§25 Equazioni differenziali

La derivata ha una definizione tecnica — *il limite del rapporto incrementale* — di questa, in questo corso, ci curiamo il giusto. Quello che ci importa è il significato fisico e tecnologico di questo concetto. Siamo partiti da una *interpretazione* del concetto di derivata — la pendenza dei grafici — che permette di usare le derivate per un certo numero di scopi pratici: per esempio capire quale sia il massimo o il minimo valore ottenibile da una certa formula. Non varrebbe la pena di studiare le derivate se la storia finisse qua. L'interpretazione più rilevante è questa:

Nota importante
Data una quantità $f(t)$ dipendente da t, la derivata $f' = \frac{df}{dt}$ è la velocità di variazione di f al variare di t.

Immaginiamo, per esempio, di riempire un serbatoio d'acqua: diciamo che inizialmente contiene 10 litri, e immettiamo acqua tramite un condotto che porta 5 litri al minuto. Il grafico del contenuto del serbatoio sarà la retta

$$\text{contenuto}(t) \;=\; 10\,\text{L} + t \cdot 5\,\text{L/min}$$

La pendenza di questa retta $\frac{d\,\text{contenuto}}{dt} = 5\,\text{L/min}$ è la velocità con cui si immette acqua nel serbatoio. Questo esempio elementare fa capire perché le derivate, che sono pendenze, sono anche velocità di variazione; la potenza dell'analisi, però, è nella possibilità di trattare matematicamente velocità di variazione che non sono costanti. Per esempio, la velocità a cui avviene una reazione chimica dipende dalla concentrazione dei reagenti, e questa, a sua volta, non è costante, ma varia durante la reazione, istante per istante, in funzione della velocità di reazione stessa. Questo gatto che si morde la coda è una specie di equazione che coinvolge quantità variabili — le concentrazioni — e le loro derivate: un'equazione differenziale. Le equazioni differenziali sono il linguaggio della scienza.

Definizione
Un'equazione differenziale è un'equazione funzionale che coinvolge una funzione incognita $f(x)$ e le sue derivate. Un'equazione che coinvolge derivate fino all'n-esima si dice dell'n-esimo ordine.

Grazie. E cos'è un'equazione funzionale, mi stai chiedendo?

Definizione
Un'equazione funzionale è un'equazione la cui incognita non è un singolo numero, bensì un'intera funzione.

L'esercizio 132 (p. 180), che ti invito a risolvere prima di proseguire nella lettura, è un esempio di equazione differenziale.

$$x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$$

Questa è un'equazione del primo ordine, perché la funzione incognita f vi si trova derivata al massimo una volta. Chi conosce l'esercizio sa che tutti i polinomi $f(x) = ax^3 + x^2$ risolvono questa equazione. Per verificarlo basta sostituire $f(x)$ nei due membri e constatare che si ottiene un'identità:

$$\begin{aligned} x^2 + x \cdot \left(ax^3 + x^2\right)' &\stackrel{?}{=} 3 \cdot \left(ax^3 + x^2\right) \\ x^2 + x \cdot \left(3ax^2 + 2x\right) &\stackrel{?}{=} 3ax^3 + 3x^2 \\ \cancel{x^2} + \cancel{3ax^3} + \cancel{2x^2} &\stackrel{?}{=} \cancel{3ax^3} + \cancel{3x^2} \quad \text{OK} \end{aligned}$$

Inoltre si potrebbe dimostrare che non ci sono altre soluzioni. L'espressione $f(x) = ax^3 + x^2$, che rappresenta una famiglia di funzioni parametrizzata dal parametro a, è quindi detta soluzione generale dell'equazione.

La soluzione generale di un'equazione differenziale è sempre una famiglia di funzioni. Dando valori specifici ai parametri si ottengono le diverse soluzioni particolari: ossia i membri della famiglia. Per esempio, l'esercizio chiedeva di trovare la soluzione particolare tale che $f(1) = 0$.

Fatto
La soluzione generale di un'equazione differenziale è sempre una famiglia di funzioni parametrizzata da tante costanti quanto è l'ordine dell'equazione.

