

Per poter applicare la regola, convertiamo gli errori assoluti in relativi:

$$x = 2.32 \pm 1.7241\% \qquad y = 10.2 \pm 2.9412\%$$

Chiaramente $x/y = 0.227451 \pm (1.7241\% + 2.9412\%) = 0.227451 \pm 4.6653\%$, ma come si arrotonda?

Applicando la regola di pagina 51, l'errore relativo si arrotonda a una cifra significativa, quindi $\pm 5\%$. Per il valore centrale, sempre secondo la regola, dobbiamo calcolare l'errore assoluto e decidere in base a quello; abbiamo quindi:

$$x/y = 0.227451 \pm 4.6653\% = 0.227451 \pm \underbrace{0.010611}_{\frac{4.6653\cdot 0.227451}{100}} = 0.227 \pm 0.011 = 0.227 \pm 5\%$$

§9.6 Riassunto delle regole

Abbiamo enunciato regole per la propagazione degli errori in somme e prodotti. Da quest'ultima si può desumere una regola per le potenze — poiché le potenze sono prodotti ripetuti — e dalla regola per le potenze una per le radici ($\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$). In definitiva si giunge allo specchietto seguente.

$$\begin{aligned}(x_0 \pm \delta x) + (y_0 \pm \delta y) &= (x_0 + y_0) \pm (\delta x + \delta y)\\ (x_0 \pm \delta x) - (y_0 \pm \delta y) &= (x_0 - y_0) \pm (\delta x + \delta y)\end{aligned} \qquad + \text{ e } -\text{: si sommano gli errori assoluti}$$

$$\begin{aligned}(x_0 \pm \alpha\%) \cdot (y_0 \pm \beta\%) &= (x_0 \cdot y_0) \pm (\alpha + \beta)\%\\ (x_0 \pm \alpha\%) \,/\, (y_0 \pm \beta\%) &= (x_0 \,/\, y_0) \pm (\alpha + \beta)\%\end{aligned} \qquad \cdot \text{ e } /\text{: si sommano gli errori relativi}$$

$$(x_0 \pm \alpha\%)^n = x_0^n \pm (n \cdot \alpha)\%$$

$$\sqrt[n]{x_0 \pm \alpha\%} = \sqrt[n]{x_0} \pm \frac{\alpha}{n}\%$$

$$(x_0 \pm \delta x) \cdot k = x_0 \cdot k \pm \delta x \cdot |k|$$

Nota importante
Queste regole hanno una limitazione importante: i due termini delle operazioni aritmetiche devono essere indipendenti. In pratica, se i due termini di un'operazione dipendono da una stessa grandezza affetta da incertezza, allora non è garantito che le formule dello specchietto si applichino a quell'operazione.

Il ruolo dell'indipendenza si capisce bene dall'esercizio seguente.

Esercizio
Sapendo che $x = 4.0 \pm 0.4$, calcola $y = x - \sqrt{x}$.

Soluzione. Risolviamo, intanto, l'esercizio con il metodo dell'intervallo di incertezza, che funziona sempre. Questo procedimento è molto simile ad uno già visto. Per la x abbiamo $3.6 \leqslant x \leqslant 4.4$.

x	3.6	4.0	4.4
$x - \sqrt{x}$	1.703	2.000	2.302

Quindi

$$y = 2.000 \pm \frac{2.302 - 1.703}{2} = 2.0 \pm 0.3$$

□

In questo caso, usare le formule dello specchietto sarebbe un procedimento subottimale — non è corretto, ma produce una stima dell'errore che è più grande di quella giusta (e chiaramente soprastimare l'errore è meglio che sottostimarlo).

PROCEDIMENTO SUBOTTIMALE (sbagliato ma non troppo)

$$x - \sqrt{x} = (4.0 \pm 0.4) - \sqrt{4.0 \pm \underbrace{0.4}_{\pm 10\%}} = (4.0 \pm 0.4) - (2.0 \pm \underbrace{5\%}_{\pm 0.1}) = 2.0 \pm 0.5 \qquad !?!$$

L'errore che ci è venuto non è insensato, ma è un po' più grande del valore giusto 0.3. Perché? Il fatto è, appunto, che le formule per somme e prodotti sono valide sotto l'ipotesi di indipendenza. Nel nostro caso, la stessa x compare nei due addendi di $x - \sqrt{x}$, e questo dà luogo ad un fenomeno di compensazione: se, per esempio, la x è soprastimata, anche $\sqrt{x}$ verrà soprastimata, e nella differenza $x - \sqrt{x}$ un errore compensa l'altro.

Per fortuna, le nostre formule errano, al più, dal lato della prudenza, ossia, usate impropriamente, possono solo produrre una stima dell'incertezza maggiore di quella corretta.

§9.7 Problema inverso

Finora abbiamo propagato le incertezze dei dati fino al risultato. Quando uno pianifica come intenda eseguire una misura, occorre invece seguire il percorso opposto: nota la massima incertezza che possiamo permetterci sul risultato, vogliamo determinare quanto debbano essere accurate le nostre misure. Per questo scopo, la regola delle regole — il metodo dell'intervallo di incertezza — è solitamente meno utile, mentre le regole di propagazione sono facili da usare a marcia indietro: si lasciano indicati gli errori sui dati — che non abbiamo ancora misurato! — e, essendo fissato l'errore sul risultato, si ottiene un'equazione.

Esercizio
Un foglio rettangolare è grossolanamente alto 30 cm e largo 20 cm. Con quale errore assoluto δ devi misurare queste lunghezze se intendi determinare l'area del foglio con un errore di $\pm 1\,\mathrm{cm}^2$?

