§1 I numeri

Cominciamo con un gioco.

Regole del gioco
x è un numero se:

- ha senso confrontare x con altri numeri;
- ha senso dire "x metri" e "x grammi";
- x è una quantità limitata e definita esattamente.

Proviamo subito con tre scritture:

$$27 \quad \text{sì} \qquad \text{XXVII} \quad \text{sì} \qquad 27.00 \cdot 10^0 \quad \text{sì}$$

e sono *lo stesso numero*:

$$27 = \text{XXVII} = 27.00 \cdot 10^0$$

§1.1 Intermezzo: il simbolo =

Notazione
♣ = ♡ equivale a "♣ e ♡ sono la stessa cosa".

Esempio (Uguaglianze numeriche)

$$7 = 7 \qquad 7 + 2 = 9 \qquad 9 = 7 + 2 \qquad 10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$$

Si osservi il secondo e il terzo esempio: l'uguale non ha una "direzione".

Esempio (Uguaglianze algebriche)
Quando scriviamo

$$(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

intendiamo dire: "qualunque sia il valore numerico di x, il risultato dell'operazione $(x+1)^2$ e quello dell'operazione $x^2 + 2x + 1$ coincidono".

Esempio (Equazioni)
"Risolvi l'equazione $x^2 - x = 2$!" significa: "È un dato di fatto che il risultato di $x^2 - x$ e 2 sono la stessa cosa. Sapendo questo, fai il lavoro del detective, e scova x!"

In questo caso l'equazione ha due soluzioni, -1 e 2, infatti

$$\underset{-1 \text{ al posto di } x}{(-1)^2 - (-1) = 2} \qquad \underset{2 \text{ al posto di } x}{2^2 - 2 = 2}$$

mentre qualunque altro numero, messo al posto di x, produrrebbe un risultato diverso da 2. Quindi, dire "le soluzioni sono -1 e 2" significa dire "i sospetti che corrispondono all'identikit $x^2 - x = 2$ sono -1 e 2".

Se, per esempio, x rappresenta una grandezza fisica, la sola equazione $x^2 - x = 2$ non ci permette di capire esattamente quale sia questa grandezza. Ci permette di dire, però, che o è 2 o è -1, ed escludere ogni altro caso.

§1.2 Il gioco, continuato

Torniamo al gioco.

- $\sqrt{7}$ SÌ
- $1 \pm \sqrt{2}$ NO è $\{1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\}$, un insieme di due numeri. Nota: gli insiemi sono disordinati, ossia $\{a, b, c, d\} = \{b, d, a, c\} = \{c, b, d, a\} = \&c$.
- 050 2212175 NO (è il telefono del rettorato dell'università). Un numero di telefono è una sequenza di cifre, e non rappresenta una quantità (terza regola del gioco). Per esempio aggiungere o togliere zeri all'inizio invaliderebbe un numero di telefono, mentre $050\,2212175 = 50\,2212175$ se li leggessimo come numeri.
- $7 + 15 = 22$ NO è l'affermazione "$7 + 15$ fa 22".
- 2.54 cm NO è una lunghezza, la combinazione del numero 2.54 e dell'unità di misura cm. Per esempio, la medesima lunghezza può essere espressa da altre combinazioni: $2.54\,\text{cm} = 1\,\text{in}$. "inch", ossia "pollice".
- ∞ NO ("infinito") non è una quantità limitata.
- x tale che $x + 2 = -x$ SÌ è il numero -1. Infatti $2x = -2$, quindi $x = -1$.
- x tale che $x^2 = 2$ NO potrebbe essere $\sqrt{2}$ o $-\sqrt{2}$.
- x tale che $\dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{x-2}$ NO non c'è nessun valore di x che va bene. Infatti, se ci fosse, potremmo eseguire i passaggi seguenti e raggiungere una conclusione falsa:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x-2} \xrightarrow{\text{inverto ambo i membri}} x + 2 = x - 2$$
$$\xrightarrow{\text{sottraggo } x \text{ ad ambo i membri}} 2 = -2 \quad \text{FALSO}$$

§1.3 Insiemi di numeri di uso comune

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$	numeri "naturali" o "interi non-negativi"
$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$	numeri interi (ted. *Zahlen*, numeri)
$\mathbb{Q} = \left\{\ldots, -\frac{10}{3}, -2, -\frac{1}{7}, 0, \frac{1}{2}, \frac{7}{5}, 54, \ldots\right\}$	numeri razionali
$\mathbb{R} = \left\{\ldots, -\frac{10}{3}, -\sqrt{2}, -1, 0, \pi, \pi^\pi, \ldots\right\}$	numeri reali

Notazione
Il simbolo $\in$ si legge "appartiene" e denota il fatto che l'oggetto a sinistra è un membro dell'insieme a destra.