Esercizio (l'equazione logistica)
Considera la funzione

$$f(x) = \frac{L}{1 + e^{-k(x - x_0)}}$$

dove L, k e x_0 sono parametri fissati. Verifica che f risolve l'equazione differenziale

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{k}{L} f(x) \left(L - f(x)\right)$$

Soluzione. Al membro di sinistra abbiamo

$$\frac{d}{dx} f(x) = \left(\frac{L}{1 + e^{-k(x - x_0)}}\right)' = \frac{-L \cdot \left(1 + e^{-k(x - x_0)}\right)'}{\left(1 + e^{-k(x - x_0)}\right)^2} = \frac{L \cdot k \cdot e^{-k(x - x_0)}}{\left(1 + e^{-k(x - x_0)}\right)^2}$$

Al membro di destra

$$\frac{k}{L} f(x)\left(L - f(x)\right) = \frac{k}{\cancel{L}} \frac{\cancel{L}}{1 + e^{-k(x-x_0)}} \left(L - \frac{L}{1 + e^{-k(x-x_0)}}\right) = \frac{L \cdot k \cdot e^{-k(x-x_0)}}{\left(1 + e^{-k(x-x_0)}\right)^2}$$

I due membri coincidono, per cui f è una soluzione. (L e k compaiono nell'equazione, mentre x_0 no: x_0 è il parametro della soluzione generale.) □

§26 Integrali indefiniti

Supponiamo di voler risolvere l'equazione differenziale $f'(x) = x^4$. Potremmo notare che $(x^5)' = 5x^4$, quindi $\left(\frac{1}{5}x^5\right)' = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 = x^4$ e, di conseguenza, $f(x) = \frac{1}{5}x^5$ è una soluzione particolare della nostra equazione. Ricordando che la derivata di una costante è nulla, vediamo che qualunque funzione del tipo

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + C$$

è una soluzione: questa è infatti la soluzione generale di $f'(x) = x^4$.

In generale l'equazione $f'(x) = g(x)$, con $g(x)$ una funzione fissata (ne abbiamo appena visto un esempio con $g(x) = x^4$), è così importante che c'è un simbolo apposta per indicare la sua soluzione generale.

Notazione
Il simbolo

$$\int g(x)\,dx \qquad \text{letto: "integrale di } g(x) \text{ in } dx\text{"}$$

denota la soluzione generale dell'equazione differenziale $f'(x) = g(x)$.
Per esempio, $\int x^4\,dx = \frac{1}{5}x^5 + C$.

Detto altrimenti: $\int g(x)\,dx$ è la famiglia di quelle funzioni $f(x)$ tali che $f'(x) = g(x)$. Queste funzioni, che sono le soluzioni particolari di $f' = g$, si chiamano anche primitive di g.

Data una primitiva $f(x)$ di $g(x)$, tutte le funzioni del tipo $f(x) + C$ sono, a loro volta, primitive di $g(x)$, e si può dimostrare che non ce ne sono altre. Quindi

$$\int g(x)\,dx = f(x) + C \qquad \text{con } f(x) \text{ una qualunque primitiva di } g(x)$$

§26.1 Integrali delle funzioni elementari

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \quad \text{per } \alpha \neq -1 \qquad \int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \log_e(x) + C \quad \text{caso } \alpha = -1 \qquad \int 1 \, dx = \int x^0 \, dx = x + C$$

$$\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + C \qquad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan(x) + C$$

$$\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + C \qquad \int \log_e(x) \, dx = x \log_e(x) - x + C$$

Nota importante
Queste sono formule da sapere. Si ricavano quasi tutte leggendo al contrario le formule per le derivate delle funzioni elementari: per controllarne una basta derivare il membro di destra e verificare che si ottiene la funzione sotto il segno di integrale.

