§6 Unità di misura

Le unità di misura fisiche sono grandezze convenzionali fissate per ogni grandezza fisica (es. il metro per la lunghezza, il newton per la forza, &c.). Il sistema SI (fr. *Système International*) prevede sette unità fondamentali.

m	metro	lunghezza
kg	chilogrammo	massa
s	secondo	tempo
A	ampere	intensità di corrente elettrica
K	kelvin	temperatura
mol	mole	quantità di sostanza
cd	candela	intensità luminosa

Le unità derivate si ottengono moltiplicando unità fondamentali.

Esempio

$$\text{forza} = \text{massa} \cdot \text{accelerazione}$$
$$N = kg \cdot m \cdot s^{-2}$$

$$\text{lavoro} = \text{forza} \cdot \text{spostamento}$$
$$J = N \cdot m = kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$$

$$\text{pressione} = \text{forza} \ / \ \text{superficie}$$
$$Pa = N \cdot m^{-2} = kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$$
Pa: "pascal"; $1/m^2 = m^{-2}$

$$\text{potenza} = \text{lavoro} \ / \ \text{tempo}$$
$$W = J \cdot s^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$$

$$\text{potenza} = \text{corrente} \cdot \text{tensione}$$
$$W = A \cdot V$$
da cui
$$V = W \cdot A^{-1} = kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$$

§6.1 Prefissi moltiplicatori

Moltiplicano le unità per una potenza di 10.

da	10	deca	d	10^{-1}	deci
h	10^2	etto	c	10^{-2}	centi
k	10^3	chilo	m	10^{-3}	milli
M	10^6	mega	µ	10^{-6}	micro
G	10^9	giga	n	10^{-9}	nano
T	10^{12}	tera	p	10^{-12}	pico
P	10^{15}	peta	f	10^{-15}	femto
E	10^{18}	exa	a	10^{-18}	atto
Z	10^{21}	zetta	z	10^{-21}	zepto
Y	10^{24}	yotta	y	10^{-24}	yocto

Nota importante
Occhio: K kelvin, maiuscola — k chilo, minuscola.

Nota: Z, Y, z, y sono stati introdotti nel 1991 e sono più rari — non serve ricordarli.

§6.2 Equivalenze

Una grandezza fisica si esprime come "numero · unità di misura". In generale, la medesima grandezza si può esprimere in più modi — es. $10\,\mathrm{cm} = 0.1\,\mathrm{m}$. Vediamo come convertire fra unità di misura omologhe.

Esercizio (Metodo)
Converti $3.7\,\mathrm{N/cm^2}$ in kPa.

Soluzione. Scriviamo l'equazione

$$3.7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm^2}} = x\,\mathrm{kPa}$$

Il nostro scopo è ora semplificare le unità, quindi conviene rimpiazzare i pascal — che non compaiono a sinistra — con la loro definizione

$$3.7\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{cm^2}} = x\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{m^2}}$$

Espandiamo i prefissi

$$3.7\,\frac{\mathrm{N}}{\underbrace{(10^{-2}\,\mathrm{m})^2}_{10^{-4}\,\mathrm{m^2}}} = x\,\frac{10^3\,\mathrm{N}}{\mathrm{m^2}}$$

Le unità si trattano algebricamente come se fossero variabili moltiplicate, facciamo quindi le semplificazioni algebriche

$$3.7\,\frac{\cancel{\mathrm{N}}}{10^{-4}\,\cancel{\mathrm{m^2}}} = x\,\frac{10^3\,\cancel{\mathrm{N}}}{\cancel{\mathrm{m^2}}} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 37$$

Quindi $3.7\,\mathrm{N/cm^2} = 37\,\mathrm{kPa}$. □

Chiaramente, in pratica, i calcoli si eseguono mentalmente.

Esempio (Altre conversioni)

$$0.071\,\mathrm{mA} = ?\,\mu\mathrm{A}$$
$$0.071\,\mathrm{mA} = x\,\mu\mathrm{A}$$
$$0.071 \cdot 10^{-3}\,\cancel{\mathrm{A}} = x \cdot 10^{-6}\,\cancel{\mathrm{A}}$$
$$x = 0.071 \cdot 10^{3} = 71$$
$$0.071\,\mathrm{mA} = 71\,\mu\mathrm{A}$$

$\mathrm{L} = (\mathrm{dm})^3, \quad \mathrm{h} = 60\,\mathrm{min}$

$$140.3\,\tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} = ?\,\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$$
$$140.3\,\tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} = x\,\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$$
$$140.3\,\frac{(10^{-1}\,\mathrm{m})^3}{\mathrm{min}} = x\,\frac{\mathrm{m}^3}{60\,\mathrm{min}}$$
$$140.3\,\frac{10^{-3}\,\cancel{\mathrm{m}^3}}{\cancel{\mathrm{min}}} = x\,\frac{\cancel{\mathrm{m}^3}}{60\,\cancel{\mathrm{min}}}$$
$$x = 60 \cdot 140.3 \cdot 10^{-3} = 8.418$$
$$140.3\,\tfrac{\mathrm{L}}{\mathrm{min}} = 8.418\,\tfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}$$

§6.3 Operazioni fra grandezze fisiche

Le grandezze fisiche si comportano quasi come numeri, salvo che non tutte le operazioni sono lecite.