Soluzione. Calcoliamo, in maniera algebrica, in che modo l'errore sull'area (quello che vogliamo sia $1\,\mathrm{cm}^2$) dipende dall'errore δ sulle lunghezze a, b dei due lati.

$$\begin{aligned} A = \underbrace{(a \pm \delta)}_{\pm \frac{\delta}{a}\cdot 100\%} \cdot \underbrace{(b \pm \delta)}_{\pm \frac{\delta}{b}\cdot 100\%} &= a \cdot b \pm \left(\frac{\delta}{a} \cdot 100 + \frac{\delta}{b} \cdot 100 \right) \% \\ &= a \cdot b \pm \left(\frac{\delta}{a} + \frac{\delta}{b} \right) \cdot ab \\ &= a \cdot b \pm (\delta b + \delta a) = a \cdot b \pm \delta \cdot (a + b) \end{aligned}$$

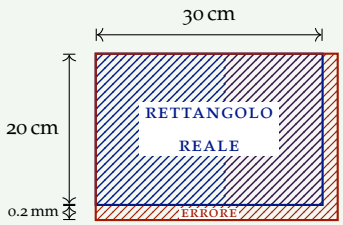
Abbiamo quindi che l'errore ($1\,\mathrm{cm}^2$) deve essere $\delta \cdot (a + b)$.

$$\delta \cdot (a + b) = 1\,\mathrm{cm}^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \delta = \frac{1\,\mathrm{cm}^2}{\underbrace{a + b}_{20\,\mathrm{cm} + 30\,\mathrm{cm}}} \approx \frac{1\,\mathrm{cm}^2}{50\,\mathrm{cm}} = 0.2\,\mathrm{mm}$$

Ora, i lati del rettangolo sono noti con una cifra di precisione, abbiamo quindi determinato l'errore richiesto con una cifra di precisione, che è proprio la precisione desiderata secondo la regola generale per le incertezze. □

Osservazione

Se ci immaginiamo l'effetto di un errore di 0.2 mm sull'area, vediamo che può aggiungere una strisciolina larga 0.2 mm e lunga $(20 + 30)$ cm. L'area di questa strisciolina è appunto $50\,\text{cm} \cdot 0.2\,\text{mm}$ ossia $1\,\text{cm}^2$.



§9.8 Determinazione delle incertezze in un esperimento

Ci sono tre tipi di errori in cui si può incorrere nel contesto di una misura strumentale.

- Sbagli — strumento guasto, adoperato male, &c. Come già detto questi non interessano la teoria degli errori.
- Errori sistematici — termometro che legge 2 gradi sotto la temperatura corretta, bilancia starata, e, in generale, tutti i casi in cui la grandezza misurata differisce da quella reale per un certo scarto costante.

  Nella teoria, assumiamo che gli errori sistematici siano già stati identificati ed eliminati, per esempio aggiungendo due gradi alle letture di quel termometro, sottraendo la tara, &c. Conviene, tuttavia, tenere a mente che gli errori sistematici si manifestano frequentemente.
- Errori casuali inevitabili — causati dagli attriti nei meccanismi, rumore nei circuiti elettronici, difficoltà di stimare la posizione esatta del menisco in un cilindro graduato, &c. Questi sono l'oggetto della teoria.

Alle volte conosciamo immediatamente l'incertezza di una misura. Per esempio, se misuriamo una distanza con un righello, o con un metro, possiamo assumere che l'errore assoluto di questa misura coincida con la distanza fra due tacche successive della scala (un'altra scelta ragionevole, in questa situazione, sarebbe la *semi*distanza). Un altro esempio è quando usiamo uno strumento calibrato o certificato per fornire una determinata accuratezza — occhio: il fatto che, per esempio, un termometro digitale ci mostri la cifra dei decimi di grado NON GARANTISCE che la misura fatta sia accurata entro ± 0.1 K o meno!

Avviene, tuttavia, che non ci sia modo di conoscere l'incertezza di una misura sperimentale se non ricorrendo, a sua volta, all'esperimento: ripetendo la misura e osservando la dispersione dei risultati. In questo caso servono alcune nozioni di statistica: ce ne occuperemo nel capitolo 19.

§9.9 Esercizi

Test 42 (soluzione a p. 263)
Converti in errore relativo 24 ± 1.

Test 43 (soluzione a p. 263)
Converti $60.0 \pm 2\%$ in errore assoluto.

Test 44 (soluzione a p. 264)
Calcola $(10.0 \pm 0.3) - (5.0 \pm 0.1)$ con l'errore assoluto.

Test 45 (soluzione a p. 264)
Calcola $(20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ indicando l'errore assoluto.

Test 46 (soluzione a p. 264)
Calcola $(10.0 \pm 0.2)/(5.0 \pm 0.1)$ con l'errore assoluto.

Test 47 (soluzione a p. 264)
Calcola $(2.00 \pm 0.02)^2$ indicando l'errore assoluto.

Esercizio 48 (soluzione a p. 265)
La formula che lega il periodo di oscillazione T di un pendolo alla lunghezza L del medesimo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

dove $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ rappresenta l'accelerazione di gravità. Calcola il periodo di oscillazione di un pendolo lungo $(100.0 \pm 1.0)\,\mathrm{cm}$. Scrivi il risultato in millisecondi, indicando l'errore assoluto.

Esercizio 49 (soluzione a p. 266)
L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga $50\,\mathrm{cm} \pm 2\%$ e un cateto $30\,\mathrm{cm} \pm 5\%$. Calcola il secondo cateto indicando l'errore percentuale.

Esercizio 50 (soluzione a p. 266)
Un tecnico dispone di un cilindro graduato con l'accuratezza di $\pm 0.5\,\mathrm{mL}$ e di una bilancia che ha un'accuratezza di $\pm 100\,\mathrm{mg}$. Egli determina la densità di un liquido misurandone $10\,\mathrm{mL}$, che risultano pesare $9.2\,\mathrm{g}$.

1. Determina la densità del liquido in $\mathrm{kg/L}$, indicando l'errore percentuale.
2. Che volume di liquido dovrebbe misurare il tecnico per avere un errore di $\pm 2\%$ sulla densità?

Esercizio 51 (soluzione a p. 267)
Il coefficiente di dilatazione termica del rame è di 16.5 parti per milione per kelvin (ossia, scaldando un campione di rame lungo un metro di un grado, questo si allunga di 16.5 µm). Una barra di rame è lunga (2000.00 ± 0.05) mm alla temperatura di (25.0 ± 0.5) °C. Portata ad una certa temperatura T, misura (2001.45 ± 0.05) mm. Determina T, indicando l'errore assoluto.

Esercizio 52 (soluzione a p. 268)
Uno sperimentatore dispone di un cilindro graduato avente l'accuratezza di ±0.5 mL. Con questo strumento, misura 40.0 mL di una soluzione (0.450 ± 0.005) molare di NaOH. Egli aggiunge, poi, acqua distillata fino a portare il livello della soluzione nel cilindro a 60.0 mL. Determina la molarità della soluzione risultante, indicando l'errore assoluto su questo risultato.