Per esempio:

$$\begin{array}{cccc} \sqrt{2} \in \mathbb{R} & \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} & \sqrt{2} \notin \mathbb{Z} & \sqrt{2} \notin \mathbb{N} \\ -2 \in \mathbb{R} & -2 \in \mathbb{Q} & -2 \in \mathbb{Z} & -2 \notin \mathbb{N} \end{array}$$

Notazione
Il simbolo $\subseteq$ si legge "è sottoinsieme di" e denota il fatto che tutti i membri dell'insieme a sinistra sono altresì membri dell'insieme a destra.

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$

§2 Richiamo di algebra elementare

Esercizio
Risolvi l'equazione

$$(x+1)^4 = (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x$$

Soluzione. Dobbiamo, intanto, semplificare l'equazione. Il metodo meno sofisticato è, chiaramente, sviluppare le potenze:

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\\ (x^2+1)^2 &= x^4 + 2x^2 + 1\\ (x-1)^3 &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1\end{aligned}$$

Non è necessario ricordare a memoria queste formule, perché, all'occorrenza, si possono ricavare iterando calcoli più semplici. Per esempio:

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= \left((x+1)^2\right)^2 = (x^2+2x+1)^2 = (x^2+2x+1)\cdot(x^2+2x+1)\\ &= (x^2+2x+1)\cdot x^2 + (x^2+2x+1)\cdot 2x + (x^2+2x+1)\\ &= x^4 + 2x^3 + x^2 \quad + 2x^3 + 4x^2 + 2x \quad + x^2 + 2x + 1\\ &= x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

Tornando, però, all'esercizio originale, proviamo a svolgere i calcoli in una maniera diversa. Sfruttiamo la formula

$$\square^2 - \triangle^2 = (\square + \triangle)(\square - \triangle)$$

Portando $(x^2+1)^2$ a sinistra e riconoscendo $(x+1)^4 = (x^2+2x+1)^2$:

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x\\ (x^2+2x+1)^2 - (x^2+1)^2 &= 4(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) + 12x\\ (2x^2+2x+2)\cdot 2x &= 4x^3 - 12x^2 + 12x - 4 + 12x\\ 4x^3 + 4x^2 + 4x &= 4x^3 - 12x^2 + 24x - 4\end{aligned}$$

A sinistra $\square + \triangle = 2x^2 + 2x + 2$ e $\square - \triangle = 2x$. Cancellando $4x^3$ da ambo i membri e dividendo per 4:

$$4x^2 - 5x + 1 = 0$$

Abbiamo quindi le soluzioni $\dfrac{5 \pm \sqrt{9}}{8}$, ossia

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = \tfrac{1}{4}$$

□

Nota importante
A questo punto è fondamentale controllare la correttezza della soluzione. Un risultato sbagliato non vale niente, anzi, reca un danno se costituisce la base di calcoli successivi. Questa verifica non deve essere fatta per esteso: apparirebbe goffa e ridondante. Tuttavia, non farla significa esporsi al rischio di vedere il proprio lavoro distrutto da un errore di calcolo, ed è un rischio stupido.

A scopo didattico, facciamo una verifica per iscritto. Nella pratica, poi, uno fa questi calcoli mentalmente o in brutta copia. Abbiamo trovato le soluzioni 1 e $\frac{1}{4}$. Ci acconteremo di controllare il valore 1, ragionando che difficilmente un errore di calcolo può sovvertire una soluzione sola.

$$\begin{aligned}(x+1)^4 &= (x^2+1)^2 + 4(x-1)^3 + 12x \\ \underbrace{(1+1)^4}_{16} &= \underbrace{(1^2+1)^2}_{4} + \underbrace{4(1-1)^3}_{0} + \underbrace{12\cdot 1}_{12} \qquad \text{OK}\end{aligned}$$