- **Somme e sottrazioni** sono lecite solo fra grandezze omologhe, ossia riferite alla medesima grandezza — es. due lunghezze, due masse, &c. Numericamente, è necessario convertire le grandezze alla medesima unità di misura prima di sommare o sottrarre i numeri.

  Es.
  $$30\,\mathrm{cm} + 1.2\,\mathrm{m} = 0.3\,\mathrm{m} + 1.2\,\mathrm{m} = 1.5\,\mathrm{m}$$
  $12\,\mathrm{A} + 15\,\mathrm{kg}$ NON HA SENSO
  $$1.2\,\mathrm{bar} + 5\,\mathrm{psi} \approx 1.2\,\mathrm{bar} + 0.34\,\mathrm{bar} = 1.54\,\mathrm{bar}$$

- **Prodotti e quozienti** sono sempre leciti.

  Es.
  $$\frac{7\,\mathrm{kg}}{5\,\mathrm{m}^3} = 1.4\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \qquad \frac{1\,\mathrm{in}}{2\,\mathrm{cm}} = \frac{2.54\,\cancel{\mathrm{cm}}}{2\,\cancel{\mathrm{cm}}} = 1.27$$

- **Esponenziali** hanno senso solo se base ed esponente sono numeri puri — un numero puro è semplicemente un numero: una grandezza senza dimensioni fisiche.

  Infatti $7.1^{4.3\,\mathrm{kg}}$ potrebbe voler dire $7.1^{4.3}\,\mathrm{kg}$, oppure $7.1^{4300}\,\mathrm{g}$ — che sono diversi! — oppure $7.1^{4.3} \cdot 7.1^{\mathrm{kg}}$, che non significa niente. Quindi

  $$7.1^{4.3\,\mathrm{kg}} \qquad \text{NON HA SENSO}$$

§6.4 Ragionare con le unità di misura

Le regole della sezione precedente sono ottime per evitare errori grossolani nei calcoli — ad esempio, se mi trovo a dover sommare una lunghezza con un tempo, oppure un risultato che dovrebbe essere una massa esce in $\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}$, so immediatamente di aver sbagliato qualcosa di grosso. Spesso non ci sono molti modi di combinare i dati di un problema, per cui avviene addirittura che sia possibile ottenere la soluzione semplicemente combinando ragionamenti di buon senso con i vincoli imposti dalle unità di misura — per usare un termine altisonante, questo modo di brancolare nel buio si chiama analisi dimensionale.

Esercizio (come risolvere un esercizio senza conoscere l'argomento)
La camicia di un reattore è attraversata da un fluido riscaldante, con calore specifico $6\,\mathrm{J}/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{K})$, che entra a $80\,^\circ\mathrm{C}$ ed esce a $40\,^\circ\mathrm{C}$. La portata del fluido è $750\,\mathrm{kg/h}$. Quale potenza termica fornisce la camicia?

Soluzione. Facciamo finta — non è difficile — di non sapere nulla di reattori e di termodinamica.

Ragionevolmente, i $6\,\mathrm{J}/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{K})$ vorranno dire che ogni grammo del liquido, ogni volta che si raffredda di un kelvin, cede sei joule — questo almeno è il significato suggerito dall'unità $\mathrm{J}/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{K})$. La portata di $750\,\mathrm{kg/h}$ ci dice che ogni ora entrano in questa *camicia* $750\,\mathrm{kg} = 750 \cdot 10^3\,\mathrm{g}$ di liquido, e questi, passando da $80\,^\circ\mathrm{C}$ a $40\,^\circ\mathrm{C}$, si raffreddano di $40\,\mathrm{K}$. Ogni ora, la nostra camicia riceve quindi

$$750 \cdot 10^3\,\cancel{\mathrm{g}} \cdot 40\,\cancel{\mathrm{K}} \cdot 6\,\frac{\mathrm{J}}{\cancel{\mathrm{g}} \cdot \cancel{\mathrm{K}}} = 180 \cdot 10^6\,\mathrm{J}$$

L'esercizio chiede una potenza, che è un'energia divisa per il tempo in cui viene fornita. Ci aspettiamo quindi la risposta

$$\frac{180 \cdot 10^6\,\mathrm{J}}{1\,\mathrm{h}} = \frac{180 \cdot 10^6\,\mathrm{J}}{3600\,\mathrm{s}} = 50 \cdot 10^3\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 50\,\mathrm{kW}$$

Se riguardiamo i calcoli eseguiti, in definitiva, abbiamo fatto

$$750\,\mathrm{kg/h} \cdot (80\,^\circ\mathrm{C} - 40\,^\circ\mathrm{C}) \cdot 6\,\mathrm{J}/(\mathrm{g} \cdot \mathrm{K}) = 50\,\mathrm{kW}$$

Pochi tentativi basteranno a convincerci che questa è essenzialmente l'unica maniera di combinare i dati per produrre una potenza (ossia dei W). La potenza di $50\,\mathrm{kW}$ sembra compatibile con un processo industriale di qualche genere — un numero dell'ordine dei watt mi avrebbe insospettito (è la potenza, diciamo, di una lampadina), così come un numero dell'ordine di molti megawatt (una locomotiva è capace di qualche megawatt). Una piccola caldaia per il riscaldamento domestico produce una potenza termica di circa $25\,\mathrm{kW}$. In definitiva, non abbiamo ragioni di sospettare della risposta a cui siamo giunti. □

Nota importante
L'analisi dimensionale non vede i numeri puri: se il risultato giusto fosse la metà di quello trovato, oppure se nella formula ci fosse un π, le unità di misura non lo direbbero — per questo è importante cercare di capire la logica della formula che supponiamo essere corretta.

