Esercizio
Risolvi la seguente disequazione

$$\frac{1}{x+1} \leqslant 2x+3$$

Soluzione. Un modo di procedere è portare tutti i termini della disequazione al primo membro e poi ridurre a comun denominatore

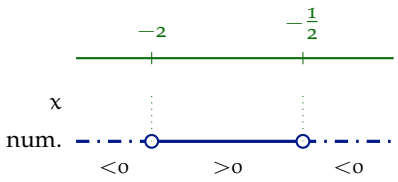
$$\frac{1}{x+1} - 2x - 3 \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1-(2x+3)(x+1)}{x+1} \leqslant 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{-2x^2-5x-2}{x+1} \leqslant 0$$

A questo punto studiamo il segno di numeratore e denominatore separatamente, in funzione di x.

Numeratore: $-2x^2-5x-2$. Si annulla in

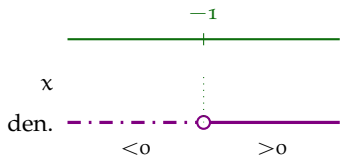
$$\frac{5 \pm \sqrt{9}}{-4} = \begin{cases} -2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Siccome il segno del coefficiente di x^2 è negativo, il numeratore è positivo fra questi due valori.



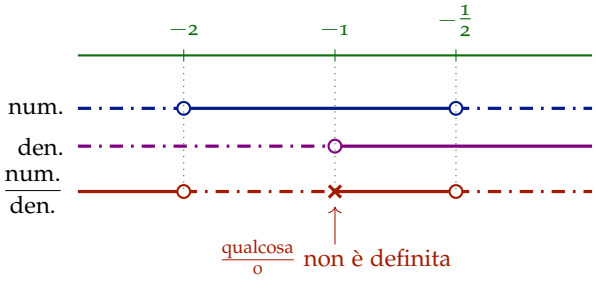
Denominatore: $x+1$.

$$\begin{aligned} x+1 < 0 &\iff x < -1 \\ x+1 = 0 &\iff x = -1 \\ x+1 > 0 &\iff x > -1 \end{aligned}$$



Combiniamo queste informazioni in un unico diagramma per mezzo della regola dei segni:

$$\frac{+}{+} = \frac{-}{-} = +\,, \qquad \frac{+}{-} = \frac{-}{+} = -\,, \qquad \text{\&c.}$$



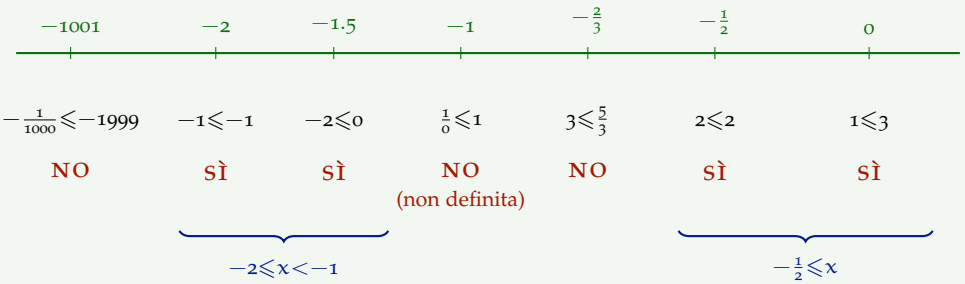
Infine leggiamo dal disegno la soluzione, ossia i valori di x per cui $\frac{\text{num.}}{\text{den.}} \leqslant 0$:

$$-2 \leqslant x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant x$$

□

Osservazione (Un altro modo di risolvere l'esercizio)
Si procede come segue.

1. Risolviamo l'equazione $\frac{1}{x+1} = 2x+3$ ignorando i problemi di annullamento del denominatore:
$$\frac{1}{x+1} = 2x+3 \implies 1 = (2x+3)(x+1)$$
$$\implies 2x^2+5x+2 = 0 \implies x = -2 \text{ o } x = -\tfrac{1}{2}$$
2. Troviamo i punti di annullamento dei denominatori. In questo caso c'è l'unico denominatore $x+1$, e $x+1 = 0 \implies x = -1$.
3. Individuiamo i numeri calcolati in (1) e (2) su una retta.
4. Verifichiamo la disuguaglianza data $\frac{1}{x+1} \leqslant 2x+3$ nei punti indicati sul diagramma e negli intervalli fra di essi, usando, per ciascun intervallo, un valore arbitrario in esso contenuto.



Come prima, la soluzione si legge da questo diagramma:

$$-2 \leqslant x < -1 \quad \text{oppure} \quad -\tfrac{1}{2} \leqslant x$$

§2.1 Esercizi

Test 1 (soluzione a p. 241)
Risolvi la disequazione $1 + \dfrac{1}{x} < 0$.

Test 2 (soluzione a p. 241)
Risolvi la disequazione $x^2 + 2x > 3$.

Test 3 (soluzione a p. 241)
Scrivi un'equazione di secondo grado le cui soluzioni siano 2 e 7.

§3 Proporzioni & percentuali

Notazione
La proporzione

$$A : B = C : D$$

equivale — vale a dire che è un modo alternativo di scrivere —

$$A \cdot D = B \cdot C$$

ossia, se non siamo troppo formali a proposito della possibilità che si annullino denominatori,

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$$

In pratica, quindi, i segni : in $A : B = C : D$ sono semplicemente dei diviso, o, che è lo stesso, delle linee di frazione. Spesso, ma non esclusivamente, si usa la scrittura $A : B = C : D$ per suggerire che A e C rappresentano parti il cui totale è rispettivamente B e D.

§3.1 Denominatori convenzionali: le percentuali

Nelle situazioni in cui si parla di una parte ed un tutto, frequentemente, si rappresenta la frazione $\frac{\text{parte}}{\text{tutto}}$ raffrontando il tutto ad una quantità convenzionale. Nascono così le percentuali, quando si usa 100 per indicare la totalità, e, per esempio, le parti per milione (ppm) quando il termine di paragone è 1 000 000 — queste ultime si usano spesso per indicare frazioni molto piccole, concentrazioni di impurità nei reagenti chimici, &c.

In pratica:

$$A \text{ è l'}x\%\text{ di } B \quad \Longleftrightarrow \quad A : B = x : 100 \quad \Longleftrightarrow \quad A \cdot 100 = B \cdot x$$

§3.2 Aumenti e diminuzioni

Incrementare una quantità dello x% significa aggiungere a questa quantità il suo x%, che, algebricamente, equivale a moltiplicare la quantità per $1 + \frac{x}{100}$. Simmetricamente, diminuire una quantità dello x% significa moltiplicarla per $1 - \frac{x}{100}$.

$$\text{Aumentare dello } x\% \quad \longleftrightarrow \quad \text{Moltiplicare per } 1 + \frac{x}{100}$$

$$\text{Diminuire dello } x\% \quad \longleftrightarrow \quad \text{Moltiplicare per } 1 - \frac{x}{100}$$

Esercizio
Il prezzo dell'oro sale del 10%, poi scende del 10%. In totale quale è stata la variazione percentuale del prezzo dell'oro?