Esercizio
Semplifica l'espressione

$$(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(b+c)^2$$

Soluzione. Anche qui possiamo sviluppare i prodotti:

$$\begin{aligned}(a+b-c)\cdot(a-b+c) &= a^2 - \cancel{ab} + \cancel{ac} + \cancel{ab} - b^2 + bc - \cancel{ac} + bc - c^2 \\ &= a^2 - b^2 - c^2 + 2bc \\ (b+c)^2 &= b^2 + c^2 + 2bc\end{aligned}$$

e sommando

$$(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(b+c)^2 = a^2 - \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + 2bc + \cancel{b^2} + \cancel{c^2} + 2bc = a^2 + 4bc$$

Oppure possiamo cercare di essere creativi usando la formula $\square^2 - \triangle^2 = (\square+\triangle)(\square-\triangle)$:

$$\begin{aligned}(a+b-c)\cdot(a-b+c)+(b+c)^2 &= \\ \big(a+(b-c)\big)\cdot\big(a-(b-c)\big)+(b+c)^2 &= \\ a^2-(b-c)^2+(b+c)^2 &= \\ a^2 + \underbrace{\big((b+c)+(b-c)\big)}_{2b}\cdot\underbrace{\big((b+c)-(b-c)\big)}_{2c} &= a^2+4bc\end{aligned}$$

□

Nota importante
Comunque si proceda, in questo calcolo è facile sbagliare, ottenendo, per errore, $a^2 + 2bc$, o $+5bc$, &c. Anche qui, in brutta copia, dobbiamo fare una verifica. Basterà sostituire alcuni valori numerici alle variabili. Per esempio:

$a = b = c = 1$ $\quad (1+1-1)\cdot(1-1+1)+(1+1)^2 = 1+4\cdot 1\cdot 1$ OK
$a = b = 1,\ c = 0$ $\quad (1+1-0)\cdot(1-1+0)+(1+0)^2 = 1+4\cdot 1\cdot 0$ OK

Esercizio
Semplifica

$$\frac{x^3+10x^2+21x}{x^2-3x-18}$$

Soluzione. Notiamo, intanto, che è possibile trarre a fattor comune una x dal numeratore, ottenendo

$$\frac{x^3+10x^2+21x}{x^2-3x-18} = \frac{x(x^2+10x+21)}{x^2-3x-18}$$

Ora, per investigare la possibilità di semplificare la frazione, occorre fattorizzare i polinomi di secondo grado $x^2+10x+21$ e $x^2-3x-18$. C'è più di un approccio che possiamo seguire.

Fatto
Consideriamo il polinomio ax^2+bx+c. Sia $\Delta = b^2-4ac$ il discriminante dell'equazione di secondo grado $ax^2+bx+c=0$. Allora sono possibili tre casi:

- se $\Delta < 0$, allora ax^2+bx+c non si fattorizza;
- se $\Delta = 0$, allora l'equazione $ax^2+bx+c=0$ ha una sola soluzione e, detta x_0 questa soluzione,
$$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$$
- se $\Delta > 0$, l'equazione ha due soluzioni x_1, x_2 e
$$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$$

Applicando questo fatto a $x^2+10x+21$, otteniamo $\Delta = 16$, quindi $x_{1,2} = -5 \pm 2$, e $x^2+10x+21 = (x+7)(x+3)$.

Procedendo allo stesso modo per il denominatore:

$$\frac{x(x^2+10x+21)}{x^2-3x-18} = \frac{x(x+7)\cancel{(x+3)}}{(x-6)\cancel{(x+3)}} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

□

Osservazione
L'esercizio è concluso, ma notiamo che l'ultima uguaglianza non è tecnicamente corretta, perché, per $x = -3$, l'espressione a sinistra si riduce a $\frac{0}{0}$ che non ha senso, mentre a destra abbiamo $\frac{-12}{-9}$. Nell'uguaglianza

$$\frac{x(x+7)(x+3)}{(x-6)(x+3)} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

non è, quindi, vero che il membro di destra ed il membro di sinistra rappresentano la stessa cosa qualunque sia il valore assegnato ad x. Questo accade, in realtà, per ogni valore di x eccetto -3, per cui, se vogliamo essere molto scrupolosi, dobbiamo aggiungere alla nostra soluzione le parole "per $x \neq -3$". Nel nostro corso, possiamo fare a meno di questo sussiego, basterà avere presente che stiamo perpetrando un piccolo abuso del simbolo $=$.