Nota
Il calore specifico è in $\mathrm{J}/(\mathrm{g}\cdot\mathrm{K})$, cioè joule per grammo e per kelvin, mentre le temperature del fluido sono date in gradi Celsius. Non c'è nessun errore: la scala Celsius ha gradi della stessa ampiezza del kelvin, e li riferisce a uno zero convenzionale che chiamiamo $0\,^\circ\mathrm{C}$. Una differenza di temperature, come $80\,^\circ\mathrm{C} - 40\,^\circ\mathrm{C}$, rappresenta un certo numero di gradi della scala, quindi, in questo caso, $40\,\mathrm{K}$.

Semmai, il K a denominatore conferma la nostra intuizione che quel numero vada moltiplicato per una *differenza* di temperature.

§6.5 Esercizi

Test 29 (soluzione a p. 256)
Converti $150\,\mathrm{mm}^3$ in millilitri.

Esercizio 30 (soluzione a p. 256)
Quanti psi (pound per square inch) sono 1 bar?

Dati:

$$1\,\mathrm{bar} = 10^5\,\mathrm{Pa} \qquad 1\,\mathrm{psi} = 1\,\mathrm{lbf}/\mathrm{in}^2 \qquad 1\,\mathrm{lbf} = g\cdot 1\,\mathrm{lb}$$
$$g = 9.81\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2 \qquad 1\,\mathrm{lb} = 0.453\,\mathrm{kg} \qquad 1\,\mathrm{in} = 2.54\,\mathrm{cm}$$

Esercizio 31 (soluzione a p. 256)
Calcola la portata volumetrica, in m^3/h, di un fluido che scorre in una tubazione del diametro di 10.0 cm alla velocità di $1.50\,\mathrm{m}/\mathrm{s}$.

Esercizio 32 (soluzione a p. 257)
Una soluzione satura di un principio attivo viene fatta cristallizzare raffreddandola, a volume costante, da $60\,^\circ\mathrm{C}$ a $25\,^\circ\mathrm{C}$. Se la solubilità diminuisce di otto volte, qual è la resa di cristallizzazione?

Esercizio 33 (soluzione a p. 258)
Una soluzione satura di un principio attivo, con solubilità 20 g/L, viene fatta cristallizzare facendo evaporare il solvente a temperatura costante. Se il volume iniziale del solvente è di 1000 L e la resa di cristallizzazione è del 90%, quanto solvente è evaporato?

§7 Cifre significative

Se immaginiamo di scrivere una quantità numerica negli spazi di un modulo prestampato, potremmo trovarci, per esempio, ad inserire un prezzo dentro una griglia fatta così

$$\text{PREZZO} : \square\square,\square\square \text{ €}$$

Questo ci dice, in un istante, che il prezzo è minore di 100 € e che lo possiamo specificare con la precisione di un centesimo. Siccome da 0 a 100 ci sono 10 000 incrementi di un centesimo, vediamo che 4 cifre possono essere scelte in $10\,000 = 10^4$ modi diversi. Più in generale n cifre si possono scegliere in 10^n modi.

Ragionando al contrario, quindi in maniera un po' imprecisa, possiamo dedurre che, se leggiamo un dato che è scritto con quattro cifre di precisione, per esempio

$$\text{massa} = 42.84\,\text{kg}$$

questo rappresenti una di 10 000 possibilità.

Supponiamo, adesso, di dover usare questo numero in un certo calcolo, come

$$\text{peso} = \text{massa} \cdot 9.807\,\text{m/s}^2$$

Procedendo aritmeticamente otterremmo

$$\text{peso} = 42.84 \cdot 9.807\,\text{kg} \cdot \text{m/s}^2 = 420.13188\,\text{N}$$

Il numero 420.13188 è giusto, ma suggerisce un'idea sbagliata, ossia che noi conosciamo il peso così precisamente da saper dire quale sia la cifra esatta dei centomillesimi. Non sappiamo questa cifra perché $\frac{1}{100\,000}$ N corrisponde, grosso modo, a un milionesimo di kg, e noi abbiamo la massa solo fino alla cifra dei centesimi. Per dare un risultato onesto, occorre quindi indicare il peso con meno cifre di quante ne abbiamo ottenute aritmeticamente.

Ma quante? Dobbiamo ragionare che il dato di 42.84 kg è, si è detto, uno fra 10 000 possibili. Se, a ciascuno di questi corrisponde un risultato, anche i risultati possibili sono 10 000. Quindi indicheremo il risultato con quattro cifre di precisione.

$$\text{peso} = 420.1\,\text{N}$$

In definitiva, abbiamo scoperto la regola seguente.

Regola
Quando una computazione si basa su dati soggetti a incertezze, in generale, conviene esprimere il risultato con tante cifre significative quante il meno preciso dei dati.