§26.2 Regole di integrazione

$$\int k \cdot f(x) \, dx = k \cdot \int f(x) \, dx \qquad \int f(x) + g(x) \, dx = \int f(x) \, dx + \int g(x) \, dx$$

Esempio (della prima regola)

$$\int 2x^2 \, dx = 2 \cdot \int x^2 \, dx = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 + C \right) = \frac{2}{3} x^3 + 2C$$

Siccome la costante di integrazione C rappresenta "un numero qualunque", anche il 2C che abbiamo ottenuto è semplicemente un numero qualunque. Quindi siamo giustificati a scrivere

$$\int 2x^2 \, dx = \frac{2}{3} x^3 + C$$

Esempio (della prima regola, bis)
Dato un qualunque numero k fissato

$$\int k \, dx = k \cdot \int 1 \, dx = kx + C$$

dove abbiamo rimpiazzato kC con C grazie al medesimo ragionamento di prima.

Esempio (della seconda regola)

$$\begin{aligned}\int x - \sin(x)\,dx &= \int x\,dx + \int -\sin(x)\,dx = \int x\,dx - \int \sin(x)\,dx \\ &= \left(\frac{1}{2}x^2 + C_1\right) - \left(-\cos(x) + C_2\right) = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x) + C_1 - C_2\end{aligned}$$

(nel secondo passaggio si usa $\int -1 \cdot \sin(x)\,dx = -1 \cdot \int \sin(x)\,dx$). Sono due integrali separati, e ciascuno ha la sua costante: siccome $C_1 - C_2$ è semplicemente un numero qualunque — scritto in maniera fantasiosa —, siamo giustificati a chiamarlo C.

$$\int x - \sin(x)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + \cos(x) + C$$

Nota importante
Se, nell'esempio precedente, anziché C_1 e C_2 avessimo scritto C e C, al posto di $C_1 - C_2$ ci sarebbe venuto $C - C = 0$, e avremmo ottenuto un risultato sbagliato (senza costante di integrazione).

Nota
La costante di integrazione conduce a discorsi un po' complicati però, essenzialmente, è solo burocrazia: alla fine otterremo sempre un risultato del tipo $\int \text{funzione}\,dx = \text{primitiva} + C$. All'atto pratico non serve mai, anzi, al di fuori di un corso di matematica sarebbe goffo dilungarsi su questa formalità. Potrebbe essere apprezzato, però, che tu non scriva cose false tipo $x^2 = x^2 + C$.

§26.3 La regola di sostituzione

Rispetto alle derivate, gli integrali sono più complicati per via di un guaio: non esiste una regola per $\int f(x) \cdot g(x)\,dx$. Ci sono, tuttavia, metodi che talvolta — ossia solo in determinate circostanze — permettono di calcolare integrali di questo tipo. In questo corso vediamo soltanto la regola di sostituzione; si potrebbe dire molto altro, ma sarebbe oltre gli scopi del corso.

Regola

Se $\int f(y)\,dy = F(y) + C$, allora

$$\int f\big(g(x)\big) \cdot g'(x)\,dx = F\big(g(x)\big) + C$$

Esercizio
Calcola $\int x \sin(x^2)\,dx$.

Soluzione. Usiamo la regola con $f(y) = \sin(y)$ e $g(x) = x^2$ (da cui $g'(x) = 2x$). Siccome

$$\int f(y)\,dy = \int \sin(y)\,dy = -\cos(y) + C$$

prendiamo $F(y) = -\cos(y)$, e la regola dà

$$\int \sin(x^2) \cdot 2x\,dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = -\cos(x^2) + C$$

Per risalire all'integrale cercato basta quindi moltiplicare e dividere per 2:

$$\begin{aligned}\int x \sin(x^2)\,dx &= \int \frac{1}{2}\sin(x^2) \cdot 2x\,dx = \frac{1}{2}\int \sin(x^2) \cdot 2x\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\cos(x^2) + C\end{aligned}$$

(ricordando le solite considerazioni su C). □

Esempio ($\int \cos(x+1)\,dx$)
Usiamo $f(y) = \cos(y)$ e $g(x) = x + 1$. Siccome $\int f(y)\,dy = \sin(y) + C$ prendiamo $F(y) = \sin(y)$; inoltre $g'(x) = 1$. Quindi

$$\int \cos(x+1)\,dx = \int \cos(x+1) \cdot 1\,dx = \sin(x+1) + C$$

Osservazione (verifica della regola di sostituzione)
Dobbiamo controllare che la derivata di $F(g(x)) + C$ sia la funzione integranda:

$$\big(F(g(x)) + C\big)' = \underbrace{F'(g(x))}_{f(g(x))} \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

dove si usa $F' = f$, che vale appunto perché $\int f(y)\,dy = F(y) + C$.