È possibile risolvere il medesimo esercizio in maniere diverse. Per esempio, possiamo usare:

Fatto (teorema di Ruffini)
Un polinomio $p(x)$ si fattorizza nella forma $p(x) = (x - x_0) \cdot q(x)$ se e solo se $p(x_0) = 0$.

In pratica, se abbiamo una soluzione x_0 dell'equazione $p(x) = 0$, allora la regola di Ruffini ci assicura che possiamo scrivere

$$p(x) = (x - x_0) \cdot (\text{un polinomio opportuno})$$

Una volta scoperta, o indovinata, la soluzione x_0, il polinomio opportuno si può costruire semplicemente per aggiustamenti successivi.

Esempio
Sia $p(x) = x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6$ e $x_0 = 1$.
Vediamo subito che $p(x_0) = 1 + 1 - 3 + 7 - 6 = 0$. Scriviamo:

$$x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 = (x - 1) \cdot (?)$$

Siccome vogliamo ottenere $x^5 + \dots$ nella parentesi dovremo scrivere un x^4:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x - 1) \cdot (x^4 + \dots \quad ?) \\ &= x^5 - x^4 + \dots \end{aligned}$$

Ora, il termine di quarto grado a destra ci viene $-x^4$, ma noi volevamo ottenere $+x^4$, dobbiamo quindi correggere aggiungendo $+2x^3$ nella parentesi:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x - 1) \cdot (x^4 + 2x^3 + \dots \quad ?) \\ &= x^5 + x^4 - 2x^3 + \dots \end{aligned}$$

Ora i monomi x^5 e x^4 sono giusti, ma al grado tre, a sinistra non c'è alcun monomio, mentre, a destra, ci viene $-2x^3$; dobbiamo quindi aggiungere nella parentesi $+2x^2$ per cancellarlo:

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x-1) \cdot \left(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + \dots \quad ?\right) \\ &= x^5 + x^4 - 2x^2 + \dots \end{aligned}$$

Adesso bisogna aggiustare l'addendo di secondo grado. Procedendo così, alla fine, arriviamo a

$$\begin{aligned} x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 &= (x-1) \cdot \left(x^4 + 2x^3 + 2x^2 - x + 6\right) \\ &= x^5 + x^4 - 3x^2 + 7x - 6 \qquad \text{OK} \end{aligned}$$

Come si vede, alla fine, l'uguaglianza è soddisfatta.

Per tornare all'esercizio, per esempio, una volta fattorizzato il numeratore come $x(x+7)(x+3)$, sappiamo che questi sono gli unici fattori che possiamo aver speranza di semplificare. Quindi, usando il teorema di Ruffini, possiamo verificare se questi fattori siano divisori del denominatore, controllando se il denominatore si annulla in 0, -7 o -3. Se sì, determiniamo la scomposizione come nell'esempio.

Ci sono ancora altre tecniche, però non è richiesto di conoscere tutti i modi di venire a capo di questi calcoli: basta saper trovare la soluzione in qualche modo. Ripetiamo ancora una volta — quando si è trovata la soluzione

$$\frac{x^3 + 10x^2 + 21x}{x^2 - 3x - 18} = \frac{x(x+7)}{x-6}$$

è consigliabile fare, in brutta copia, qualche verifica numerica.

Esercizio
Risolvi la seguente disequazione

$$\frac{1}{x+1} \leqslant 2x+3$$

Soluzione. Un modo di procedere è portare tutti i termini della disequazione al primo membro e poi ridurre a comun denominatore

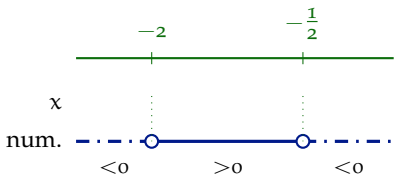
$$\frac{1}{x+1} - 2x - 3 \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-(2x+3)(x+1)}{x+1} \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-2x^2-5x-2}{x+1} \leqslant 0$$

A questo punto studiamo il segno di numeratore e denominatore separatamente, in funzione di x.

Numeratore: $-2x^2-5x-2$. Si annulla in

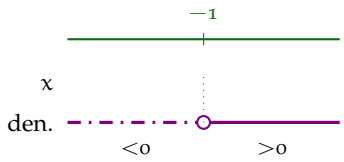
$$\frac{5 \pm \sqrt{9}}{-4} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Siccome il segno del coefficiente di x^2 è negativo, il numeratore è positivo fra questi due valori.