Possiamo illustrare ulteriormente questo concetto considerando l'esercizio seguente.

Esercizio
Misuri il diametro interno di un condotto avente sezione circolare utilizzando un calibro che permette di leggere il decimo di millimetro, e ottieni

$$\text{diametro} = 45.2\,\text{mm}$$

Quanto vale l'area della sezione del tubo (in cm^2)?

Soluzione. Chiaramente dobbiamo calcolare

$$\text{area} = \text{raggio}^2 \cdot \pi = \left(\frac{\text{diametro}}{2}\right)^2 \cdot \pi = \overbrace{16.0}^{\text{cifre significative}}459986\ldots\ \text{cm}^2$$

Secondo la regola, tuttavia, solo le prime tre di queste sono significative. Il risultato va quindi riportato nella forma

$$\text{area} = 16.0\,\text{cm}^2$$

□

Osservazione (Perché questa scelta è ragionevole?)
L'esercizio ci dice che la misura è stata eseguita con uno strumento che permette di leggere il decimo di millimetro. Quindi, per quanto ne sappiamo, il diametro reale potrebbe sì essere esattamente 45.2 mm, ma potrebbe ugualmente essere, per esempio, 45.24 mm o 45.18 mm. Tutte queste lunghezze verrebbero lette come 45.2 mm dal nostro calibro, che non permette di misurare i centesimi di millimetro. Proviamo a calcolare l'area in ciascuno dei tre casi.

diametro [mm]	area [cm^2]
45.18	16.0 | 318…
45.2	16.0 | 459…
45.24	16.0 | 744…

La barra verticale segna il punto in cui le tre risposte cominciano a divergere.

Come si vede, noi possiamo dire di sapere le cifre che la regola indica come significative, perché non dipendono da quale dei casi possibili è quello vero. Non possiamo, tuttavia, dire onestamente di sapere le altre, perché la nostra misura non ci permette di escludere nessuno dei casi considerati.

Nota importante
Nei passaggi intermedi bisogna lavorare con almeno due cifre significative in più rispetto alla precisione richiesta.

§7.1 Quali cifre sono significative

La regola parla di cifre *significative* perché non tutte le cifre lo sono. Se avessimo espresso la massa di 42.84 kg in tonnellate, avremmo scritto

$$\text{massa} = 0.04284\,\text{t}$$

Questo è lo stesso dato di prima, quindi è chiaro che deve ancora avere le sue quattro cifre significative, segno che lo 0.0 iniziale non è significativo. Quegli zeri lì sono, infatti, dei meri segna-posto. Servono per dire che il 4 successivo si trova nella posizione dei centesimi, e, se scrivessimo il numero in notazione scientifica, sparirebbero.

$$\text{massa} = 4.284 \cdot 10^{-2}\,\text{t}$$

Quali cifre sono significative e quali, invece, segna-posto?

Regola (versione 1)
Le cifre sono o significative o segna-posto.

- In notazione scientifica tutte le cifre della mantissa sono significative.
- Gli zeri alla fine di un numero intero (senza indicazione di cifre decimali) sono segna-posto.
- Gli zeri all'inizio di un numero che inizia con 0. sono segna-posto.

Esempi (le cifre significative sono sottolineate in verde).

$$\underline{24} \qquad 0.\underline{24} \qquad \underline{2.4} \qquad 0.0\underline{24} \qquad \underline{24}000 \qquad \underline{2.4} \cdot 10^{-70}$$

— tutti con due cifre significative —

$$\underline{240.0}_{\text{4 c.s.}} \qquad \underline{240}_{\text{2 c.s.}} \qquad 0.0\underline{24}_{\text{2 c.s.}} \qquad \underline{1.024}_{\text{4 c.s.}} \qquad 0.0\underline{240}_{\text{3 c.s.}} \qquad \underline{7.400} \cdot 10^{-2}{}_{\text{4 c.s.}}$$

Attenzione al numero 240.0: siccome lo .0 finale non è necessario per specificare il posto delle altre cifre, quello non può essere un segna-posto. Quindi deve essere significativo.

Regola (versione 2)
Alle volte gli zeri all'inizio o alla fine di una scrittura decimale non sono significativi.

- Se rimuovere uno zero cambierebbe il numero, quello zero non è significativo.

- Se rimuovere uno zero non cambierebbe il numero, quello zero è significativo.

Nota
La regola per contare le cifre significative è da intendersi più come un consiglio di prudenza che come una norma ferrea. Se, per esempio, leggiamo sul giornale che 6000 persone hanno preso parte ad una manifestazione, è sensato credere che quel 6000 sia un'approssimazione, e che, magari, le persone erano in realtà 5784 o 6319. Insomma, è naturale pensare che solo il 6 sia significativo, mentre verosimilmente gli zeri sono frutto di un arrotondamento — appunto una cifra significativa, secondo la regola. Non è assicurato che sia così: è improbabile, ma possibile, che il giornalista volesse dire che esattamente 6000 persone hanno partecipato — contate come? —, ma, in quel caso, forse avrebbe fatto meglio a scrivere "esattamente 6000".