Soluzione. L'esercizio coinvolge tre prezzi: un prezzo iniziale, uno intermedio, e uno finale. Abbiamo

$$\text{intermedio} = \text{iniziale} \cdot \underbrace{\left(1 + \tfrac{10}{100}\right)}_{1.1} \qquad \text{finale} = \text{intermedio} \cdot \underbrace{\left(1 - \tfrac{10}{100}\right)}_{0.9}$$

Combinando queste due relazioni otteniamo

$$\text{finale} = \text{iniziale} \cdot 1.1 \cdot 0.9 = \text{iniziale} \cdot 0.99$$

Il prezzo, in totale, è quindi sceso. Per trovare di quanto, dobbiamo scrivere 0.99 nella forma $1 - \frac{x}{100}$:

$$0.99 = 1 - \frac{x}{100} \quad \Longrightarrow \quad \frac{x}{100} = 1 - 0.99 \quad \Longrightarrow \quad x = 1$$

Di conseguenza, il prezzo è sceso dell'1%. □

Esercizio
Il prezzo del petrolio scende del 10%, poi sale del 10%: di quanto cambia in percentuale?

Soluzione. Qui crescita e decrescita sono scambiate rispetto all'esercizio precedente. Procediamo con lo stesso metodo.

$$\text{intermedio} = \text{iniziale} \cdot \underbrace{\left(1 - \tfrac{10}{100}\right)}_{0.9} \qquad \text{finale} = \text{intermedio} \cdot \underbrace{\left(1 + \tfrac{10}{100}\right)}_{1.1}$$

$$\text{finale} = \text{iniziale} \cdot 0.9 \cdot 1.1 = \text{iniziale} \cdot 0.99$$

Nuovamente moltiplichiamo il prezzo per 0.99, quindi il risultato è il medesimo dell'esercizio precedente. □

Osservazione
Non è un caso che questi due risultati coincidano. Infatti, abbiamo detto che incrementare o decrementare una quantità di una certa percentuale equivale a moltiplicarla per determinati fattori. Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, cambiando l'ordine dei fattori, il prodotto non cambia. Di conseguenza, cambiando l'ordine delle variazioni percentuali, il valore finale non cambia.

$$\begin{aligned}\text{finale} &= \text{iniziale} \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 1}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 2}}{100}\right) \\ &= \text{iniziale} \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 2}}{100}\right) \cdot \left(1 \pm \frac{\text{perc. 1}}{100}\right)\end{aligned}$$

§3.3 Percentuali facili da ricordare

$$\begin{aligned} 1\% &= \frac{1}{100} & 99\% &= \frac{99}{100} \\ 2\% &= \frac{1}{50} & 98\% &= \frac{49}{50} \\ 5\% &= \frac{1}{20} & 95\% &= \frac{19}{20} \\ 10\% &= \frac{1}{10} & 90\% &= \frac{9}{10} \\ 20\% &= \frac{1}{5} & 80\% &= \frac{4}{5} \\ 25\% &= \frac{1}{4} & 75\% &= \frac{3}{4} \\ 33\% &\approx \frac{1}{3} & 67\% &\approx \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$50\% = \frac{1}{2}$$

§3.4 Esercizi con due partizioni

Esercizio
Inizialmente i marziani verdi sono $\frac{2}{7}$ dei $\frac{3}{5}$ del totale dei marziani. Il 25% dei marziani emigra verso Venere, e, di questi, la metà è verde. Dopo la migrazione, che percentuale dei marziani rimasti è verde?

Soluzione. Questo esercizio concerne due partizioni dell'insieme di tutti i marziani. Una è la divisione VERDE–NON VERDE e una la divisione EMIGRATO–RIMASTO.

Possiamo quindi schematizzare la situazione in questo diagramma:

	verdi	non verdi
emigrati	VE	$\overline{\text{V}}\text{E}$
rimasti	$\text{V}\overline{\text{E}}$	$\overline{\text{V}}\overline{\text{E}}$

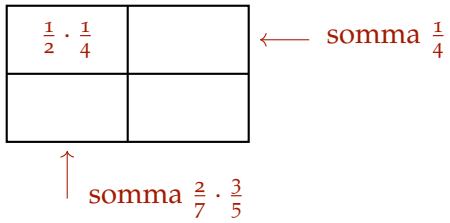
$\text{VE} =$ frazione di VERDI EMIGRATI
$\overline{\text{V}}\text{E} =$ " NON VERDI EMIGRATI
$\text{V}\overline{\text{E}} =$ " VERDI NON EMIGRATI
$\overline{\text{VE}} =$ " NON VERDI NON EMIGRATI

I dati dell'esercizio sono i seguenti:

- la frazione dei marziani verdi è $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$, ossia la somma dei numeri sulla prima colonna è $\frac{2}{7} \cdot \frac{3}{5}$;

- la frazione dei marziani emigrati è il 25%, ossia la somma dei numeri sulla prima riga è $\frac{1}{4}$;
- gli emigrati verdi sono la metà del 25%, ossia il numero nella casella in alto a sinistra è $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$.

Possiamo schematizzare questi dati così:



A questo punto non è difficile completare la tabella: il totale delle caselle deve fare 1; avendo calcolato le altre caselle, l'ultima è quindi obbligata a valere 1 meno la loro somma.

	verdi	non verdi
emigrati	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
rimasti	$\frac{13}{280}$	$\frac{197}{280}$

$$\overline{\text{V}}\text{E} = \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{8}$$
$$\text{V}\overline{\text{E}} = \tfrac{2}{7} \cdot \tfrac{3}{5} - \tfrac{1}{8}$$
$$\overline{\text{V}}\overline{\text{E}} = 1 - \tfrac{1}{8} - \tfrac{1}{8} - \tfrac{13}{280}$$

La domanda dell'esercizio è: *che percentuale dei marziani rimasti è verde?* Quando viene chiesta una percentuale, bisogna capire quali siano questi due elementi: la parte e il tutto. Nel nostro caso abbiamo

$$\text{tutto} = \text{marziani rimasti} = \text{V}\overline{\text{E}} + \overline{\text{V}}\overline{\text{E}} = \tfrac{3}{4} \qquad (*)$$
$$\text{parte} = \text{marziani rimasti che sono verdi} = \text{V}\overline{\text{E}} = \tfrac{13}{280}$$

Risolviamo la proporzione

$$\text{parte} : \text{tutto} = \text{percentuale} : 100$$
$$\text{percentuale} = \frac{13}{280} \cdot \frac{4}{3} \cdot 100 = \frac{130}{21} \approx 6.19$$

La risposta è quindi il 6.19%. □

Osservazione

$(*)$ Questo numero si può calcolare facendo $\frac{13}{280} + \frac{197}{280}$, però anche, più semplicemente, ricordando che

$$\text{VE} + \overline{\text{V}}\text{E} + \text{V}\overline{\text{E}} + \overline{\text{V}}\overline{\text{E}} = 1 \qquad \text{e} \qquad \text{VE} + \overline{\text{V}}\text{E} = \tfrac{1}{4}$$

da cui

$$\text{V}\overline{\text{E}} + \overline{\text{V}}\overline{\text{E}} = \left(\text{VE} + \overline{\text{V}}\text{E} + \text{V}\overline{\text{E}} + \overline{\text{V}}\overline{\text{E}}\right) - \left(\text{VE} + \overline{\text{V}}\text{E}\right) = 1 - \tfrac{1}{4} = \tfrac{3}{4}$$

§3.5 Esercizi

Test 11 (soluzione a p. 246)
A che percentuale corrisponde la frazione $\frac{7}{20}$?