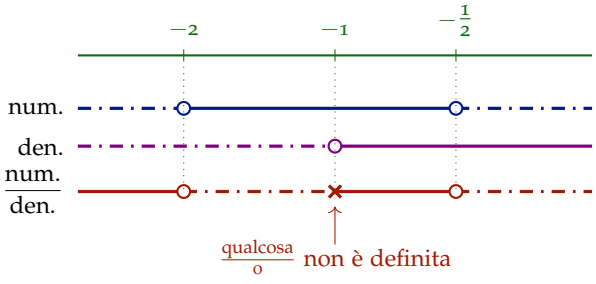
Denominatore: $x+1$.

$$\begin{aligned} x+1 < 0 &\iff x < -1 \\ x+1 = 0 &\iff x = -1 \\ x+1 > 0 &\iff x > -1 \end{aligned}$$



Combiniamo queste informazioni in un unico diagramma per mezzo della regola dei segni:

$$\frac{+}{+} = \frac{-}{-} = +\,, \qquad \frac{+}{-} = \frac{-}{+} = -\,, \qquad \text{\&c.}$$



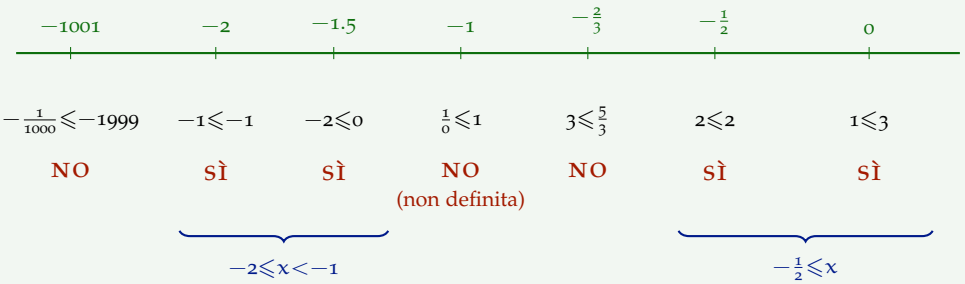
Infine leggiamo dal disegno la soluzione, ossia i valori di x per cui $\frac{\text{num.}}{\text{den.}} \leqslant 0$:

$$-2 \leqslant x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant x$$

□

Osservazione (Un altro modo di risolvere l'esercizio)
Si procede come segue.

1. Risolviamo l'equazione $\frac{1}{x+1} = 2x+3$ ignorando i problemi di annullamento del denominatore:
$$\frac{1}{x+1} = 2x+3 \implies 1 = (2x+3)(x+1)$$
$$\implies 2x^2+5x+2 = 0 \implies x = -2 \text{ o } x = -\tfrac{1}{2}$$
2. Troviamo i punti di annullamento dei denominatori. In questo caso c'è l'unico denominatore $x+1$, e $x+1 = 0 \implies x = -1$.
3. Individuiamo i numeri calcolati in (1) e (2) su una retta.
4. Verifichiamo la disuguaglianza data $\frac{1}{x+1} \leqslant 2x+3$ nei punti indicati sul diagramma e negli intervalli fra di essi, usando, per ciascun intervallo, un valore arbitrario in esso contenuto.



Come prima, la soluzione si legge da questo diagramma:

$$-2 \leqslant x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant x$$

§2.1 Esercizi

Test 1 (soluzione a p. 241)
Risolvi la disequazione $1 + \dfrac{1}{x} < 0$.

Test 2 (soluzione a p. 241)
Risolvi la disequazione $x^2 + 2x > 3$.

Test 3 (soluzione a p. 241)
Scrivi un'equazione di secondo grado le cui soluzioni siano 2 e 7.

Esercizio 4 (soluzione a p. 242)
Semplifica l'espressione

$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2$$

Esercizio 5 (soluzione a p. 242)
Semplifica l'espressione

$$(x+1)^3-\big((x+3)x+3\big)x$$

Esercizio 6 (soluzione a p. 243)
Risolvi l'equazione

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3x^2+4x+1}$$

Esercizio 7 (soluzione a p. 244)
Risolvi l'equazione

$$(x+1)^4+(x-1)^4-2x^4=10x$$

Esercizio 8 (soluzione a p. 244)
Risolvi l'equazione

$$x+\frac{1}{x}=x^2+\frac{1}{x^2}$$

Esercizio 9 (soluzione a p. 245)
Risolvi la disequazione

$$x^4<x^3+2x^2$$

Esercizio 10 (soluzione a p. 245)
Risolvi la disequazione

$$\frac{2}{x}\leqslant x+1$$

Parte V
Soluzioni

Test 1 (p. 17)
Risolvi la disequazione $1 + \frac{1}{x} < 0$.