§26.4 Un caso particolare che conviene ricordare

Il caso seguente si presenta con grande frequenza, per cui conviene tenere a mente la formula.

Regola

Se $\int f(y)\,dy = F(y) + C$, allora

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Infatti, usando la regola di sostituzione con $g(x) = ax + b$ (da cui $g'(x) = a$), otteniamo

$$\int f(ax+b)\,dx = \int \frac{1}{a} f(ax+b)\cdot a\,dx = \frac{1}{a}\int f\big(g(x)\big)\,g'(x)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$$

Esempio ($\int \frac{1}{2x+3}\,dx$)
Usiamo la formula con $f(y) = \frac{1}{y}$: siccome $\int f(y)\,dy = \int \frac{1}{y}\,dy = \log_e(y) + C$ prendiamo $F(y) = \log_e(y)$. Ora abbiamo $a = 2$ e $b = 3$ (affinché $2x+3 = ax+b$), quindi

$$\int \frac{1}{2x+3}\,dx = \int f(2x+3)\,dx = \frac{1}{2}\log_e(2x+3) + C$$

Esempio ($\int 7^x\,dx$)
Per applicare la regola conviene ricordare che $7^x = e^{x\log_e(7)}$, e poi applicare la formula con $f(y) = e^y$, $a = \log_e(7)$ e $b = 0$:

$$\int 7^x\,dx = \int e^{x\log_e(7)}\,dx = \frac{1}{\log_e(7)}e^{x\log_e(7)} + C = \frac{1}{\log_e(7)}\cdot 7^x + C$$

§26.5 Esercizi

Test 143 (soluzione a p. 351)
$\int \sin(2x) + x^2\,dx$

Test 144 (soluzione a p. 351)
$\int e^{3x} - \cos(1-x)\,dx$

Test 145 (soluzione a p. 352)
$\int \frac{x-1}{x}\,dx$

Test 146 (soluzione a p. 352)
Trova una primitiva di $f(x) = e^{2+3x}$.

Test 147 (soluzione a p. 352)
Trova una primitiva di $f(x) = 2\sqrt[3]{3x}$.

Test 148 (soluzione a p. 352)
Calcola la soluzione generale dell'equazione $f'(x) = x^3 + \cos(x)$.

Test 149 (soluzione a p. 352)
Calcola $\int \log_e(2x - 1)\,dx$.

§27 Bestiario minimo di equazioni differenziali

In generale, risolvere equazioni differenziali è difficilissimo, e le leggi della natura non si fanno scrupolo di tirarcene addosso di insolubili anche nello studio di fenomeni semplicissimi. Le sezioni seguenti sono dedicate a tre classi di equazioni fra le molteplici che si sa come risolvere.

§27.1 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del primo ordine

$$f'(x) = a \cdot f(x) + b$$

Già sappiamo la soluzione generale di questa equazione nel caso $a = 0$: infatti abbiamo $f'(x) = b$ e quindi

$$f(x) = \int b \, dx = bx + C$$

Per imparare a risolvere il caso generale, conviene ricordare a memoria quello che capita quando $b = 0$:

Fatto
L'equazione

$$f'(x) = a \cdot f(x)$$

ha la soluzione generale

$$f(x) = C \cdot e^{ax}$$

(verifica: $f'(x) = C \cdot a \cdot e^{ax} = a \cdot Ce^{ax} = a \cdot f(x)$).

Nota (trucco per ricordare la soluzione)
Basta ricordare che f è una funzione esponenziale. Scrivendo un esponenziale generico $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ otteniamo $f'(x) = \alpha\beta e^{\beta x}$, quindi

$$\alpha\beta e^{\beta x} = f'(x) = af(x) = a\alpha e^{\beta x}$$

e $\beta = a$, mentre non vi sono condizioni su α. Quindi la soluzione generale è $f(x) = \alpha e^{ax}$.