Non potendo sapere con assoluta sicurezza, conviene assumere l'interpretazione più probabile, che è anche la più sicura. Infatti, se considerassimo quel 6000 un numero esatto, e fossimo in errore, allora vedremmo un'informazione là dove non c'è — negli zeri del 6000 — e questo è gravissimo. Seguendo la regola, invece, al massimo rischiamo di scartare un po' di informazione buona, ma non di introdurne di falsa.

§7.2 Arrotondamenti

Quando si riduce il numero di cifre significative in una scrittura decimale, è necessario arrotondare l'ultima cifra significativa in modo tale da rendere il numero arrotondato più vicino possibile al valore esatto.

Per esempio, se stiamo arrotondando il numero 42.824 alla prima cifra dopo il punto decimale, possiamo arrotondare per difetto a 42.8, oppure per eccesso a 42.9. In questo caso è corretto scegliere l'arrotondamento per difetto, 42.8, perché, fra i due, è il più vicino al numero dato.

$$\begin{aligned} &42.8 \quad \leftarrow \text{approssimazione corretta} && \text{distanza} = 42.824 - 42.8 = 0.024 \\ &42.824 \\ &42.9 && \text{distanza} = 42.9 - 42.824 = 0.076 \end{aligned}$$

Se, invece, arrotondiamo 31.764, di nuovo alla prima cifra decimale, la situazione si inverte.

$$\begin{aligned} &31.7 && \text{distanza} = 31.764 - 31.7 = 0.064 \\ &31.764 \\ &31.8 \quad \leftarrow \text{approssimazione corretta} && \text{distanza} = 31.8 - 31.764 = 0.036 \end{aligned}$$

Regola
La regola da seguire in pratica è semplice: se la prima cifra troncata è 0…4 si arrotonda per difetto, se la prima cifra troncata è 5…9 per eccesso.

$$42.824 \xrightarrow{2 \text{ è } 0\ldots4} 42.8 \qquad 31.764 \xrightarrow{6 \text{ è } 5\ldots9} 31.8$$

Esercizio
Calcola la soluzione positiva dell'equazione

$$3.1 \cdot 10^{-3}\, x^2 + 1.2 \cdot 10^{2}\, x - 2.4 = 0$$

con due cifre significative di precisione.

Questo esercizio è stato costruito apposta per illustrare l'effetto devastante che può avere l'errore di lavorare con una precisione insufficiente nei passaggi intermedi.

Soluzione. Facciamo dapprima il calcolo in maniera molto precisa.

$$\underbrace{3.1 \cdot 10^{-3}}_{0.0031}\, x^2 + \underbrace{1.2 \cdot 10^{2}}_{120}\, x - 2.4 = 0$$

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14\,400.02976}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.00012399993\ldots}{0.0062} = 0.01999998\ldots$$

È chiaro che la risposta giusta, correttamente arrotondata, è 0.020. □

Studiamo, però, cosa sarebbe avvenuto se avessimo usato due sole cifre significative nei passaggi intermedi:

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14\,000}}{0.0062} = \frac{-120 + 120}{0.0062} = 0 \qquad \text{OPS!}$$

Siccome questo esercizio presenta una situazione estrema, anche seguendo la regola generale di tenere due cifre significative in più di quelle desiderate avremmo ottenuto zero. Per ottenere un risultato diverso da zero, dobbiamo lavorare con non meno di sette cifre significative. Proviamo a ripetere il calcolo con sette:

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14\,400.03}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.0001}{0.0062} \approx 0.016$$

il risultato è ancora sbagliato, e solo lavorando con nove cifre otteniamo, finalmente, il risultato giusto

$$x = \frac{-120 + \sqrt{14\,400.0298}}{0.0062} = \frac{-120 + 120.000124}{0.0062} = 0.020$$

Nota importante (Morale)
Le sottrazioni fra numeri vicini $(120.000124 - 120)$ possono causare disastrose perdite di precisione. Quando ci si trova in una situazione come questa, è consigliabile usare, nei passaggi intermedi, la massima precisione di cui si può disporre.

Nota importante (Morale 2)
È utilissimo, permette di risparmiare tempo, e di evitare errori, usare le funzioni memoria delle calcolatrici, anziché scrivere e ri-inserire i risultati intermedi.

Nota (Curiosità)
Il procedimento seguente è pericoloso, ma avrebbe condotto al risultato giusto.

$$\underbrace{0.0031 \cdot x^2}_{\text{questo è piccolo: lo TRASCURO provvisoriamente}} + 120 \cdot x - 2.4 = 0$$

$$120 \cdot x - 2.4 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{2.4}{120} = 0.020$$

Constato che $0.0031 \cdot 0.020^2 \approx 0.000\,001\,2$ è effettivamente molto piccolo rispetto a $120 \cdot 0.020$ e a 2.4, quindi la scelta provvisoria di trascurare quel termine, a posteriori, è giustificata, pertanto il risultato ottenuto, $x = 0.020$, è accettabile.

§7.3 Esercizi

Test 34 (soluzione a p. 258)
Quante sono le cifre significative di 0.0308?

Test 35 (soluzione a p. 258)
Quante sono le cifre significative di 51 900?

Test 36 (soluzione a p. 258)
Quante sono le cifre significative di 51 900.0?

Test 37 (soluzione a p. 259)
Scrivi 0.035792 arrotondato a tre cifre significative.