Soluzione. Conviene scrivere il primo membro come una frazione sola:

$$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

La frazione è negativa quando numeratore e denominatore hanno segni opposti. Il numeratore $x+1$ è positivo per $x > -1$, il denominatore x per $x > 0$, quindi

$$-1 < x < 0$$

(per $x < -1$ sono entrambi negativi e la frazione è positiva; per $x > 0$ sono entrambi positivi).

Test 2 (p. 17)
Risolvi la disequazione $x^2 + 2x > 3$.

Soluzione. Portiamo tutto a primo membro e fattorizziamo:

$$x^2 + 2x - 3 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad (x+3)(x-1) > 0$$

(le soluzioni di $x^2 + 2x - 3 = 0$ sono -3 e 1). Un prodotto di due fattori è positivo quando i fattori hanno lo stesso segno: entrambi positivi per $x > 1$, entrambi negativi per $x < -3$. Quindi

$$x < -3 \qquad \text{oppure} \qquad x > 1$$

Nota
La parabola $y = x^2 + 2x - 3$ ha la concavità verso l'alto e taglia l'asse in -3 e 1: sta sopra l'asse fuori dall'intervallo fra le due radici. Con il coefficiente di x^2 positivo, una disequazione > 0 dà sempre l'esterno, una < 0 sempre l'interno.

Test 3 (p. 17)
Scrivi un'equazione di secondo grado le cui soluzioni siano 2 e 7.

Soluzione. Basta osservare che il polinomio $(x-7)(x-2)$ si annulla per $x = 7$ e per $x = 2$, e per nessun altro valore. L'equazione

$$(x-7)(x-2) = 0 \qquad \text{ossia} \qquad x^2 - 9x + 14 = 0$$

ha quindi le soluzioni richieste. (Va bene anche qualunque suo multiplo: $2x^2 - 18x + 28 = 0$ ha le stesse soluzioni.)

Esercizio 4 (p. 18)
Semplifica l'espressione

$$(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2$$

Soluzione. Sviluppiamo tutti i quadrati:

$$\begin{aligned}
&(a+b)^2+(a+c)^2+(b+c)^2-(a+b+c)^2 = \\
&\quad = (a^2+2ab+b^2)+(a^2+2ac+c^2)+(b^2+2bc+c^2) \\
&\qquad -(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) \\
&\quad = \cancel{a^2}+\cancel{2ab}+\cancel{b^2}+a^2+\cancel{2ac}+\cancel{c^2}+b^2+\cancel{2bc}+c^2 \\
&\qquad -\cancel{a^2}-\cancel{b^2}-\cancel{c^2}-\cancel{2ab}-\cancel{2ac}-\cancel{2bc} \\
&\quad = a^2+b^2+c^2
\end{aligned}$$

Nota importante
Per controllare di non aver commesso errori conviene verificare il risultato con qualche sostituzione facile. Per esempio $a=b=c=1$ dà

$$2^2+2^2+2^2-3^2 = 1^2+1^2+1^2 \qquad \text{OK}$$

e $a=b=1$, $c=-1$ dà

$$2^2+0^2+0^2-1^2 = 1^2+1^2+1^2 \qquad \text{OK}$$

Due sostituzioni non fanno una dimostrazione, ma, se il conto fosse sbagliato, sarebbe molto probabile che almeno una delle due non tornasse.

Esercizio 5 (p. 18)
Semplifica l'espressione

$$(x+1)^3-\big((x+3)x+3\big)x$$

Soluzione. Conviene sviluppare separatamente i due addendi. Il primo è il cubo di un binomio; nel secondo si comincia dalla parentesi più interna:

$$(x+1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$$
$$\big((x+3)x+3\big)x = (x^2+3x+3)x = x^3+3x^2+3x$$

La differenza è quindi

$$(x^3+3x^2+3x+1)-(x^3+3x^2+3x) = 1$$

Il risultato non dipende da x: si tratta di un'espressione costante. Come nell'esercizio precedente, conviene verificare sostituendo un numero qualunque, per esempio $x=2$:

$$3^3-(5\cdot 2+3)\cdot 2 = 27-26 = 1 \qquad \text{OK}$$

Esercizio 6 (p. 18)
Risolvi l'equazione

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{3x^2+4x+1}$$

Soluzione. In questa equazione sono presenti dei denominatori, bisognerà quindi gestire il fatto che i due membri dell'equazione non sono definiti (vale a dire non hanno senso, non sono numeri) quando un denominatore si annulla. Provvisoriamente, ignoriamo questa difficoltà, e procediamo a risolvere l'equazione come se fosse ben definita per ogni valore della x.