Test 12 (soluzione a p. 246)
Calcola 40 aumentato del 15%.

Esercizio 13 (soluzione a p. 246)
In un collegio per studenti ci sono camere doppie e camere singole. Le doppie sono il doppio delle singole, il 10% delle doppie è al pian terreno, e il 20% delle singole è al pian terreno.

1. Quale percentuale delle camere del pian terreno è costituita da doppie?
2. Che percentuale degli studenti che abitano al pian terreno è in singola?
3. Le camere doppie non sono mai abitate da due studenti di sessi opposti. Inoltre, metà del totale delle camere è abitata da studentesse, e l'altra metà da studenti maschi. Diciamo che l'x% delle camere doppie è abitato da studentesse, e l'y% delle studentesse è in doppia. Che relazione (che formula) lega x e y?

Esercizio 14 (soluzione a p. 249)
A e B sono due elementi capaci di formare tanto il composto A_2B_3 quanto il composto AB_3. Se 0.20 mol di A_2B_3 corrispondono a una massa di 30.4 g, e 0.20 mol di AB_3 corrispondono a una massa di 20.0 g, quali sono le masse atomiche degli elementi A e B?

Esercizio 15 (soluzione a p. 250)
Un certo elemento M forma un bromuro di formula MBr_3. Nel bromuro, il bromo è presente per l'82.17% in peso. Determina la massa atomica dell'elemento M, sapendo che quella del bromo è 79.90 g/mol.

Esercizio 16 (soluzione a p. 250)
Un minerale contiene il 17% in peso di FeS_2 (pirite). Calcola la massa in grammi di minerale che contiene 135 g di ferro. Masse atomiche: ferro 55.85 g/mol, zolfo 32.06 g/mol.

§4 Modi di scrivere i numeri reali

§4.1 Notazioni algebriche

$$\sqrt{2}, \qquad 2\pi, \qquad \sin(30^\circ), \qquad e^{2.5}, \qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad 0$$

pro: notazione assolutamente precisa
contro: è difficile farsi un'idea concreta dei numeri

Es. $\sqrt{10}$ è più o meno di π? e^{π} è più o meno di $\pi + 20$?

§4.2 Notazione decimale

$$1.41, \qquad -42, \qquad 3.1415\ldots, \qquad 128\,000\,000, \qquad 0.000\,000\,012\,345$$

pro: elementare confrontare e manipolare numeri
contro: alcuni numeri devono essere troncati

Es. $\pi = 3.1415\ldots$, $\sqrt{2} = 1.4142\ldots$, $\frac{1}{3} = 0.3333\ldots$

scomodo gestire numeri molto grandi o piccoli

Es. $0.000\,000\,000\,000\,000\,000\,27$ contro $2.7 \cdot 10^{-19}$; il numero di Avogadro $\approx 6.02 \cdot 10^{23}$.

Nota
Conviene fare attenzione a non confondere il separatore decimale con il simbolo che separa gli elementi di una lista. Questa lista:

$$2.7,4,0.54,37.64,92$$

— sebbene scritta senza colori: $2.7, 4, 0.54, 37.64, 92$ — rimane leggibile senza ambiguità.

Se ora rimpiazziamo i punti con virgole, la lista diviene illeggibile:

$$2,7,4,0,54,37,64,92$$

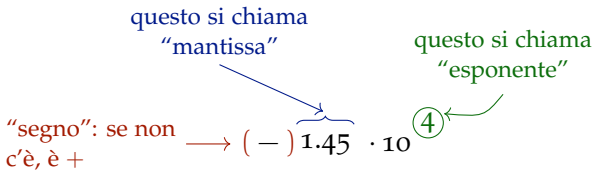
$2,7,4,0,54,37,64,92$? $2.7,4.0,54.37,64.92$

$2,7.4,0,54.37,64.92$ $2.7,4,0.54,37.64,92$

Per questa ragione, io, personalmente, preferisco usare il punto per separare le cifre decimali e la virgola per formare liste &c. Non è richiesto di conformarsi alla mia abitudine, è richiesto, tuttavia, di usare una notazione non ambigua.

§4.3 Notazione scientifica

$$1.45 \cdot 10^4, \qquad -3.21 \cdot 10^6, \qquad 4.5 \cdot 10^{-8}, \qquad 6.00 \cdot 10^{-16}$$



Regola
La mantissa deve essere < 10 e $\geqslant 1$. Detto in altri termini, la mantissa deve avere esattamente una cifra prima del punto decimale, e questa cifra non può essere 0.

È sempre possibile ricondursi alla situazione prescritta dalla regola moltiplicando e dividendo per opportune potenze di 10.

Es.

$$172.31 = 172.31 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 1.7231 \cdot 10^2$$
$$0.0092 = 0.0092 \cdot 10^3 \cdot 10^{-3} = 9.2 \cdot 10^{-3}$$
$$154 \cdot 10^9 = 154 \cdot 10^9 \cdot 10^{-2} \cdot 10^2 = 1.54 \cdot 10^{11}$$

pro: adatta a numeri molto grandi e molto piccoli; rappresenta chiaramente il numero di cifre significative (vedremo nel capitolo 7)
contro: leggermente più complicata della notazione decimale

§4.4 Notazione ingegneristica

$$14.5 \cdot 10^3, \qquad -3.21 \cdot 10^6, \qquad 45 \cdot 10^{-9}, \qquad 600 \cdot 10^{-18}$$

Non è fondamentale conoscerla, corrisponde al tasto ENG su molte calcolatrici.

Regola
La mantissa deve essere < 1000 e $\geqslant 1$; l'esponente deve essere multiplo di 3.

pro: si adatta bene ai prefissi SI

Es. $72 \cdot 10^6\,\mathrm{J} = 72\,\mathrm{MJ}$ ("megajoule"); $3.4 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s} = 3.4\,\mathrm{fs}$ ("femtosecondi").

Nota (Curiosità)
Come è ben noto ci sono frazioni che possono essere scritte in notazione decimale, e altre che richiederebbero una quantità illimitata di cifre:

$$\frac{7}{4} = 1.75 \qquad \text{ma} \qquad \frac{1}{3} = 0.3333\ldots \textit{ ad infinitum}$$

Che numero otteniamo dalla somma

$$0.7777\ldots + 0.2222\ldots = ?$$

Possiamo svolgere la somma in colonna:

$$\begin{array}{r} 0.7777\ldots + \\ 0.2222\ldots = \\ \hline 0.9999\ldots \end{array}$$

Oppure possiamo convertire i due numeri in frazioni:

$$\underbrace{0.7777\ldots}_{=7/9} + \underbrace{0.2222\ldots}_{=2/9} = \frac{7}{9} + \frac{2}{9} = \frac{9}{9} = 1$$

Quale è quindi il risultato: $0.9999\ldots$ oppure 1? La risposta è che il 9 periodico è vietato. L'operazione in colonna non è sbagliata: semplicemente $0.9999\ldots$ è un modo improprio per scrivere 1; lo si vieta, quindi, non perché fonte di contraddizione, ma solo per evitare che lo stesso numero (in questo esempio 1) abbia due scritture decimali diverse.