Esercizio 53 (soluzione a p. 269)
Partendo da (33.0 ± 0.5) mL di una soluzione (0.050 ± 0.001) molare di NaCl, aggiungiamo acqua distillata fino a ottenere (100.0 ± 0.5) mL di soluzione. Calcolane la molarità indicando l'errore assoluto. Il risultato cambierebbe se partissimo da (67.0 ± 0.5) mL di acqua distillata e aggiungessimo la soluzione (0.050 ± 0.001) molare di NaCl fino a raggiungere (100.0 ± 0.5) mL?

Esercizio 54 (soluzione a p. 271)
Una capsula ha la forma di un corpo centrale cilindrico terminato, su ciascuna delle basi, da una semisfera. Il diametro del cilindretto, e, di conseguenza, delle due semisfere, è (7.0 ± 0.2) mm, mentre la sua lunghezza è (17.0 ± 0.5) mm. Determina il volume della capsula in mL indicando l'errore relativo.

Esercizio 55 (soluzione a p. 272)
Si vuole preparare una soluzione di NaOH con la concentrazione di 0.2000 moli per litro di soluzione. Per farlo, si riempie un matraccio tarato da (100.00 ± 0.08) mL con l'opportuna quantità di NaOH, pesata usando una bilancia che ha l'accuratezza di ±0.01 g, e acqua distillata. Una mole di NaOH pesa 39.9971 g.

1. Quanti grammi di soluto è necessario pesare?
2. Che errore assoluto abbiamo sulla concentrazione della soluzione?
3. Usando una bilancia più precisa, sarebbe possibile ottenere un errore di ±0.0001 moli al litro?

Esercizio 56 (soluzione a p. 273)
Si desidera preparare una soluzione di NaCl alla concentrazione di 9 g/L, con un errore non superiore a ± 0.2 g/L. Allo scopo, si scioglie l'opportuna quantità di sale per formare 100 mL di soluzione, misurati con un cilindro graduato avente l'accuratezza di ± 0.5 mL. Determina il massimo errore assoluto tollerabile sul peso del soluto.

Esercizio 57 (soluzione a p. 274)
Si possiede una soluzione (0.1000 ± 0.0005) molare di NaCl. Si vorrebbero preparare $3.50 \cdot 10^{-2}$ moli di NaCl con una tolleranza massima di 0.5 millimoli. Che volume di soluzione è necessario misurare, e qual è la massima tolleranza ammessa su questa misura?

e quindi

$$x_0 = \frac{1}{x_1} = \frac{26}{149}$$

Il candidato è dunque $b = 149$ votanti. Prima di crederci, però, va verificato su tutte le percentuali: moltiplico ciascuna per 149 e controllo di ottenere, ogni volta, un numero intero a meno dell'arrotondamento.

$$\begin{array}{rrrcr} 0.1745 & \times 149 = & 26.00 & \approx & 26 \\ 0.1342 & \times 149 = & 20.00 & \approx & 20 \\ 0.1208 & \times 149 = & 18.00 & \approx & 18 \\ 0.0738 & \times 149 = & 11.00 & \approx & 11 \\ 0.0604 & \times 149 = & 9.00 & \approx & 9 \\ 0.0537 & \times 149 = & 8.00 & \approx & 8 \\ 0.0470 & \times 149 = & 7.00 & \approx & 7 \\ 0.0336 & \times 149 = & 5.01 & \approx & 5 \\ 0.0268 & \times 149 = & 3.99 & \approx & 4 \end{array}$$

Funziona. Contando anche i doppioni, i voti sono

$$26 + 26 + 20 + 18 + 11 + 9 + 8 + 8 + 7 + 7 + 5 + 4 = 149$$

e il totale torna esattamente, che è la controprova decisiva. (Il sondaggio, insomma, è basato su centoquarantanove voti: un campione del tutto inadeguato alla precisione con cui sono espresse le percentuali. L'autore di `www.tuttosulgossip.it` avrebbe fatto meglio ad arrotondare all'unità.)

> **Test 42** (p. 59)
> Converti in errore relativo 24 ± 1.

Soluzione.

$$\frac{1}{24} \cdot 100 \approx 4.17 \qquad \Longrightarrow \qquad 24 \pm \underbrace{1}_{\pm 4.17\%} = 24 \pm 4\%$$

(L'errore relativo è un'incertezza come le altre: si arrotonda a una cifra significativa.)

> **Test 43** (p. 59)
> Converti $60.0 \pm 2\%$ in errore assoluto.

Soluzione.

$$60.0 \pm \underbrace{2\%}_{60.0 \cdot \frac{2}{100}} = 60.0 \pm 1.2$$

L'errore comincia con la cifra 1: lo teniamo a due cifre significative, e il valore resta arrotondato ai decimi.

Test 44 (p. 59)
Calcola $(10.0 \pm 0.3) - (5.0 \pm 0.1)$ con l'errore assoluto.

Soluzione.

$$(10.0 \pm 0.3) - (5.0 \pm 0.1) = 5.0 \pm \underbrace{0.4}_{0.3+0.1}$$

Nella differenza gli errori assoluti si sommano.

Test 45 (p. 59)
Calcola $(20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ indicando l'errore assoluto.

Soluzione. Per risolvere questo esercizio con la regola per i prodotti è necessario prima convertire gli errori assoluti in errori relativi, calcolare l'errore relativo sul risultato, ed infine eseguire la conversione opposta.

$$\underbrace{(20.0 \pm 0.4)}_{\pm 2\%} \cdot \underbrace{(7.5 \pm 0.3)}_{\pm 4\%} = 150.0 \pm \underbrace{6}_{2+4}\,\% = 150.0 \pm \underbrace{9.0}_{150 \cdot \frac{6}{100}} = 150 \pm 9$$

L'ultimo passaggio è l'arrotondamento corretto.