§8 Trovare rapporti di numeri interi

Capita spesso, soprattutto negli esercizi di stechiometria, di ottenere da un calcolo un numero con la virgola e di sapere che quel numero, in realtà, è il rapporto di due interi piccoli. Il problema è questo:

> dato un numero arrotondato x, trovare la frazione $\frac{a}{b}$, ridotta ai minimi termini, tale che $\frac{a}{b} = x$.

Il fatto che x sia arrotondato è la difficoltà principale: dovremo cercare una frazione che sia compatibile con il dato, non una che lo riproduca esattamente.

§8.1 Livello 1: denominatori piccoli

Conviene avere in memoria le frazioni con denominatore fino a 5.

$$\frac{1}{2} = 0.5 \qquad \frac{1}{3} = 0.333\ldots \qquad \frac{1}{4} = 0.25 \qquad \frac{1}{5} = 0.2$$
$$\frac{2}{3} = 0.666\ldots \qquad \frac{3}{4} = 0.75 \qquad \frac{2}{5} = 0.4$$
$$\frac{3}{5} = 0.6$$
$$\frac{4}{5} = 0.8$$

Se la frazione cercata $\frac{a}{b}$ ha denominatore $b \leqslant 5$, la riconoscerai osservando la parte frazionaria di x, cioè quello che resta togliendo la parte intera.

Esempio ($x = 1.666$)

$$x = 1.666 = \underbrace{1}_{\text{parte intera}} + \underbrace{0.666}_{\text{parte frazionaria}} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{3}{3} + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

Esempio ($x = 2.498$)
Qui non riconosco 0.498, ma è facile che ci sia un errore di arrotondamento sull'ultima cifra. Conviene quindi assumere che il valore di x sia $2.500 \approx 2.498$, da cui

$$x = 2.500 = 2 + 0.5 = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

L'alternativa sarebbe scrivere

$$x = \frac{2498}{1000} = \frac{1249}{500}$$

che è aritmeticamente corretto, però non semplifica affatto la scrittura di x — e non è quello che ci serve.

§8.2 Livello 2: reciproci

Se $0 < x < 1$, allora il numeratore a è più piccolo del denominatore b: anziché cercare $x = \frac{a}{b}$ conviene cercare $\frac{1}{x} = \frac{b}{a}$, che ha la parte intera diversa da zero.

Esempio ($x = 0.4286$)
Non riconosco questa parte frazionaria; provo allora a calcolare il reciproco:

$$\frac{1}{x} = 2.3332 = 2 + 0.3332 \approx 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$$

(la cifra in rosso è l'errore di arrotondamento che ci aspettiamo). Siccome $\frac{1}{x} = \frac{7}{3}$, deduciamo che

$$x = \frac{3}{7}$$

Importante: per verifica calcoliamo $\frac{3}{7} = 0.428571428\ldots$ e constatiamo che è compatibile con il dato $x = 0.4286$.

Esempio ($x = 0.7143$)

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{0.7143} = 1.400 = 1 + 0.4 = 1 + \frac{2}{5} = \frac{7}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{5}{7}$$

Verifica: $\frac{5}{7} = 0.714285\ldots$, compatibile con il dato.

§8.3 Livello 3: la combinazione vincente

Combiniamo le due tecniche precedenti. La parte frazionaria di x ha il medesimo denominatore di x stesso; d'altro canto una parte frazionaria è sempre compresa fra 0 e 1. È quindi garantito che la frazione corrispondente al numero

$$\frac{1}{\text{parte frazionaria di } x} = \frac{1}{x - \text{parte intera di } x}$$

è più semplice della frazione di x.

Esempio ($x = 2.3077$)
Calcoliamo

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{0.3077} = 3.2499 \approx 3.25 = 3 + \frac{1}{4} = \frac{13}{4}$$

(anche qui si tollera l'errore di arrotondamento). Da cui otteniamo l'equazione

$$\frac{1}{x-2} = \frac{13}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad x = 2 + \frac{4}{13} = \frac{30}{13}$$

§8.4 Livello ninja: il metodo delle frazioni continue (fuori programma)

Siccome il trucco del livello 3 ci garantisce di semplificare il problema, se non riusciamo a concludere al primo tentativo possiamo semplicemente ripeterlo: prima o poi otterremo una frazione che riconosciamo.

Esempio ($x = 2.6957$)
Scriviamo $x_0 = 2.6957$ e calcoliamo, un passo alla volta,

$$x_1 = \frac{1}{x_0 - 2} = \frac{1}{0.6957} = 1.4374 \qquad x_0 = 2 + \frac{1}{x_1}$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{1}{0.4374} = 2.2862 \qquad x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - 2} = \frac{1}{0.2862} = 3.4941 \qquad x_2 = 2 + \frac{1}{x_3}$$

Noto che, probabilmente, $x_3 \approx 3.5 = \frac{7}{2}$ al netto dell'errore di arrotondamento già presente nel dato del problema. Assumendo $x_3 = \frac{7}{2}$ calcolo, usando le formule nella colonna a destra,

$$x = 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{x_3}}} = 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{2}{7}}} = 2 + \frac{1}{1 + \dfrac{7}{16}} = 2 + \frac{16}{23} = \frac{62}{23}$$

Per verifica, $\frac{62}{23} = 2.69565217\ldots$ è compatibile con il dato $x = 2.6957$.