§4.5 Operazioni in notazione scientifica

§4.5.1 Somme e differenze

Calcoliamo $1.054 \cdot 10^{-9} - 7.3 \cdot 10^{-11}$.

1. Convertire il numero con l'esponente più piccolo in modo da portare i due esponenti a coincidere.

$$1.054 \cdot 10^{-9} - 7.3 \cdot 10^{-2} \cdot 10^{2} \cdot 10^{-11} = 1.054 \cdot 10^{-9} - 0.073 \cdot 10^{-9}$$

2. Sommare o sottrarre le mantisse.

$$1.054 \cdot 10^{-9} - 0.073 \cdot 10^{-9} = (1.054 - 0.073) \cdot 10^{-9} = \underbrace{0.981}_{\text{ops: non è più } \geqslant 1} \cdot 10^{-9}$$

3. Normalizzare il risultato.

$$0.981 \cdot 10^{-9} = \underbrace{0.981 \cdot 10}_{9.81} \cdot \underbrace{10^{-1} \cdot 10^{-9}}_{10^{-10}} = 9.81 \cdot 10^{-10}$$

§4.5.2 Prodotti e quozienti

Calcoliamo $4.7 \cdot 10^6 \cdot 3.1 \cdot 10^{-8}$.

1. Riordinare i fattori.

$$4.7 \cdot 10^6 \cdot 3.1 \cdot 10^{-8} = 4.7 \cdot 3.1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8}$$

2. Moltiplicare le mantisse e sommare gli esponenti.

$$4.7 \cdot 3.1 \cdot 10^6 \cdot 10^{-8} = \underbrace{14.57}_{\text{Ops: non è più } < 10} \cdot 10^{-2}$$

3. Normalizzare il risultato.

$$14.57 \cdot 10^{-2} = \underbrace{14.57 \cdot 10^{-1}}_{1.457} \cdot \underbrace{10 \cdot 10^{-2}}_{10^{-1}} = 1.457 \cdot 10^{-1}$$

§4.5.3 Radici quadrate

Calcoliamo $\sqrt{4.096 \cdot 10^{-9}}$.

1. Se l'esponente è dispari, moltiplicare per $1 = 10 \cdot 10^{-1}$.

$$\sqrt{4.096 \cdot 10^{-9}} = \sqrt{\underbrace{4.096 \cdot 10}_{40.96} \cdot \underbrace{10^{-1} \cdot 10^{-9}}_{10^{-10}}} = \sqrt{40.96 \cdot 10^{-10}}$$

2. Estrarre la radice della mantissa e dimezzare l'esponente.

$$\sqrt{40.96 \cdot 10^{-10}} = \underbrace{\sqrt{40.96}}_{6.4} \cdot \underbrace{\sqrt{10^{-10}}}_{10^{-5}} = 6.4 \cdot 10^{-5}$$

> **Nota**
> Nel calcolo di radici quadrate, non può capitare che sia necessario normalizzare.

§4.6 Esercizi

Test 17 (soluzione a p. 251)
Calcola in notazione scientifica $1.10 \cdot 10^4 - 1.4 \cdot 10^3$.

Test 18 (soluzione a p. 251)
Calcola $\sqrt{4.9 \cdot 10^{-5}}$ scrivendo il risultato in notazione scientifica.

§5 Come non sbagliare nei calcoli

In breve, non c'è modo. Gli errori sono inevitabili, concentrarsi su non sbagliare è futile, perché impossibile, e frustrante. Bisogna invece riconoscere gli errori, quando capitano, il prima possibile, fermarsi, e cercare il passaggio sbagliato.

Questo è difficile perché la psicologia umana ci spinge verso metodi inefficaci.

Primo: noi tendiamo verso la conclusione del lavoro, fermarsi per verificare i risultati — che è la cosa furba da fare — sembra distrarci dalla meta, e non lo facciamo.

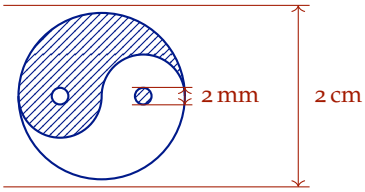
Secondo: noi abbiamo paura dell'incerto e troviamo conforto nella sicurezza. Per questo preferiamo applicare il procedimento che conosciamo — anche se magari è sbagliato! — piuttosto che chiederci "ma questa sarà davvero la via da seguire?" — e se poi la risposta è no? E se viene fuori che non so la via da seguire? Brrr.≈–

Terzo ed ultimo: siamo pigri. Una volta appreso un metodo per risolvere un problema, ci accontentiamo, e pare uno spreco studiare gli altri approcci che ci potrebbero essere — e invece più strade si conoscono maggiori sono le probabilità di trovare quella che ci porta a destinazione con poca fatica, e meno fatica nei calcoli significa che è più difficile sbagliare.

§5.1 Consigli utili

- Saper fare calcoli approssimati a mente e verificare i risultati di calcolatrici e computer — è anche a questo che serve saper fare le operazioni in notazione scientifica.
- Usare notazioni non ambigue — per esempio EVITARE 41,54 , 7 , 18
- Verificare le soluzioni delle equazioni — anche graficamente, numericamente.
- Provare le espressioni calcolate in astratto usando dei valori numerici concreti.
- Studiare casi particolari del problema.
- Accorgersi di risultati (anche intermedi) che non hanno senso: una parte $> 100\%$, un volume negativo, un numero di persone che non è intero, &c.
- Sfruttare semplificazioni del problema.

Esempio
Calcoliamo l'area tratteggiata nella figura qui sotto.



Dal momento che l'intera figura è contenuta in un quadrato di lato 2 cm è chiaro che qualunque area ci verrà alla fine dovrà essere $\leqslant 4\,\mathrm{cm}^2$: se questo non dovesse accadere, dobbiamo tornare indietro e scovare l'errore perché, così com'è per ora, la soluzione che abbiamo vale ZERO.

- Sfruttare simmetrie del problema.

Esempio
Calcoliamo, adesso, l'area di quella faccenda.

Beh, siccome il cerchio di diametro 2 cm è esattamente metà tratteggiato e metà bianco, l'area cercata è

$$A = \frac{1}{2}\,\text{raggio}^2 \cdot \pi = \frac{\pi}{2}\,\text{cm}^2 \approx 1.57\,\text{cm}^2$$

- Usare buon senso — $1\,\text{m}^3$ di neve non pesa un chilo, un uomo non ha 12 globuli rossi al litro di sangue, la probabilità di morire di cancro al polmone, per un fumatore, non è del 70%, una mummia egizia non è vecchia di 170 000 anni, &c.