Avremmo anche potuto seguire il metodo dell'intervallo di incertezza. Posto $y = (20.0 \pm 0.4) \cdot (7.5 \pm 0.3)$ otteniamo

$$\underbrace{141.12}_{19.6 \cdot 7.2} \leqslant y \leqslant \underbrace{159.12}_{20.4 \cdot 7.8} \qquad \Longrightarrow \qquad y = 150 \pm \frac{159.12 - 141.12}{2} = 150 \pm 9$$

Notiamo che anche usando la formula sconsigliata $y_0 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ avremmo ottenuto $y_0 = \frac{159.12+141.12}{2} = 150.12$, che si arrotonda a 150.

Test 46 (p. 59)
Calcola $(10.0 \pm 0.2)/(5.0 \pm 0.1)$ con l'errore assoluto.

Soluzione.

$$\frac{10.0 \pm \overbrace{0.2}^{\pm 2\%}}{5.0 \pm \underbrace{0.1}_{\pm 2\%}} = 2.00 \pm \underbrace{4}_{2+2}\,\% = 2.00 \pm \underbrace{0.08}_{2.00 \cdot \frac{4}{100}} = 2.00 \pm 0.08$$

Verifica col metodo dell'intervallo: il quoziente va da $9.8/5.1 = 1.9216$ a $10.2/4.9 = 2.0816$, e la semidifferenza è 0.08.

Test 47 (p. 59)
Calcola $(2.00 \pm 0.02)^2$ indicando l'errore assoluto.

Soluzione.

$$\left(2.00 \pm \underbrace{0.02}_{\pm 1\%}\right)^2 = 4.00 \pm \underbrace{2}_{2 \cdot 1}\,\% = 4.00 \pm \underbrace{0.08}_{4.00 \cdot \frac{2}{100}}$$

Verifica col metodo dell'intervallo: $1.98^2 = 3.9204$ e $2.02^2 = 4.0804$, la semidifferenza è 0.08.

Esercizio 48 (p. 59)
La formula che lega il periodo di oscillazione T di un pendolo alla lunghezza L del medesimo è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

dove $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ rappresenta l'accelerazione di gravità. Calcola il periodo di oscillazione di un pendolo lungo $(100.0 \pm 1.0)\,\mathrm{cm}$. Scrivi il risultato in millisecondi, indicando l'errore assoluto.

Soluzione. L'unico dato incerto è la lunghezza, che compare una volta sola; 2π è esatto, e g è dato senza incertezza (lo trattiamo come esatto). Bastano quindi le regole per prodotti, quozienti e potenze.

Il valore centrale, con $L = 100.0\,\mathrm{cm} = 1.000\,\mathrm{m}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{1.000\,\mathrm{m}}{9.81\,\mathrm{m/s^2}}} = 2\pi\sqrt{0.101937\,\mathrm{s^2}} = 2\pi \cdot 0.319275\,\mathrm{s} = 2.00607\,\mathrm{s} = 2006.07\,\mathrm{ms}$$

(i metri si semplificano, e resta la radice di secondi al quadrato, cioè secondi.) Molti ricordano che il *pendolo che batte il secondo*, ossia quello che attraversa la verticale ogni secondo e ha quindi un periodo di due secondi, è lungo quasi esattamente un metro.

L'errore relativo della lunghezza è

$$L = 100.0\,\mathrm{cm} \pm \frac{1.0}{100.0} \cdot 100\% = 100.0\,\mathrm{cm} \pm 1.0\%$$

Dividere per g, che è esatto, non cambia l'errore relativo; la radice quadrata dimezza l'errore relativo; moltiplicare per 2π non lo cambia:

$$T = 2006.07\,\mathrm{ms} \pm \tfrac{1}{2} \cdot 1.0\% = 2006.07\,\mathrm{ms} \pm 0.50\% = (2006.07 \pm 10.03)\,\mathrm{ms}$$

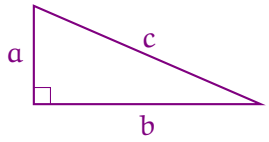
L'errore comincia con la cifra 1, quindi lo arrotondiamo a due cifre significative, 10 ms, e il valore alla stessa cifra, quella delle unità:

$$T = (2006 \pm 10)\,\mathrm{ms}$$

Verifica col metodo dell'intervallo: con $L = 99.0\,\mathrm{cm}$ si ha $T = 1996.01\,\mathrm{ms}$, con $L = 101.0\,\mathrm{cm}$ si ha $T = 2016.07\,\mathrm{ms}$; la semidifferenza è $10.03\,\mathrm{ms}$, come sopra.

Esercizio 49 (p. 59)
L'ipotenusa di un triangolo rettangolo è lunga 50 cm ± 2% e un cateto 30 cm ± 5%. Calcola il secondo cateto indicando l'errore percentuale.

Soluzione.



Denotando l'ipotenusa con c ed il cateto dato con a, calcoliamo il secondo cateto b usando il teorema di Pitagora.

$$
\begin{aligned}
b = \sqrt{c^2 - a^2} &= \sqrt{(50\,\text{cm} \pm 2\%)^2 - (30\,\text{cm} \pm 5\%)^2} \\
&= \sqrt{(2500\,\text{cm}^2 \pm \underbrace{4}_{2\cdot 2}\,\%) - (900\,\text{cm}^2 \pm \underbrace{10}_{2\cdot 5}\,\%)} && \text{regola per le potenze} \\
&= \sqrt{(2500 \pm \underbrace{100}_{2500\cdot\frac{4}{100}})\,\text{cm}^2 - (900 \pm \underbrace{90}_{900\cdot\frac{10}{100}})\,\text{cm}^2} && \text{passo a errore assoluto per poter fare la differenza} \\
&= \sqrt{(1600 \pm \underbrace{190}_{100+90})\,\text{cm}^2} && \text{regola per le somme alg.} \\
&= \sqrt{1600\,\text{cm}^2 \pm \underbrace{12}_{\frac{190}{1600}\cdot 100}\,\%} && \text{passo a e. rel. per applicare la regola per le radici} \\
&= 40\,\text{cm} \pm 6\% && \tfrac{12}{2}\text{: regola per le radici}
\end{aligned}
$$

Esercizio 50 (p. 59)
Un tecnico dispone di un cilindro graduato con l'accuratezza di ±0.5 mL e di una bilancia che ha un'accuratezza di ±100 mg. Egli determina la densità di un liquido misurandone 10 mL, che risultano pesare 9.2 g.