Potremmo avere la tentazione di portare tutte le frazioni allo stesso membro

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{3x^2+4x+1} = 0$$

e poi ridurle a comun denominatore, però il calcolo si prospetta complicato. Forse, conviene separare le due frazioni più semplici dalla terza:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{3x^2+4x+1}$$
$$\frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{3x^2+4x+1}$$

Eseguendo la medesima operazione su cose uguali si ottengono cose uguali: invertiamo ambo i membri.

$$x^2+x = 3x^2+4x+1$$
$$2x^2+3x+1 = 0 \quad \longrightarrow \quad x = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

Ora abbiamo ottenuto le soluzioni $-\frac{1}{2}$ e -1, però dobbiamo assicurarci che l'equazione sia ben definita per questi valori di x. Possiamo procedere sostituendo i valori -1 e $-\frac{1}{2}$ nei denominatori; così scopriamo che $x+1$ si annulla in $x=-1$, mentre nessuno dei denominatori si annulla in $x=-\frac{1}{2}$, quindi

$$x = -\tfrac{1}{2}$$

è l'unica soluzione accettabile.

In alternativa, possiamo risolvere le equazioni $x=0$, $x+1=0$, $3x^2+4x+1=0$, quindi escluderemo quelle fra -1 e $-\frac{1}{2}$ che sono anche soluzioni di una di queste equazioni.

Esercizio 7 (p. 18)
Risolvi l'equazione

$$(x+1)^4 + (x-1)^4 - 2x^4 = 10x$$

Soluzione. Sviluppiamo le due potenze quarte. I termini di grado dispari hanno segni opposti nei due sviluppi e si cancellano:

$$\begin{aligned}(x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1) + (x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1) - 2x^4 &= 10x \\ 12x^2 + 2 &= 10x \\ 6x^2 - 5x + 1 &= 0\end{aligned}$$

(nell'ultimo passaggio si sono divisi ambo i membri per 2). Resta un'equazione di secondo grado, che si fattorizza:

$$6x^2 - 5x + 1 = (3x-1)(2x-1) = 0$$

Un prodotto è nullo quando lo è uno dei fattori, quindi

$$x = \frac{1}{3} \qquad \text{oppure} \qquad x = \frac{1}{2}$$

Nota importante
Conviene sempre controllare le soluzioni sostituendole nell'equazione di partenza. Per $x = \frac{1}{3}$:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^4 + \left(-\frac{2}{3}\right)^4 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{256}{81} + \frac{16}{81} - \frac{2}{81} = \frac{270}{81} = \frac{10}{3} = 10 \cdot \frac{1}{3} \qquad \text{OK}$$

Esercizio 8 (p. 18)
Risolvi l'equazione

$$x + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

Soluzione. Osserviamo intanto che $x = 0$ non può essere una soluzione, perché sostituendolo si otterrebbe una divisione per zero, che non ha senso. Possiamo quindi assumere $x \neq 0$ e, siccome x non è nulla, moltiplicare ambo i membri per x^2 ottenendo un'equazione equivalente:

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{x}\right)x^2 &= \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)x^2 \\ x^3 + x &= x^4 + 1 \\ x^4 - x^3 - x + 1 &= 0\end{aligned}$$

Raccogliamo a due a due:

$$x^4 - x^3 - x + 1 = x^3(x-1) - (x-1) = (x-1)(x^3-1) = (x-1)(x-1)(x^2+x+1)$$

Il fattore $x^2 + x + 1$ non si annulla mai, perché il suo discriminante

$$\Delta = 1 - 4 = -3$$

è negativo. L'unica soluzione è quindi

$$x = 1$$

(e in $x = 1$ l'equazione di partenza diventa $1 + 1 = 1 + 1$: la verifica è immediata).