§5.2 Esercizi

In ciascuno degli esercizi seguenti c'è una soluzione già svolta. Alcune sono giuste, altre sbagliate: identifica quelle sbagliate, trova l'errore e correggilo. Prima di rifare i conti, prova a smascherare l'errore con uno dei consigli sopra — un valore numerico concreto, un caso particolare, una verifica della soluzione, il buon senso.

Esercizio 19 (soluzione a p. 251)
Semplifica $(x+y)^3-(x-y)^3$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}(x+y)^3-(x-y)^3 &= \big((x+y)-(x-y)\big)\big((x+y)^2+(x+y)(x-y)+(x-y)^2\big)\\ &= 2y(x^2+y^2+2xy+x^2-y^2+x^2+y^2-2xy)\\ &= 2y(2x^2+y^2)\\ &= 4x^2y+2y^3\end{aligned}$$

Esercizio 20 (soluzione a p. 252)
Se una spuma scontata del 20% *costa la metà di un etto di cecina, al prezzo di un chilo di cecina quante spume compro senza sconti?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Mezzo etto di cecina costa quanto 0.8 spume, quindi un chilo di cecina, che sono venti *mezzi etti*, costa quanto $20 \cdot 0.8$ spume, ossia 16 spume.

Esercizio 21 (soluzione a p. 252)
Risolvi l'equazione $(x+2)^2 + x = 0$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}(x+2)^2 + x &= 0\\ x^2 + 2x + 4 + x &= 0\\ x^2 + 3x + 4 &= 0\\ \Delta = 9 - 16 &< 0\end{aligned}$$

quindi l'equazione non ha soluzioni.

Esercizio 22 (soluzione a p. 252)
Briga e Magonza si trovano a 500 km *di distanza. Un brigante parte da Briga a mezzogiorno e viaggia verso Magonza ai* 160 km/h. *Un mago parte da Magonza all'una in punto e viaggia verso Briga ai* 180 km/h. *A che ora si incontrano?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA All'una il brigante ha percorso 160 km, quindi restano altri 340 km di separazione fra i due personaggi. Ora, entrambi sono in moto, e si avvicinano alla velocità combinata di $(160 + 180)$ km/h, ossia 340 km/h. I due personaggi impiegano quindi un'ora per incontrarsi e, di conseguenza, si incontrano alle due.

Esercizio 23 (soluzione a p. 253)
All'una una colonia di batteri contiene un milione di individui, e il numero di individui raddoppia ogni ora. Quanti individui ci sono alle dieci? La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Il numero di individui all'ora x è 2^x milioni. Quindi alle dieci ce ne sono 2^{10} milioni, ossia 1 024 000 000.

Esercizio 24 (soluzione a p. 253)
Risolvi la disequazione $x^3 > x$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned} x^3 &> x \\ x^2 &> 1 \\ x^2 - 1 &> 0 \\ (x+1)(x-1) &> 0 \end{aligned}$$

Quindi sono soluzioni tutte le x con $-1 < x < 1$.

Esercizio 25 (soluzione a p. 254)
Risolvi l'equazione

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 2x - 2$$

La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{x-1} &= 2x-2 \\ x^2 - 1 &= (2x-2)(x-1) \\ x^2 - 1 &= 2x^2 - 4x + 2 \\ 0 &= x^2 - 4x + 3 \\ x_{1,2} &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Esercizio 26 (soluzione a p. 254)
Risolvi il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + 3z = 4 \\ x + 4y + 9z = 16 \end{cases}$$

La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Sottraendo la prima equazione dalle altre due, e poi il triplo della seconda dalla terza:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ 3y + 8z = 15 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 2z = 3 \\ 2z = 6 \end{cases}$$

Da cui $z = 3$, $y = -3$, $x = 1$.

Esercizio 27 (soluzione a p. 255)
Risolvi l'equazione $\sqrt{x+\sqrt{2x}} = x$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{2x}} &= x \\
x+\sqrt{2x} &= x^2 \\
\sqrt{2x} &= x^2 - x \\
\sqrt{2x} &= x(x-1) \\
2x &= x^2(x^2-2x+1) \\
0 &= x(x^3-2x^2+x-2) \\
0 &= x(x^2+1)(x-2)
\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Esercizio 28 (soluzione a p. 255)
La velocità media lungo un tragitto è definita come la lunghezza del tragitto divisa per il tempo impiegato a percorrerlo. Un'auto viaggia ai 60 km/h *per* 100 km, *poi ai* 120 km/h *per altri* 100 km, *completando così un tragitto di* 200 km. *A che velocità media lo ha percorso?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA La velocità media è

$$\frac{60\,\mathrm{km/h} + 120\,\mathrm{km/h}}{2}$$

quindi 90 km/h.

INTERVALLO	PROVA	
$x < -2$	$-0.2 \nleqslant -9$	✗
$-2 < x < 0$	$-2 \leqslant 0$	✓
$0 < x < 1$	$20 \nleqslant 1.1$	✗
$1 < x$	$0.2 \leqslant 11$	✓

In $x = -2$ e in $x = 1$ la disequazione è soddisfatta, perché la diseguaglianza è larga; in $x = 0$ non ha senso, perché si annulla il denominatore. In conclusione

$$-2 \leqslant x < 0 \qquad \text{oppure} \qquad 1 \leqslant x$$

Nota importante
Attenzione ai segni: $\leqslant$ in corrispondenza delle soluzioni -2 e 1, ma $<$ in corrispondenza del punto $x = 0$, dove si annulla il denominatore e la disequazione non è nemmeno definita.

Test 11 (p. 23)
A che percentuale corrisponde la frazione $\frac{7}{20}$?

Soluzione. Una percentuale è una frazione con denominatore 100. Siccome $20 \cdot 5 = 100$, basta moltiplicare numeratore e denominatore per 5:

$$\frac{7}{20} = \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{35}{100} = 35\%$$

(in alternativa si divide: $7 \div 20 = 0.35$, e si sposta la virgola di due posti).

Test 12 (p. 23)
Calcola 40 aumentato del 15%.

Soluzione. Aumentare del 15% significa moltiplicare per $1 + \frac{15}{100} = 1.15$:

$$40 \cdot 1.15 = 46$$

(a mente: il 10% di 40 è 4, il 5% è la metà, cioè 2; in tutto $40 + 4 + 2 = 46$).

Esercizio 13 (p. 23)
In un collegio per studenti ci sono camere doppie e camere singole. Le doppie sono il doppio delle singole, il 10% delle doppie è al pian terreno, e il 20% delle singole è al pian terreno.