1. Determina la densità del liquido in kg/L, indicando l'errore percentuale.
2. Che volume di liquido dovrebbe misurare il tecnico per avere un errore di ±2% sulla densità?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. La densità è la massa divisa per il volume:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{9.2\,\text{g}}{10\,\text{mL}} = 0.92\,\frac{\text{g}}{\text{mL}} = 0.92\,\frac{\text{kg}}{\text{L}}$$

($1\,\text{kg/L} = 10^3\,\text{g}/10^3\,\text{mL} = 1\,\text{g/mL}$.) È un quoziente, e ciascun dato compare una volta sola: gli errori relativi si sommano.

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{0.5\,\text{mL}}{10\,\text{mL}} = 5\% \qquad \frac{\delta m}{m} = \frac{0.1\,\text{g}}{9.2\,\text{g}} \approx 1.09\%$$

$$\rho = 0.92\,\text{kg/L} \pm (5\% + 1.09\%) = 0.92\,\text{kg/L} \pm 6.09\% = 0.92\,\text{kg/L} \pm 6\%$$

□

Soluzione della domanda 2. Se il tecnico misura un volume V, la massa sarà $m = \rho V$, cioè $m = 0.92\,\mathrm{g/mL} \cdot V$, e l'errore relativo sulla densità

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = \frac{0.5\,\mathrm{mL}}{V} + \frac{0.1\,\mathrm{g}}{0.92\,\mathrm{g/mL} \cdot V} = \frac{0.5\,\mathrm{mL} + 0.109\,\mathrm{mL}}{V} = \frac{0.609\,\mathrm{mL}}{V}$$

Vogliamo che non superi il 2%:

$$\frac{0.609\,\mathrm{mL}}{V} \leqslant 0.02 \qquad \Longrightarrow \qquad V \geqslant \frac{0.609\,\mathrm{mL}}{0.02} = 30.45\,\mathrm{mL}$$

Il tecnico deve misurare non meno di 30 mL di liquido.

Più grande è il volume, minore è l'incertezza sul risultato, quindi al tecnico converrebbe, potendo, tenersi un po' di margine: per esempio potrebbe misurare 50 mL di liquido, se li ha e il cilindro graduato non è troppo piccolo. Con 30 mL, assumendo la densità di 0.92 kg/L esatta — ma non lo è — otterrebbe un'incertezza di $1.67\% + 0.36\% = 2.03\%$: impercettibilmente superiore al 2%, e del tutto accettabile. □

> **Esercizio 51** (p. 60)
> Il coefficiente di dilatazione termica del rame è di 16.5 parti per milione per kelvin (ossia, scaldando un campione di rame lungo un metro di un grado, questo si allunga di 16.5 µm). Una barra di rame è lunga (2000.00 ± 0.05) mm alla temperatura di (25.0 ± 0.5) °C. Portata ad una certa temperatura T, misura (2001.45 ± 0.05) mm. Determina T, indicando l'errore assoluto.

Soluzione. Chiamiamo α il coefficiente di dilatazione, L_0 la lunghezza alla temperatura T_0, e L la lunghezza alla temperatura T:

$$\alpha = 16.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}} \qquad L_0 = (2000.00 \pm 0.05)\,\mathrm{mm}$$
$$T_0 = (25.0 \pm 0.5)\,^\circ\mathrm{C} \qquad L = (2001.45 \pm 0.05)\,\mathrm{mm}$$

L'allungamento è proporzionale alla lunghezza e alla variazione di temperatura, quindi

$$L - L_0 = \alpha\, L_0\, (T - T_0) \qquad \Longrightarrow \qquad T = T_0 + \frac{L - L_0}{\alpha\, L_0}$$

(prendiamo α come esatto: il testo non ne dà l'incertezza). Con i valori centrali otteniamo

$$\alpha\, L_0 = 16.5 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{K^{-1}} \cdot 2000.00\,\mathrm{mm} = 0.0330\,\mathrm{mm/K}$$
$$T = 25.0\,^\circ\mathrm{C} + \frac{1.45\,\mathrm{mm}}{0.0330\,\mathrm{mm/K}} = 25.0\,^\circ\mathrm{C} + 43.94\,\mathrm{K} = 68.94\,^\circ\mathrm{C}$$

Il risultato è plausibile: una barra di due metri si allunga di $2 \cdot 16.5\,\mu\mathrm{m} = 33\,\mu\mathrm{m}$ per grado, che è come dire 0.1 mm ogni tre gradi. L'allungamento misurato è 1.45 mm, cioè $14.5 \approx 15$ volte 0.1 mm: siccome $15 \cdot 3 = 45$, ci aspettiamo una differenza di temperatura di circa 45 gradi.

Quanto all'incertezza, T_0 è un addendo indipendente dal resto, e lo tratteremo alla fine con gli errori assoluti. Nella frazione $\Delta T = (L - L_0)/(\alpha L_0)$, invece, L_0 compare due volte, e le regole non sono garantite: vediamo quindi due strade.

Nella prima, il metodo dell'intervallo di incertezza, calcoliamo ΔT, in kelvin, in tutte le combinazioni degli estremi degli intervalli di incertezza di L_0 e L

	$L = 2001.40\,\text{mm}$	$L = 2001.50\,\text{mm}$
$L_0 = 1999.95\,\text{mm}$	$\dfrac{2001.40 - 1999.95}{\alpha \cdot 1999.95} = 43.940$	$\dfrac{2001.50 - 1999.95}{\alpha \cdot 1999.95} = 46.971$
$L_0 = 2000.05\,\text{mm}$	$\dfrac{2001.40 - 2000.05}{\alpha \cdot 2000.05} = 40.908$	$\dfrac{2001.50 - 2000.05}{\alpha \cdot 2000.05} = 43.938$

da cui

$$\Delta T = \left(43.94 \pm \frac{46.971 - 40.908}{2}\right) \text{K} = (43.94 \pm 3.03)\,\text{K}$$

La seconda strada è riscrivere la formula in modo che ogni dato vi compaia una volta sola,

$$\Delta T = \frac{L - L_0}{\alpha L_0} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{L}{L_0} - 1\right)$$

e applicare le regole. Per il quoziente sommiamo gli errori relativi

$$\frac{L}{L_0} = \frac{2001.45}{2000.00} \pm \left(\frac{0.05}{2001.45} + \frac{0.05}{2000.00}\right) = 1.000725 \pm (0.0025\% + 0.0025\%)$$

ossia

$$\frac{L}{L_0} = 1.000725 \pm 0.005\% = 1.000725 \pm 0.00005$$

Siccome il numero 1 è esatto, nella differenza l'errore assoluto resta lo stesso, e dividendo per α, anch'esso esatto, si divide anche l'errore:

$$\frac{L}{L_0} - 1 = 0.000725 \pm 0.00005$$

$$\Delta T = \frac{0.000725 \pm 0.00005}{16.5 \cdot 10^{-6}}\,\text{K} = (43.94 \pm 3.03)\,\text{K}$$

che è il risultato della prima strada.