Nota
Perché, benché $x = 2.6957$ fosse dato con cinque cifre significative di precisione, abbiamo assunto che $x_3 = 3.4941$ fosse $\frac{7}{2} = 3.5$, tollerando un errore già alla terza cifra? La risposta è che questo procedimento, ad ogni passaggio, estrae un po' di informazione da x e la trasferisce nelle parti intere (2, 1, 2 nell'esempio) che serviranno, alla fine, per ricostruire la frazione. Ad ogni passaggio viene estratta grossolanamente una cifra di informazione, e ci aspettiamo quindi una corrispondente perdita di precisione nelle x_i: più o meno una cifra per passaggio.

Nota importante (circa le cifre significative)
La quantità di informazione contenuta in una frazione è misurata dal totale delle cifre fra numeratore e denominatore. Se intendiamo scoprire una frazione i cui termini sono numeri, diciamo, di due cifre, dobbiamo partire avendo non meno di quattro cifre di precisione nel dato. E, in realtà, ne serviranno almeno cinque per avere un risultato ragionevolmente affidabile.

§8.5 Esercizi

Esercizio 38 (soluzione a p. 259)
Ciascuno dei numeri seguenti è il valore arrotondato di una frazione di interi piccoli. Trova la frazione, ridotta ai minimi termini, e verifica la risposta.

(a) $x = 4.2000$ (b) $x = 0.3750$ (c) $x = 3.1429$ (d) $x = 1.4783$

Esercizio 39 (soluzione a p. 260)
239.6 mg di un ossido di ferro solido vengono integralmente decomposti, ad elevata temperatura, in ossigeno gassoso e ferro metallico solido. Di quest'ultimo si ottengono 167.7 mg. Stabilisci la formula dell'ossido di ferro.

Masse atomiche: Fe = 55.85 g/mol, O = 16.00 g/mol.

Esercizio 40 (soluzione a p. 261)
Un elemento X forma due composti clorurati di formula, rispettivamente, XCl_a e XCl_b. Nel primo composto l'elemento X è contenuto per il 22.545% in peso; nel secondo, l'elemento Cl è contenuto per lo 85.132% in peso. Tenendo presente che a e b sono due numeri interi piccoli, e che la massa atomica del cloro è nota, determina la massa atomica di X e la formula dei due composti.

Massa atomica: Cl = 35.453 g/mol.

Esercizio 41 (soluzione a p. 262)
Per un buon esercizio di matematica non c'è niente come cercare *sondaggi grande fratello* sul web. Il sito `www.tuttosulgossip.it`, alla domanda "chi è il tuo preferito?", riporta le percentuali seguenti:

Risposte	Statistiche
Anita Mazzotta	17.45%
Grazia Kendi	17.45%
Donatella Mercoledisanto	13.42%
Jonas Pepe	12.08%
Omer Elomari	7.38%
Giulia Soponariu	6.04%
Domenico D'Alterio	5.37%
Francesca Carrara e Simone De Bianchi	5.37%
Benedetta Stocchi	4.70%
Francesco Rana	4.70%
Matteo Azzali	3.36%
Giulio Carotenuto	2.68%

Se leggessi risultati del genere in uno studio serio avresti forti ragioni di sospetto: ci sono numerose percentuali identiche, e questo suggerisce che il numero degli individui coinvolti sia limitato.

Domanda: su quanti voti è basato questo sondaggio?

Suggerimento: parti dal 17.45%, cioè cerca $\frac{a}{b} = 0.1745$. Poi verifica che il denominatore b vada bene anche per le altre percentuali; se no correggilo, prova arrotondamenti diversi, e così via. Avrai finito quando potrai esprimere tutte le percentuali come frazioni con il medesimo denominatore: quello sarà la numerosità del campione.

Test 29 (p. 37)
Converti $150\,\text{mm}^3$ in millilitri.

Soluzione. Ricordando che, per definizione, $1\,\text{L} = 1\,\text{dm}^3 = (0.1\,\text{m})^3$, abbiamo

$$\begin{aligned} 150\,\text{mm}^3 &= x\,\text{mL} \\ 150\,(10^{-3}\,\text{m})^3 &= x\,10^{-3}\,(0.1\,\text{m})^3 \\ 150\cdot 10^{-9}\,\cancel{\text{m}^3} &= x\,10^{-6}\,\cancel{\text{m}^3} \end{aligned}$$

Da cui $x = 150\cdot 10^{-3} = 0.15$, quindi $150\,\text{mm}^3 = 0.15\,\text{mL}$.

Esercizio 30 (p. 37)
Quanti psi (pound per square inch) sono 1 bar?