1. Quale percentuale delle camere del pian terreno è costituita da doppie?
2. Che percentuale degli studenti che abitano al pian terreno è in singola?
3. Le camere doppie non sono mai abitate da due studenti di sessi opposti. Inoltre, metà del totale delle camere è abitata da studentesse, e l'altra metà da studenti maschi. Diciamo che l'x% delle camere doppie è abitato da

> studentesse, e l'y% delle studentesse è in doppia. Che relazione (che formula) lega x e y?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Abbiamo due distinzioni: SINGOLA–DOPPIA e TERRENO–ALTO.

	singola	doppia
alto	AS	AD
terreno	TS	TD

$$\begin{aligned} \text{AS} &= \text{frazione di SINGOLE in ALTO} \\ \text{AD} &= \text{" DOPPIE in ALTO} \\ \text{TS} &= \text{" SINGOLE al p. TERRENO} \\ \text{TD} &= \text{" DOPPIE al p. TERRENO} \end{aligned}$$

Il testo dice che la colonna $\text{AD} + \text{TD}$ è il doppio di $\text{AS} + \text{TS}$. Scrivendo $\text{D} = \text{AD} + \text{TD}$ e $\text{S} = \text{AS} + \text{TS}$ abbiamo:

$$\begin{cases} \text{D} = 2\text{S} \\ \text{D} + \text{S} = 1 \end{cases} \implies \qquad \text{S} = \frac{1}{3} \qquad \text{D} = \frac{2}{3}$$

Inoltre il 10% delle doppie è al pian terreno

$$\text{TD} : \text{D} = 10 : 100 \qquad \implies \qquad \text{TD} = \frac{2}{30}$$

e il 20% delle singole è al pian terreno

$$\text{TS} : \text{S} = 20 : 100 \qquad \implies \qquad \text{TS} = \frac{2}{30}$$

È quindi facile completare la tabella:

	singola	doppia
alto	$\frac{8}{30}$	$\frac{18}{30}$
terreno	$\frac{2}{30}$	$\frac{2}{30}$

La percentuale richiesta è definita da

$$\text{totale} = \text{TS} + \text{TD} = \frac{4}{30} \qquad \text{parte} = \text{TD} = \frac{2}{30}$$

La risposta è quindi 50%. □

Soluzione della domanda 2. Per rispondere a questa domanda, prestiamo attenzione al fatto che si parla di studenti e non di camere. Le camere singole sono abitate da uno studente, e le doppie da due. Se denotiamo con C il numero totale delle camere, vediamo che

$$\begin{aligned} \text{st. al p. terreno in SINGOLA} &= \text{C} \cdot \text{TS} \cdot 1 = \text{C} \cdot \tfrac{2}{30} \\ \text{st. al p. terreno in DOPPIA} &= \text{C} \cdot \text{TD} \cdot 2 = \text{C} \cdot \tfrac{4}{30} \end{aligned}$$

Quindi

$$\text{st. al p. terreno totali} = C \cdot TS \cdot 3 = C \cdot \tfrac{6}{30}$$

Da cui si ricava la percentuale richiesta

$$\frac{\text{st. al p. terreno in singola}}{\text{st. al p. terreno totali}} = \frac{\cancel{C} \cdot \frac{2}{30}}{\cancel{C} \cdot \frac{6}{30}} = \frac{2}{6} \approx 33\%$$

□

Soluzione della domanda 3. Ora il totale delle camere si divide lungo due nuovi assi: MASCHILE–FEMMINILE e SINGOLA–DOPPIA.

	singole	doppie	
femminili	SF	DF	$\frac{1}{2}$
maschili	SM	DM	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

SF = fraz. di singole femminili sul tot.
DF = " doppie femminili "
SM = " singole maschili "
DM = " doppie maschili "

I totali di colonna $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{3}$ sono quelli calcolati alla domanda 1.

Il testo ci dice che

$$x : 100 = DF : \underbrace{(DM + DF)}_{=\frac{2}{3}}$$

quindi

$$DF = \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100}$$

Per quanto riguarda y, indicando di nuovo con C il totale delle camere, abbiamo

$$\text{num. studentesse in doppia} = C \cdot DF \cdot 2$$
$$\text{num. studentesse} = C \cdot DF \cdot 2 + C \cdot SF = C \cdot (DF \cdot 2 + SF)$$

$$y : 100 = \cancel{C} \cdot DF \cdot 2 : \cancel{C} \cdot (DF \cdot 2 + SF) \qquad \Longrightarrow \qquad y = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + SF}$$

Il nostro scopo è capire come si calcola y a partire da x. Ora sappiamo andare da x a DF, ma per poi ottenere y vediamo che serve anche SF. Occorre quindi un modo per calcolare SF o direttamente da x, o da DF. Per fortuna sappiamo che metà delle camere sono femminili:

$$SF + DF = \frac{1}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad SF = \frac{1}{2} - DF$$

Mettendo tutto insieme otteniamo

$$y = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + SF} = 100 \cdot \frac{DF \cdot 2}{DF \cdot 2 + \frac{1}{2} - DF} = \cancel{100} \cdot \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{x}{\cancel{100}} \cdot 2}{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{x}{100}} = \frac{8x}{3 + 4 \cdot \frac{x}{100}}$$

□

Nota importante
Per verificare i calcoli possiamo risolvere separatamente un caso particolare dell'esercizio, e controllare che, in questo caso almeno, la formula funzioni. Immaginiamo, per esempio, che tutte le studentesse siano in doppia: dovrà quindi venirci $y = 100$. La situazione è questa:

	singole	doppie	
femminili	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
maschili	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	

Quindi

$$\frac{\text{DF}}{\text{tot. doppie}} = \frac{1/2}{2/3} = \frac{3}{4}$$

ossia i $\frac{3}{4}$ delle doppie sono femminili, e $x = 75$. Se non abbiamo sbagliato, mettendo $x = 75$ nella nostra formula, dovremmo ottenere $y = 100$. Proviamo:

$$y = \frac{8x}{3 + 4\frac{x}{100}} = \frac{8 \cdot 75}{3 + 4 \cdot \frac{75}{100}} = \frac{600}{3 + \frac{300}{100}} = 100 \qquad \text{OK}$$

Esercizio 14 (p. 23)
A e B sono due elementi capaci di formare tanto il composto A_2B_3 quanto il composto AB_3. Se 0.20 mol di A_2B_3 corrispondono a una massa di 30.4 g, e 0.20 mol di AB_3 corrispondono a una massa di 20.0 g, quali sono le masse atomiche degli elementi A e B?

Soluzione. Scriviamo i due dati:

$$0.20\,\text{mol}\ A_2B_3 = 30.4\,\text{g}$$
$$0.20\,\text{mol}\ AB_3 = 20.0\,\text{g}$$

La differenza fra le due righe elimina la parte B_3, perché in entrambe ce n'è la medesima quantità:

$$0.20\,\text{mol}\ A = 30.4\,\text{g} - 20.0\,\text{g} = 10.4\,\text{g}$$

e, sostituendo nella seconda riga,

$$0.20\,\text{mol}\ B_3 = 20.0\,\text{g} - 10.4\,\text{g} = 9.6\,\text{g}$$

Ma 0.20 mol di B_3 contengono tre volte tanto ossia 0.60 mol di atomi di B. Le masse atomiche sono quindi

$$\text{A}: \quad \frac{10.4\,\text{g}}{0.20\,\text{mol}} = 52\,\frac{\text{g}}{\text{mol}} \qquad \text{B}: \quad \frac{9.6\,\text{g}}{0.60\,\text{mol}} = 16\,\frac{\text{g}}{\text{mol}}$$

Nota importante
Sulla tavola periodica si riconoscono il cromo (52.00 g/mol) e l'ossigeno (16.00 g/mol): i due composti sono l'ossido cromico Cr_2O_3 e il triossido di cromo CrO_3. Ritrovare due elementi esistenti è la verifica che il conto è giusto.