Infine aggiungiamo T_0, sommando gli errori assoluti:

$$T = (25.0 \pm 0.5)\,^\circ\text{C} + (43.94 \pm 3.03)\,\text{K} = (68.94 \pm 3.53)\,^\circ\text{C}$$

e, arrotondando l'errore a una cifra significativa e il valore alla stessa cifra,

$$T = (69 \pm 4)\,^\circ\text{C}$$

Se avessimo calcolato l'incertezza direttamente usando le formule di propagazione, avremmo ottenuto il medesimo risultato. Questo perché l'errore relativo di L_0 al denominatore è appena 0.0025%, quindi, nel calcolo, può essere trascurato. Se trattiamo il denominatore L_0 come costante, allora ogni parametro compare una volta sola nella formula, quindi è giustificato usare le formule di propagazione. Usarle, però, senza esplicitare questa osservazione, sarebbe un procedimento scorretto.

Esercizio 52 (p. 60)
Uno sperimentatore dispone di un cilindro graduato avente l'accuratezza di $\pm 0.5\,\text{mL}$. Con questo strumento, misura 40.0 mL di una soluzione (0.450 ± 0.005) molare di NaOH. Egli aggiunge, poi, acqua distillata fino a portare il livello della soluzione nel cilindro a 60.0 mL. Determina la molarità della soluzione risultante,

indicando l'errore assoluto su questo risultato.

Soluzione. La diluizione non cambia le moli di NaOH, ma solo il volume in cui sono sciolte. Indichiamo con c_0 la molarità di partenza, con V_1 il volume di soluzione misurato e con V_f il volume finale: le moli di NaOH sono $c_0 V_1$, e quindi la molarità finale è

$$c = \frac{c_0 V_1}{V_f} = \frac{0.450\,\text{mol/L} \cdot 40.0\,\text{mL}}{60.0\,\text{mL}} = 0.300\,\frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

(i millilitri si semplificano).

Ciascuno dei tre dati compare una volta sola, e c è ottenuto mediante un prodotto e un quoziente, quindi possiamo sommare gli errori relativi

$$\frac{0.005}{0.450} \approx 1.11\% \qquad \frac{0.5}{40.0} = 1.25\% \qquad \frac{0.5}{60.0} \approx 0.83\%$$

da cui

$$c = 0.300\,\text{mol/L} \pm (1.11\% + 1.25\% + 0.83\%) = 0.300\,\text{mol/L} \pm 3.19\%$$

Moltiplicando per il valore centrale otteniamo l'errore assoluto

$$0.300 \cdot 0.03194 \approx 0.00958\,\text{mol/L}$$

Arrotondato a una cifra significativa questo diventa 0.01, e siccome la cifra è un 1 ne teniamo due, 0.010, e arrotondiamo il valore alla stessa cifra, i millesimi:

$$c = (0.300 \pm 0.010)\,\text{mol/L}$$

Esercizio 53 (p. 60)
Partendo da (33.0 ± 0.5) mL di una soluzione (0.050 ± 0.001) molare di NaCl, aggiungiamo acqua distillata fino a ottenere (100.0 ± 0.5) mL di soluzione. Calcolane la molarità indicando l'errore assoluto. Il risultato cambierebbe se partissimo da (67.0 ± 0.5) mL di acqua distillata e aggiungessimo la soluzione (0.050 ± 0.001) molare di NaCl fino a raggiungere (100.0 ± 0.5) mL?

Soluzione. Aggiungendo acqua la quantità di NaCl resta la stessa, e cambia solo il volume in cui è sciolta. Chiamiamo c_0 la molarità di partenza, V_1 il volume di soluzione di partenza e V_f il volume finale: le moli di NaCl sono $c_0 V_1$, quindi la molarità finale è

$$c = \frac{c_0 V_1}{V_f} = \frac{0.050\,\text{mol/L} \cdot 33.0\,\text{mL}}{100.0\,\text{mL}} = 0.0165\,\frac{\text{mol}}{\text{L}}$$

(i millilitri si semplificano: non serve convertirli in litri).

Per l'incertezza osserviamo che c è un prodotto e un quoziente di tre dati misurati indipendentemente l'uno dall'altro, quindi ci basta sommare gli errori relativi

$$\frac{0.001}{0.050} = 2.0\% \qquad \frac{0.5}{33.0} \approx 1.52\% \qquad \frac{0.5}{100.0} = 0.50\%$$

da cui

$$c = 0.0165\,\text{mol/L} \pm (2.0\% + 1.52\% + 0.50\%) = 0.0165\,\text{mol/L} \pm 4.02\%$$

L'errore assoluto è $0.0165 \cdot 0.0402 \approx 0.00066\,\text{mol/L}$. Arrotondando l'errore a una cifra significativa, e il valore alla stessa cifra decimale, otteniamo

$$c = (0.0165 \pm 0.0007)\,\text{mol/L}$$

Nel secondo procedimento il volume di soluzione di partenza non è misurato direttamente, ma è la differenza fra il volume finale e quello dell'acqua, $V_1 = V_f - V_a$, con $V_a = (67.0 \pm 0.5)\,\text{mL}$ — supponiamo che i volumi si sommino: per una soluzione così diluita la contrazione è di qualche decimo di microlitro (con acqua e alcol etilico, per esempio, non sarebbe così: 50 mL più 50 mL fanno circa 97 mL). Il valore centrale è lo stesso, perché $100.0 - 67.0 = 33.0$, ma adesso

$$c = c_0 \cdot \frac{V_f - V_a}{V_f}$$

e V_f compare due volte: numeratore e denominatore non sono indipendenti, e le regole per somme e prodotti non sono garantite. Procediamo quindi in due modi.