Nel caso generale, sempre assumendo $a \neq 0$, abbiamo

$$f(x) = \underbrace{Ce^{ax}}_{\text{omogenea}} \underbrace{- \frac{b}{a}}_{\text{particolare}}$$

Come si ricava questa soluzione?

1. Si parte dall'equazione omogenea associata $f' = af$ (ottenuta cancellando il $+b$): abbiamo già visto che la sua soluzione generale è $f(x) = Ce^{ax}$.

2. Si cerca una soluzione particolare dell'equazione data. Per esempio possiamo cercarla costante, $f(x) = k$, da cui
$$0 = f'(x) = a \cdot k + b \qquad \Longrightarrow \qquad k = -\frac{b}{a}$$
3. La soluzione generale dell'equazione data si ottiene sommando la soluzione particolare trovata alla soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Osservazione (verifica della soluzione generale)

$$f'(x) = \left(Ce^{ax} - \frac{b}{a}\right)' = C \cdot a \cdot e^{ax}$$
$$af(x) + b = a \cdot Ce^{ax} - \cancel{a}\frac{b}{\cancel{a}} + b = a \cdot C \cdot e^{ax}$$

I due membri coincidono.

Esempio
Qual è la soluzione generale di $f' = 2f + 4$?

L'omogenea associata $f' = 2f$ ha soluzione generale $f(x) = Ce^{2x}$. Una soluzione particolare costante $f(x) = k$ deve soddisfare $0 = 2k + 4$, cioè $k = -2$. Sommando, $f(x) = Ce^{2x} - 2$.
In alternativa, basta applicare meccanicamente la formula. In ogni caso, è meglio fare una verifica: $f'(x) = 2Ce^{2x}$ e $2f(x) + 4 = 2Ce^{2x} - 4 + 4 = 2Ce^{2x}$.

Esercizio
Un corpo si muove lungo l'asse x. Al tempo $t = 0$ esso si trova in $x = 0$ e ha velocità $\frac{dx}{dt} = 1$. Ad ogni istante il corpo è sottoposto a un'accelerazione $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{dt}$ (attrito viscoso). In che posizione si trova il corpo in funzione del tempo t?

Soluzione. In questo esercizio t, il tempo, è la variabile indipendente, mentre x, la posizione, dipende da t: possiamo quindi scrivere $x(t)$ per la posizione, $x'(t) = \frac{dx}{dt}$ per la velocità e $x''(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ per l'accelerazione. Scritti così, i dati dell'esercizio sono

$$\text{(A) } x(0) = 0 \qquad \text{(B) } x'(0) = 1 \qquad \text{(C) } x''(t) = -x'(t)$$

Per affrontare l'equazione (C) conviene introdurre una nuova funzione, $v(t) := x'(t)$: in questo modo $v'(t) = x''(t)$ e l'equazione diventa
$$v'(t) = -v(t)$$

Questa è un'equazione del primo ordine, lineare, a coefficienti costanti (con $a = -1$ e $b = 0$), la cui soluzione generale è $v(t) = Ce^{-t}$. Ci resta da trovare $x(t)$: siccome $x'(t) = v(t) = Ce^{-t}$,
$$x(t) = \int Ce^{-t}\,dt = -Ce^{-t} + D$$

(D perché C è già usata). Questa è la soluzione generale dell'equazione (C). Per trovare la soluzione particolare che rappresenta la legge del moto del corpo dato dobbiamo determinare le costanti C e D usando le condizioni (A) e (B):

$$0 \overset{(A)}{=} x(0) = -Ce^{-0} + D = D - C \qquad \Longrightarrow \qquad D = C$$
$$1 \overset{(B)}{=} x'(0) = v(0) = Ce^{-0} = C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1$$

Quindi, in definitiva, $x(t) = 1 - e^{-t}$. □

Nota
L'equazione (C) coinvolge derivate che arrivano fino alla seconda: si tratta quindi di un'equazione del secondo ordine. La soluzione generale di un'equazione dell'n-esimo ordine è una famiglia di funzioni con n parametri, ed è per questo che la soluzione che abbiamo trovato dipende da due costanti (C e D). In generale, per fissare una soluzione particolare di un'equazione di n-esimo ordine servono n condizioni (in questo caso ne avevamo infatti due).