Esercizio 15 (p. 23)
Un certo elemento M forma un bromuro di formula MBr_3. Nel bromuro, il bromo è presente per l'82.17% in peso. Determina la massa atomica dell'elemento M, sapendo che quella del bromo è 79.90 g/mol.

Soluzione. Consideriamo una mole di bromuro: contiene una mole di atomi di M e tre moli di atomi di bromo, cioè $3 \cdot 79.90\,\mathrm{g} = 239.70\,\mathrm{g}$ di bromo. Se il bromo è l'82.17% del peso, M è il restante $100\% - 82.17\% = 17.83\%$, e le masse stanno nella stessa proporzione delle percentuali:

$$x : 239.70\,\mathrm{g} = 17.83 : 82.17$$

da cui

$$x = 239.70\,\mathrm{g} \cdot \frac{17.83}{82.17} = 52.01\,\mathrm{g}$$

Questa è la massa di una mole di atomi di M, quindi la massa atomica di M è circa 52.0 g/mol.

Sulla tavola periodica è il cromo (52.00 g/mol): il composto è il bromuro di cromo(III), $CrBr_3$.

Esercizio 16 (p. 23)
Un minerale contiene il 17% in peso di FeS_2 (pirite). Calcola la massa in grammi di minerale che contiene 135 g di ferro. Masse atomiche: ferro 55.85 g/mol, zolfo 32.06 g/mol.

Soluzione. Una mole di FeS_2 pesa

$$55.85\,\mathrm{g} + 2 \cdot 32.06\,\mathrm{g} = 119.97\,\mathrm{g}$$

e contiene 55.85 g di ferro. Nella pirite, quindi, massa di ferro e massa di pirite stanno sempre nella proporzione 55.85 : 119.97. La massa y di pirite che contiene 135 g di ferro è data da

$$135\,\mathrm{g} : y = 55.85 : 119.97 \qquad \Longrightarrow \qquad y = 135\,\mathrm{g} \cdot \frac{119.97}{55.85} = 290.0\,\mathrm{g}$$

La pirite è il 17% del minerale, quindi la massa z di minerale è data da

$$290.0\,\mathrm{g} : z = 17 : 100 \qquad \Longrightarrow \qquad z = 290.0\,\mathrm{g} \cdot \frac{100}{17} = 1706\,\mathrm{g}$$

cioè circa 1.7 kg.

Il dato del 17% ha solo due cifre significative (capitolo 7), per cui un risultato onesto è "circa 1.7 kg" — d'altro canto, sembra irrealistico che la frazione di pirite in un minerale sia costante con quattro cifre di precisione. Il libro da cui è tratto l'esercizio riporta 1704 g, che è quello che si ottiene arrotondando la massa atomica dello zolfo a 32.00 g/mol.

Test 17 (p. 27)
Calcola in notazione scientifica $1.10 \cdot 10^4 - 1.4 \cdot 10^3$.

Soluzione. Per sommare o sottrarre conviene portare i due numeri allo stesso esponente, scegliendo il più grande dei due:

$$1.4 \cdot 10^3 = 0.14 \cdot 10^4$$

A questo punto

$$1.10 \cdot 10^4 - 0.14 \cdot 10^4 = (1.10 - 0.14) \cdot 10^4 = 0.96 \cdot 10^4 = 9.6 \cdot 10^3$$

(nell'ultimo passaggio si rimette la mantissa fra 1 e 10).

Test 18 (p. 27)
Calcola $\sqrt{4.9 \cdot 10^{-5}}$ scrivendo il risultato in notazione scientifica.

Soluzione. La radice quadrata di una potenza di dieci si calcola facilmente se l'esponente è pari. Riscriviamo quindi il numero spostando una unità dall'esponente alla mantissa:

$$4.9 \cdot 10^{-5} = 49 \cdot 10^{-6}$$

Ora

$$\sqrt{49 \cdot 10^{-6}} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{10^{-6}} = 7 \cdot 10^{-3}$$

Esercizio 19 (p. 29)
Semplifica $(x+y)^3 - (x-y)^3$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}(x+y)^3 - (x-y)^3 &= \big((x+y)-(x-y)\big)\big((x+y)^2 + (x+y)(x-y) + (x-y)^2\big) \\ &= 2y(x^2 + y^2 + 2xy + x^2 - y^2 + x^2 + y^2 - 2xy) \\ &= 2y(2x^2 + y^2) \\ &= 4x^2y + 2y^3\end{aligned}$$

Soluzione. Sbagliata. Ce ne accorgiamo subito provando l'espressione con dei valori concreti, per esempio, prendendo $x = y = 1$ otteniamo

$$(1+1)^3 - (1-1)^3 = 8 \qquad \text{mentre} \qquad 4 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 6$$

L'errore è nel terzo passaggio. Dentro la parentesi i termini x^2 sono tre, non due:

$$x^2 + y^2 + \cancel{2xy} + x^2 - \cancel{y^2} + x^2 + \cancel{y^2} - \cancel{2xy} = 3x^2 + y^2$$

quindi

$$(x+y)^3 - (x-y)^3 = 2y(3x^2 + y^2) = 6x^2y + 2y^3$$

(e con $x = y = 1$ viene $6 + 2 = 8$: ora torna).

Esercizio 20 (p. 30)
Se una spuma scontata del 20% costa la metà di un etto di cecina, al prezzo di un chilo di cecina quante spume compro senza sconti? La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Mezzo etto di cecina costa quanto 0.8 spume, quindi un chilo di cecina, che sono venti *mezzi etti*, costa quanto $20 \cdot 0.8$ spume, ossia 16 spume.

Soluzione. Giusta. Una spuma scontata del 20% costa 0.8 volte una spuma a prezzo pieno, e costa quanto mezzo etto di cecina. Un chilo sono 10 etti, cioè 20 mezzi etti, quindi

$$1\,\text{kg di cecina} = 20 \cdot 0.8 \text{ spume} = 16 \text{ spume}$$

Esercizio 21 (p. 30)
Risolvi l'equazione $(x+2)^2 + x = 0$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned} (x+2)^2 + x &= 0 \\ x^2 + 2x + 4 + x &= 0 \\ x^2 + 3x + 4 &= 0 \\ \Delta = 9 - 16 &< 0 \end{aligned}$$

quindi l'equazione non ha soluzioni.

Soluzione. Sbagliata. Senza rifare il conto si vede che l'equazione *deve* avere soluzioni: il primo membro cambia segno fra $x = -2$ e $x = 0$,

$$(-2+2)^2 + (-2) = -2 \text{ negativo} \qquad (0+2)^2 + 0 = 4 \text{ positivo}$$

quindi, mentre x va da -2 a 0, il suo valore deve passare per zero.

L'errore è nel quadrato del binomio: $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$, non $x^2 + 2x + 4$. Rifacendo il conto:

$$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad (x+1)(x+4) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = -1 \text{ oppure } x = -4$$

(e infatti -1 sta fra -2 e 0, come avevamo previsto).