Il primo è quello dell'intervallo di incertezza. Il dato c_0 è un fattore indipendente dagli altri, e lo tratteremo alla fine con gli errori relativi, mentre per la frazione $\varphi = (V_f - V_a)/V_f$ usiamo la regola generale: calcoliamo φ in tutte le combinazioni degli estremi degli intervalli di incertezza di V_a e V_f, e prendiamo il minimo e il massimo.

	$V_f = 99.5\,\text{mL}$	$V_f = 100.5\,\text{mL}$
$V_a = 66.5\,\text{mL}$	$\frac{99.5 - 66.5}{99.5} = 0.33166$	$\frac{100.5 - 66.5}{100.5} = 0.33831$
$V_a = 67.5\,\text{mL}$	$\frac{99.5 - 67.5}{99.5} = 0.32161$	$\frac{100.5 - 67.5}{100.5} = 0.32836$

Quindi

$$\varphi = 0.33000 \pm \frac{0.33831 - 0.32161}{2} = 0.33000 \pm 0.00835 = 0.33000 \pm 2.53\%$$

Nel secondo modo trasformiamo la formula con una piccola manipolazione,

$$c = c_0 \cdot \frac{V_f - V_a}{V_f} = c_0 \left(1 - \frac{V_a}{V_f}\right)$$

e così ciascun dato compare una volta sola, e possiamo applicare le regole. Per il quoziente abbiamo

$$\frac{V_a}{V_f} = \frac{67.0}{100.0} \pm \left(\frac{0.5}{67.0} + \frac{0.5}{100.0}\right) = 0.670 \pm (0.75\% + 0.50\%)$$

ossia

$$\frac{V_a}{V_f} = 0.670 \pm 1.25\% = 0.670 \pm 0.00835$$

Il numero 1 è esatto, quindi nella differenza l'errore assoluto resta lo stesso

$$1 - \frac{V_a}{V_f} = 0.330 \pm 0.00835 = 0.330 \pm 2.53\%$$

come col primo modo.

In entrambi i casi resta da moltiplicare per c_0, e sommando gli errori relativi troviamo

$$c = 0.0165\,\text{mol/L} \pm (2.0\% + 2.53\%) = 0.0165\,\text{mol/L} \pm 4.53\%$$

ossia $c = (0.0165 \pm 0.00075)\,\text{mol/L}$ (l'errore assoluto, con più cifre, è 0.000747), che arrotondato dà di nuovo

$$c = (0.0165 \pm 0.0007)\,\text{mol/L}$$

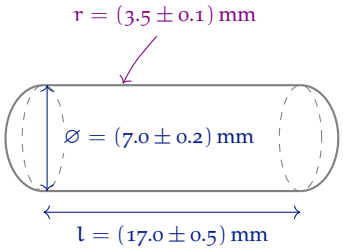
Il risultato arrotondato, quindi, non cambia: il valore centrale è lo stesso, e l'errore cresce di poco, dal 4.0% al 4.5%, troppo poco perché l'arrotondamento lo mostri.

L'errore cresce così poco, anche se V_1 viene da una differenza e ha quindi un errore doppio, $\pm 1.0\,\text{mL}$, perché gli errori in parte si compensano: se V_f è un po' più grande del previsto, abbiamo aggiunto un po' più di soluzione, ma l'abbiamo anche diluita in un volume un po' più grande. Se applicassimo le regole per somme e prodotti senza badare al fatto che V_f compare due volte, con $V_1 = (33.0 \pm 1.0)\,\text{mL}$ ($\pm 3.03\%$), troveremmo $\pm 5.5\%$, ossia $\pm 0.0009\,\text{mol/L}$: una stima pessimistica, non assurda, ma più grande del necessario.

Esercizio 54 (p. 60)
Una capsula ha la forma di un corpo centrale cilindrico terminato, su ciascuna delle basi, da una semisfera. Il diametro del cilindretto, e, di conseguenza, delle due semisfere, è $(7.0 \pm 0.2)\,\text{mm}$, mentre la sua lunghezza è $(17.0 \pm 0.5)\,\text{mm}$. Determina il volume della capsula in mL indicando l'errore relativo.

Soluzione.

La capsula è costituita da un cilindro e due semisfere. Chiamando l la lunghezza del cilindro e r il raggio, che è lo stesso per il cilindro e le due semisfere, abbiamo la seguente formula per il volume



$$V = \underbrace{\pi r^2 l}_{\text{cilindro}} + \underbrace{\tfrac{4}{3}\pi r^3}_{\text{sfera = due semisfere}} = \pi r^2 \left(l + \tfrac{4}{3} r\right)$$

Da cui

$$V = 833.83\,\text{mm}^3 = 0.83383\,\text{mL}$$

$$\left(\; 1\,\text{mL} = 10^{-3}\,\text{L} = 10^{-3}\,\text{dm}^3 = 10^{-3}(10^2\,\text{mm})^3 = 10^3\,\text{mm}^3 \; \right)$$

Per stimare l'incertezza, calcoliamo il massimo e il minimo volume dell'intervallo di incertezza, che corrispondono a $r_{max} = 3.6\,\text{mm}$, $l_{max} = 17.5\,\text{mm}$ e $r_{min} = 3.4\,\text{mm}$, $l_{min} = 16.5\,\text{mm}$ rispettivamente.

$$V_{max} = 0.90795\,\text{mL} \qquad V_{min} = 0.76386\,\text{mL}$$

$$\frac{V_{max} - V_{min}}{2} = 0.07204\,\text{mL} \qquad \text{la seconda cifra non è nulla}$$

L'approssimazione corretta del volume è quindi alla seconda cifra decimale, e l'errore percentuale vale

$$\frac{0.07204}{0.83383} \cdot 100\% \approx 9\%$$

di conseguenza

$$V = 0.83\,\text{mL} \pm 9\%$$

Esercizio 55 (p. 60)
Si vuole preparare una soluzione di NaOH con la concentrazione di 0.2000 moli per litro di soluzione. Per farlo, si riempie un matraccio tarato da $(100.00 \pm 0.08)\,\text{mL}$ con l'opportuna quantità di NaOH, pesata usando una bilancia che ha l'accuratezza di $\pm 0.01\,\text{g}$, e acqua distillata. Una mole di NaOH pesa 39.9971 g.