§27.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine

$$f''(x) = af'(x) + bf(x) + c$$

Le equazioni di questa classe si risolvono nei medesimi passaggi delle equazioni lineari a coefficienti costanti del primo ordine:

1. risolvere l'equazione omogenea associata;
2. trovare una soluzione particolare dell'equazione da risolvere;
3. la soluzione generale cercata è la somma della soluzione generale dell'omogenea e di una soluzione particolare.

Vediamoli in dettaglio.

1. Soluzione dell'omogenea

L'equazione omogenea associata è

$$f''(x) = af'(x) + bf(x)$$

Provvisoriamente cerchiamo $f(x) = e^{\alpha x}$; mettiamo quindi $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ e $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ nell'equazione:

$$\alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = a\alpha \cancel{e^{\alpha x}} + b\cancel{e^{\alpha x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2 - a\alpha - b = 0 \qquad (*)$$

- Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, l'equazione di secondo grado $(*)$ ha due soluzioni α_1 e α_2, e la soluzione generale dell'omogenea è

$$f(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+8}} + \frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+4}} = 0 \\ &\iff \quad \frac{x}{\sqrt{2x^2+8}} = -\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x+4}} \\ &\iff \quad x\sqrt{2x^2-4x+4} = -(x-1)\sqrt{2x^2+8} \end{aligned}$$

Ora eleviamo al quadrato ambo i membri. Questo passaggio potrebbe introdurre delle soluzioni spurie (perché elevando al quadrato cose diverse, alle volte, diventano uguali: $-2 \neq 2$ ma $(-2)^2 = 2^2$), però noi non ce ne curiamo: alla fine separeremo il grano dal loglio controllando quali delle soluzioni trovate soddisfano l'equazione originale.

$$\begin{aligned} x^2(2x^2-4x+4) &= (x-1)^2(2x^2+8) \\ \cancel{2x^4} - \cancel{4x^3} + 4x^2 &= \cancel{2x^4} - \cancel{4x^3} + 10x^2 - 16x + 8 \\ 6x^2 - 16x + 8 = 0 \quad &\implies \quad x = 2 \quad \text{oppure} \quad x = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Facciamo la verifica:

$f'(2) = 1+1 = 2$ ✗ soluzione spuria $\qquad f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$ ✓ punto stazionario

La funzione f ha quindi il solo punto stazionario $x = \frac{2}{3}$, che ovviamente è il minimo cercato, per cui $C = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (ricordando che $y = 1-x$).

Per averne una verifica completamente formale notiamo che il segno della derivata è negativo prima di $\frac{2}{3}$ e positivo dopo. Questo si verifica facilmente perché, siccome $\frac{2}{3}$ è il solo punto di annullamento, basta controllare il segno in un punto arbitrario prima e in un punto arbitrario dopo: abbiamo già visto che $f'(2) = 2 > 0$, e per il prima $f'(0) = -1 < 0$. Questi segni della derivata implicano che $f(x)$ è decrescente prima di $\frac{2}{3}$ e crescente dopo, quindi assume in $\frac{2}{3}$ il valore minimo.

Test 143 (p. 196)
$\int \sin(2x) + x^2 \, dx$

Soluzione.

$$\int \sin(2x)\,dx + \int x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}x^3 + C$$

(per il primo integrale si usa la formula $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$).

Test 144 (p. 196)
$\int e^{3x} - \cos(1-x)\,dx$

Soluzione.

$$\int e^{3x}\,dx - \int \cos(1-x)\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \sin(1-x) + C$$

(nel secondo integrale $a = -1$, quindi $\frac{1}{a}F(ax+b) = -\sin(1-x)$, che cambiato di segno dà $+\sin(1-x)$).

Test 145 (p. 196)
$\int \frac{x-1}{x}\,dx$

Soluzione.
$$\int 1-\frac{1}{x}\,dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{x}\,dx = x - \log_e(x) + C$$

Test 146 (p. 197)
Trova una primitiva di $f(x) = e^{2+3x}$.