Esercizio 22 (p. 30)
Briga e Magonza si trovano a 500 km *di distanza. Un brigante parte da Briga a mezzogiorno e viaggia verso Magonza ai* 160 km/h. *Un mago parte da Magonza all'una in punto e viaggia verso Briga ai* 180 km/h. *A che ora si incontrano?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA All'una il brigante ha percorso 160 km, quindi restano altri 340 km di separazione fra i due personaggi. Ora, entrambi sono in moto, e si avvicinano alla velocità combinata di $(160 + 180)$ km/h, ossia 340 km/h. I due personaggi impiegano quindi un'ora per incontrarsi e, di conseguenza, si

incontrano alle due.

Soluzione. Giusta: si incontrano alle due. Per controllo, vediamo dove si trovano a quell'ora: il brigante viaggia da due ore e ha percorso 320 km, il mago da un'ora e ne ha percorsi 180. In tutto $320\,\text{km} + 180\,\text{km} = 500\,\text{km}$, cioè l'intera distanza fra le due città.

Esercizio 23 (p. 30)
All'una una colonia di batteri contiene un milione di individui, e il numero di individui raddoppia ogni ora. Quanti individui ci sono alle dieci? La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Il numero di individui all'ora x è 2^x milioni. Quindi alle dieci ce ne sono 2^{10} milioni, ossia 1 024 000 000.

Soluzione. Sbagliata. La formula proposta non rispetta il dato del testo: all'ora $x = 1$ darebbe $2^1 = 2$ milioni di batteri, mentre il testo dice che all'una ce n'è *un* milione. (Un caso particolare — l'ora di partenza — basta a smascherarla.)

Dall'una alle dieci passano 9 ore, cioè 9 raddoppi: il numero di individui all'ora x è 2^{x-1} milioni, e alle dieci

$$2^9 \text{ milioni} = 512\,000\,000$$

Esercizio 24 (p. 30)
Risolvi la disequazione $x^3 > x$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned} x^3 &> x \\ x^2 &> 1 \\ x^2 - 1 &> 0 \\ (x+1)(x-1) &> 0 \end{aligned}$$

Quindi sono soluzioni tutte le x con $-1 < x < 1$.

Soluzione. Sbagliata. Che qualcosa non vada si vede con $x = 10$: soddisfa la disequazione, perché $10^3 = 1000 > 10$, ma non sta fra -1 e 1. Gli errori sono due.

1. Il passaggio da $x^3 > x$ a $x^2 > 1$ divide per x, e questo conserva il verso della disuguaglianza solo se $x > 0$.
2. Anche così, $(x+1)(x-1) > 0$ ha per soluzione $x < -1$ oppure $x > 1$ (i due fattori hanno lo stesso segno), non $-1 < x < 1$.

Il modo corretto è non dividere, ma portare tutto a primo membro e fattorizzare:

$$x^3 - x > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x(x+1)(x-1) > 0$$

I valori critici sono -1, 0, 1, e provando un valore per intervallo si trova

$$-1 < x < 0 \qquad \text{oppure} \qquad x > 1$$

Esercizio 25 (p. 31)
Risolvi l'equazione

$$\frac{x^2-1}{x-1} = 2x-2$$

La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}\frac{x^2-1}{x-1} &= 2x-2\\ x^2-1 &= (2x-2)(x-1)\\ x^2-1 &= 2x^2-4x+2\\ 0 &= x^2-4x+3\\ x_{1,2} &= \frac{4\pm\sqrt{4}}{2}\end{aligned}$$

Le soluzioni sono quindi $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Soluzione. Sbagliata, anche se il procedimento algebrico è corretto: la soluzione $x_1 = 1$ non è accettabile, perché annulla il denominatore di $(x^2-1)/(x-1)$, e in $x = 1$ l'equazione non ha senso. L'unica soluzione è

$$x = 3$$

(verifica: $(9-1)/(3-1) = 4$ e $2\cdot 3 - 2 = 4$). Quando si moltiplica per un denominatore, i valori che lo annullano vanno esclusi alla fine: è uno dei motivi per cui conviene sempre verificare le soluzioni.

Esercizio 26 (p. 31)
Risolvi il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ x+2y+3z=4\\ x+4y+9z=16\end{cases}$$

La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA Sottraendo la prima equazione dalle altre due, e poi il triplo della seconda dalla terza:

$$\begin{cases} x+y+z=1\\ y+2z=3\\ 3y+8z=15\end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=1\\ y+2z=3\\ 2z=6\end{cases}$$

Da cui $z = 3$, $y = -3$, $x = 1$.

Soluzione. Giusta. La verifica più rapida è sostituire nelle tre equazioni di partenza:

$$1-3+3=1 \qquad 1-6+9=4 \qquad 1-12+27=16 \qquad \text{OK}$$

Esercizio 27 (p. 32)
Risolvi l'equazione $\sqrt{x+\sqrt{2x}} = x$. La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA

$$\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{2x}} &= x \\
x+\sqrt{2x} &= x^2 \\
\sqrt{2x} &= x^2 - x \\
\sqrt{2x} &= x(x-1) \\
2x &= x^2(x^2-2x+1) \\
0 &= x(x^3-2x^2+x-2) \\
0 &= x(x^2+1)(x-2)
\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.

Soluzione. Giusta. Elevare al quadrato può introdurre soluzioni in più, quindi qui la verifica è d'obbligo:

$$x = 0: \quad \sqrt{0+0} = 0 \qquad\qquad x = 2: \quad \sqrt{2+\sqrt{4}} = \sqrt{4} = 2 \qquad \text{OK}$$

Il fattore $x^2 + 1$ non si annulla mai, quindi non ci sono altre soluzioni.

Esercizio 28 (p. 32)
La velocità media lungo un tragitto è definita come la lunghezza del tragitto divisa per il tempo impiegato a percorrerlo. Un'auto viaggia ai 60 km/h *per* 100 km*, poi ai* 120 km/h *per altri* 100 km*, completando così un tragitto di* 200 km*. A che velocità media lo ha percorso?* La soluzione proposta è giusta o sbagliata?

SOLUZIONE PROPOSTA La velocità media è

$$\frac{60\,\text{km/h} + 120\,\text{km/h}}{2}$$

quindi 90 km/h.

Soluzione. Sbagliata. Il testo stesso dice come si calcola la velocità media: lunghezza del tragitto diviso tempo impiegato. Il primo tratto richiede $\frac{100}{60}$ h, il secondo $\frac{100}{120}$ h, quindi

$$\text{velocità media} = \frac{200\,\text{km}}{\frac{100}{60}\,\text{h} + \frac{100}{120}\,\text{h}} = \frac{200\,\text{km}}{2.5\,\text{h}} = 80\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

L'errore consiste nell'applicare un procedimento — la media delle due velocità — contrario alla definizione data nel testo dell'esercizio. (La media semplice andrebbe bene se i due tratti durassero lo stesso *tempo*; qui hanno la stessa *lunghezza*, e l'auto passa più tempo nel tratto lento.)