1. Quanti grammi di soluto è necessario pesare?
2. Che errore assoluto abbiamo sulla concentrazione della soluzione?
3. Usando una bilancia più precisa, sarebbe possibile ottenere un errore di ± 0.0001 moli al litro?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Per ottenere la concentrazione richiesta, nel matraccio ci servono

$$n = 0.2000\,\text{mol/L} \cdot 0.10000\,\text{L} = 0.02000\,\text{mol}$$

di NaOH, che corrispondono a

$$m = 0.02000\,\text{mol} \cdot 39.9971\,\text{g/mol} = 0.79994\,\text{g}$$

Siccome la bilancia legge i centesimi di grammo, pesiamo 0.80 g. □

Soluzione della domanda 2. La concentrazione è il quoziente $c = m/(M\,V)$, dove la massa molare M è esatta — per quanto ci riguarda — e ogni dato compare una volta sola, quindi gli errori relativi si sommano.

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{0.01\,\text{g}}{0.80\,\text{g}} = 1.25\% \qquad \frac{\delta V}{V} = \frac{0.08\,\text{mL}}{100.00\,\text{mL}} = 0.08\%$$

$$c = 0.2000\,\text{mol/L} \pm (1.25\% + 0.08\%) = 0.2000\,\text{mol/L} \pm 1.33\%$$

In assoluto l'errore è $0.2000 \cdot 0.0133 = 0.00266\,\text{mol/L}$, e quindi

$$c = (0.200 \pm 0.003)\,\text{mol/L}$$

□

Soluzione della domanda 3. Non è possibile, perché anche con una bilancia perfetta resterebbe l'errore del matraccio, lo 0.08%, ossia

$$0.2000\,\text{mol/L} \cdot 0.0008 = 0.00016\,\text{mol/L}$$

che è già più di 0.0001 mol/L. □

> **Esercizio 56** (p. 61)
> Si desidera preparare una soluzione di NaCl alla concentrazione di 9 g/L, con un errore non superiore a ±0.2 g/L. Allo scopo, si scioglie l'opportuna quantità di sale per formare 100 mL di soluzione, misurati con un cilindro graduato avente l'accuratezza di ±0.5 mL. Determina il massimo errore assoluto tollerabile sul peso del soluto.

Soluzione. La concentrazione è la massa di sale divisa per il volume di soluzione, $c = m/V$, quindi il valore centrale della massa da sciogliere è

$$m = c\,V = 9\,\text{g/L} \cdot 0.100\,\text{L} = 0.90\,\text{g}$$

Nella formula $c = m/V$ i due dati m e V compaiono una volta sola ciascuno, e per l'incertezza possiamo usare la regola dei quozienti, ossia sommare gli errori relativi

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{\delta m}{m} + \frac{\delta V}{V}$$

Vogliamo che l'errore su c non superi ±0.2 g/L, che, espresso come errore relativo, è

$$\frac{\delta c}{c} \leqslant \frac{0.2}{9} \approx 2.22\%$$

Il volume è misurato con accuratezza ±0.5 mL su 100 mL, e quindi

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{0.5}{100} = 0.50\%$$

Sottraendo troviamo il massimo errore relativo che possiamo permetterci sulla massa

$$\frac{\delta m}{m} \leqslant 2.22\% - 0.50\% = 1.72\%$$

che corrisponde a un errore assoluto di

$$\delta m \leqslant 1.72\% \cdot 0.90\,\text{g} \approx 0.0155\,\text{g}$$

Il massimo errore assoluto tollerabile sul peso del soluto è dunque circa

$$\delta m = 0.015\,\text{g}$$

ossia una quindicina di milligrammi (per prudenza, arrotondiamo per difetto: con 0.015 g si resta dentro la tolleranza, con 0.016 la si supererebbe).

Esercizio 57 (p. 61)
Si possiede una soluzione (0.1000 ± 0.0005) molare di NaCl. Si vorrebbero preparare $3.50 \cdot 10^{-2}$ moli di NaCl con una tolleranza massima di 0.5 millimoli. Che volume di soluzione è necessario misurare, e qual è la massima tolleranza ammessa su questa misura?

Soluzione. In un volume V di soluzione di molarità c ci sono $n = c\,V$ moli di NaCl. Noi vogliamo $n = 3.50 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol}$, quindi il volume da misurare è

$$V = \frac{n}{c} = \frac{3.50 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{mol}}{0.1000\,\mathrm{mol/L}} = 0.350\,\mathrm{L} = 350\,\mathrm{mL}$$

Passiamo alla tolleranza. La formula $n = c\,V$ è il prodotto di due quantità indipendenti — c, nota, e V, che misuriamo — ciascuna delle quali compare una volta sola, quindi gli errori relativi si sommano:

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{\delta c}{c} + \frac{\delta V}{V}$$

La tolleranza richiesta su n è di 0.5 millimoli su 35 millimoli, ossia

$$\frac{\delta n}{n} = \frac{0.5\,\mathrm{mmol}}{35\,\mathrm{mmol}} \approx 1.43\%$$

mentre la molarità di partenza porta già un errore relativo

$$\frac{\delta c}{c} = \frac{0.0005}{0.1000} = 0.50\%$$

Per il volume ci rimane quindi la differenza

$$\frac{\delta V}{V} = 1.43\% - 0.50\% = 0.93\%$$

che su $V = 350\,\mathrm{mL}$, in termini assoluti, vale

$$\delta V = 0.93\% \cdot 350\,\mathrm{mL} \approx 3.25\,\mathrm{mL}$$

Arrotondando per difetto a una cifra significativa, la massima tolleranza ammessa sulla misura del volume è dunque $\pm 3\,\mathrm{mL}$.

Per controllare che i numeri siano ragionevoli, notiamo che 3 mL su 350 mL sono un po' meno dell'1%, e la tolleranza richiesta è di 0.5 mmol su 35 mmol, cioè una parte su settanta: un po' più dell'1%. Questo è atteso, perché l'incertezza sulla concentrazione della soluzione aggiunge uno 0.5%.