Soluzione.
$$\int e^{2+3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{2+3x} + C \qquad \Longrightarrow \qquad F(x) = \frac{1}{3}e^{2+3x}$$

Test 147 (p. 197)
Trova una primitiva di $f(x) = 2\sqrt[3]{3x}$.

Soluzione.
$$\int 2\sqrt[3]{3x}\,dx = \int 2\sqrt[3]{3}\cdot \underbrace{\sqrt[3]{x}}_{x^{1/3}}\,dx = 2\sqrt[3]{3}\,\frac{1}{1+\frac{1}{3}}\,x^{1+\frac{1}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{3}}{2}\,x^{4/3} + C$$

Test 148 (p. 197)
Calcola la soluzione generale dell'equazione $f'(x) = x^3 + \cos(x)$.

Soluzione.
$$\int x^3 + \cos(x)\,dx = \int x^3\,dx + \int \cos(x)\,dx = \frac{1}{4}x^4 + \sin(x) + C$$

Test 149 (p. 197)
Calcola $\int \log_e(2x-1)\,dx$.

Soluzione. Applichiamo la formula per $f(ax+b)$, con $f(y) = \log_e(y)$, $a = 2$ e $b = -1$. Dalla tavola degli integrali elementari
$$\int f(y)\,dy = \int \log_e(y)\,dy = y\log_e(y) - y + C$$
quindi prendiamo $F(y) = y\log_e(y) - y$ e otteniamo
$$\int \log_e(2x-1)\,dx = \frac{1}{2}F(2x-1) = \frac{1}{2}\Big[(2x-1)\log_e(2x-1) - (2x-1)\Big] + C$$
(verifica: derivando, $\frac{1}{2}\Big[2\log_e(2x-1) + (2x-1)\frac{2}{2x-1} - 2\Big] = \log_e(2x-1)$).

Test 150 (p. 208)
Trova la soluzione generale dell'equazione $f' = -2f + 4$.

Soluzione. È lineare a coefficienti costanti del primo ordine, con $a = -2$ e $b = 4$. La soluzione generale dell'omogenea associata $f' = -2f$ è $f(x) = Ce^{-2x}$; una soluzione particolare costante si trova da

$$0 = -2k + 4 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 2$$

(ossia $k = -\frac{b}{a}$). Sommando,

$$f(x) = Ce^{-2x} + 2$$

(verifica: $f' = -2Ce^{-2x}$ e $-2f + 4 = -2Ce^{-2x} - 4 + 4 = -2Ce^{-2x}$).

Esercizio 151 (p. 208)
Trova la soluzione dell'equazione differenziale $f'' + 4f' + 5f + 10 = 0$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$.

Soluzione. Portiamo l'equazione nella forma in cui sappiamo trattarla:

$$f'' = \underbrace{-4}_{a} f' \underbrace{-5}_{b} f \underbrace{-10}_{c}$$

1. Omogenea. L'equazione di secondo grado è $\alpha^2 - a\alpha - b = \alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0$, con $\Delta = a^2 + 4b = 16 - 20 = -4 < 0$. Siamo nel terzo caso, con

$$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{a}{2}x} = e^{-2x}$$

quindi la soluzione generale dell'omogenea è

$$f(x) = e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big)$$

2. Soluzione particolare. Siccome $b \neq 0$, va bene la costante $f(x) = -\frac{c}{b} = -\frac{-10}{-5} = -2$.

3. Soluzione generale.

$$f(x) = e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big) - 2$$

4. Le condizioni. Da $f(0) = 0$:

$$0 = \underbrace{e^0}_{1}\big(C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0\big) - 2 = C_1 - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = 2$$

Per l'altra condizione serve la derivata:

$$f'(x) = -2e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big) + e^{-2x}\big(-C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)\big)$$

e in $x = 0$

$$0 = -2C_1 + C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = 2C_1 = 4$$

In conclusione

$$f(x) = e^{-2x}\big(2\cos(x) + 4\sin(x)\big) - 2$$