Esercizio 9 (p. 18)
Risolvi la disequazione

$$x^4 < x^3 + 2x^2$$

Soluzione. Troviamo i valori critici risolvendo l'equazione corrispondente:

$$\begin{aligned} x^4 &= x^3 + 2x^2 \\ x^4 - x^3 - 2x^2 &= 0 \\ x^2(x+1)(x-2) &= 0 \end{aligned}$$

I valori critici sono dunque -1, 0 e 2. Restano da esaminare quei tre valori e i quattro intervalli in cui dividono la retta; in ciascun intervallo scegliamo un numero qualunque, per esempio -10, -0.1, 1 e 10.

INTERVALLO	PROVA	
$x < -1$	$10\,000 \not< -1\,000 + 2 \cdot 100$	✗
$-1 < x < 0$	$0.0001 < -0.001 + 2 \cdot 0.01$	✓
$0 < x < 2$	$1 < 1 + 2$	✓
$2 < x$	$10\,000 \not< 1\,000 + 2 \cdot 100$	✗

Nei tre valori critici la disequazione non è soddisfatta, perché lì i due membri sono uguali e il segno è stretto. In conclusione

$$-1 < x < 0 \qquad \text{oppure} \qquad 0 < x < 2$$

(attenzione: lo zero è escluso, quindi la soluzione *non* si scrive $-1 < x < 2$).

Esercizio 10 (p. 18)
Risolvi la disequazione

$$\frac{2}{x} \leqslant x + 1$$

Soluzione. Procediamo come nell'esercizio precedente, con un'avvertenza: siccome compare un denominatore, fra i valori critici vanno inclusi non solo le soluzioni dell'equazione, ma anche gli zeri del denominatore — qui il solo $x = 0$.

L'equazione corrispondente è

$$\frac{2}{x} = x + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad 2 = x^2 + x \qquad \Longrightarrow \qquad (x+2)(x-1) = 0$$

(si è moltiplicato per x, lecito perché $x \neq 0$), quindi le soluzioni sono -2 e 1. I valori critici sono dunque -2, 0 e 1, e gli intervalli da esaminare quattro; proviamo con -10, -1, 0.1 e 10.

INTERVALLO	PROVA	
$x < -2$	$-0.2 \nleqslant -9$	✗
$-2 < x < 0$	$-2 \leqslant 0$	✓
$0 < x < 1$	$20 \nleqslant 1.1$	✗
$1 < x$	$0.2 \leqslant 11$	✓

In $x = -2$ e in $x = 1$ la disequazione è soddisfatta, perché la diseguaglianza è larga; in $x = 0$ non ha senso, perché si annulla il denominatore. In conclusione

$$-2 \leqslant x < 0 \qquad \text{oppure} \qquad 1 \leqslant x$$

Nota importante
Attenzione ai segni: $\leqslant$ in corrispondenza delle soluzioni -2 e 1, ma $<$ in corrispondenza del punto $x = 0$, dove si annulla il denominatore e la disequazione non è nemmeno definita.

Test 11 (p. 23)
A che percentuale corrisponde la frazione $\frac{7}{20}$?

Soluzione. Una percentuale è una frazione con denominatore 100. Siccome $20 \cdot 5 = 100$, basta moltiplicare numeratore e denominatore per 5:

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 35\%$$

(in alternativa si divide: $7 \div 20 = 0.35$, e si sposta la virgola di due posti).

Test 12 (p. 23)
Calcola 40 aumentato del 15%.

Soluzione. Aumentare del 15% significa moltiplicare per $1 + \frac{15}{100} = 1.15$:

$$40 \cdot 1.15 = 46$$

(a mente: il 10% di 40 è 4, il 5% è la metà, cioè 2; in tutto $40 + 4 + 2 = 46$).

Esercizio 13 (p. 23)
In un collegio per studenti ci sono camere doppie e camere singole. Le doppie sono il doppio delle singole, il 10% delle doppie è al pian terreno, e il 20% delle singole è al pian terreno.

1. Quale percentuale delle camere del pian terreno è costituita da doppie?
2. Che percentuale degli studenti che abitano al pian terreno è in singola?
3. Le camere doppie non sono mai abitate da due studenti di sessi opposti. Inoltre, metà del totale delle camere è abitata da studentesse, e l'altra metà da studenti maschi. Diciamo che l'x% delle camere doppie è abitato da