Dati:

$$\begin{aligned} 1\,\text{bar} &= 10^5\,\text{Pa} & 1\,\text{psi} &= 1\,\text{lbf/in}^2 & 1\,\text{lbf} &= g\cdot 1\,\text{lb} \\ g &= 9.81\,\text{m/s}^2 & 1\,\text{lb} &= 0.453\,\text{kg} & 1\,\text{in} &= 2.54\,\text{cm} \end{aligned}$$

Soluzione. Svolgimento:

$$1\,\underbrace{\text{bar}}_{1\,\text{bar}=10^5\,\text{Pa}\,=\,10^5\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-2}} = x\,\underbrace{\text{psi}}_{1\,\text{psi}=1\,\text{lbf/in}^2\,=\,9.81\,\text{m/s}^2\,\cdot\,0.453\,\text{kg}\,/\,(2.54\cdot 10^{-2}\,\text{m})^2}$$

$$10^5\,\frac{\cancel{\text{kg}}}{\cancel{\text{m}}\cdot\text{s}^2} = x\cdot 9.81\,\frac{\cancel{\text{m}}}{\text{s}^2}\cdot\frac{0.453\,\cancel{\text{kg}}}{2.54^2\cdot 10^{-4}\,\cancel{\text{m}^2}}$$

$$10^5 = x\cdot 9.81\,\frac{0.453}{2.54^2\cdot 10^{-4}} \qquad\Longrightarrow\qquad x = \frac{10\cdot 2.54^2}{9.81\cdot 0.453}\approx 14.5$$

Quindi $1\,\text{bar} = 14.5\,\text{psi}$.

Esercizio 31 (p. 37)
Calcola la portata volumetrica, in m^3/h, di un fluido che scorre in una tubazione del diametro di 10.0 cm alla velocità di $1.50\,\text{m/s}$.

Soluzione. L'unità di misura, m^3/h, della *portata volumetrica* ci fa intuire che probabilmente questa è il volume di fluido che la tubazione trasporta nell'unità di tempo.

Proviamo a capire che cosa succede nel tubo. In un secondo, il fluido avanza di 1.50 m, quindi il volume che entra nel tubo ogni secondo è quello di un cilindro che ha per base un cerchio di diametro 10.0 cm e per altezza 1.50 m. La sezione è un cerchio di raggio 5.00 cm — la metà del diametro — e quindi

$$Q = 1.50\,\text{m/s}\cdot\pi\,(0.0500\,\text{m})^2 = 1.50\cdot\pi\cdot 0.00250\,\text{m}^3/\text{s} = 0.01178\,\text{m}^3/\text{s}$$

e, siccome in un'ora ci sono 3600 s,

$$Q = 0.01178\cdot 3600\,\text{m}^3/\text{h} = 42.4\,\text{m}^3/\text{h}$$

con tre cifre significative, come i dati.

Controlliamo ora il risultato con le unità di misura. Abbiamo moltiplicato una velocità, in m/s, per una superficie, in m^2, e abbiamo ottenuto dei m^3/s, ossia un volume diviso un tempo, che è proprio quello che l'esercizio chiede, e questo è un buon segno. Con una velocità e una lunghezza, l'unico modo di arrivare a un volume per unità di tempo è moltiplicare la velocità per il quadrato della lunghezza, quindi difficilmente la formula che abbiamo immaginato è sbagliata.

Attenzione: le unità di misura, però, ci dicono solo che Q è *proporzionale* a $v \cdot d^2$: il fattore $\frac{\pi}{4}$ viene dalla geometria (l'area del cerchio è $\pi r^2 = \frac{\pi}{4} d^2$), e l'analisi dimensionale non lo vede. Se usassimo il diametro al posto del raggio troveremmo un risultato quattro volte troppo grande, circa $170\,m^3/h$, con le medesime unità di misura!

Franco Battiato aveva previsto che ci avrebbero dato la velocità del fluido:

> *La portata di un condotto*
> *è il volume liquido*
> *che passa in una sua sezione*
> *nell'unità di tempo;*
> *e si ottiene moltiplicando*
> *la sezione perpendicolare*
> *per la velocità, che avrai, del liquido.*
> *A regime permanente*
> *la portata è costante*
> *attraverso una sezione del con-dot-to.*
>
> (*Pollution*, dall'album omonimo di Franco Battiato, Bla Bla, 1972)

Esercizio 32 (p. 37)
Una soluzione satura di un principio attivo viene fatta cristallizzare raffreddandola, a volume costante, da 60 °C a 25 °C. Se la solubilità diminuisce di otto volte, qual è la resa di cristallizzazione?

Soluzione. Anche se non conosciamo il campo specifico a cui fa riferimento l'esercizio, è ragionevole supporre che la resa sia la frazione del principio attivo disciolto che si trasforma in cristalli — generalmente, parole come *resa, rendimento, efficienza* fanno riferimento al rapporto fra il prodotto di un processo e il massimo prodotto teoricamente ottenibile: in questo caso il principio attivo cristallizzato e tutto quello disponibile. Chiamiamo s la solubilità a 60 °C — in g/L, per esempio — e V il volume. All'inizio la soluzione è satura, quindi contiene sV di principio attivo, mentre a 25 °C ne può restare disciolto solo $\frac{s}{8} V$ e il resto cristallizza. La resa è quindi

$$\frac{sV - \frac{s}{8}V}{sV} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 87.5\%$$

Non ci serve conoscere né s né V, che si semplificano: della solubilità ci interessa solo di quanto diminuisce, ossia il *rapporto* fra i due valori.

Esercizio 33 (p. 38)
Una soluzione satura di un principio attivo, con solubilità 20 g/L, viene fatta cristallizzare facendo evaporare il solvente a temperatura costante. Se il volume iniziale del solvente è di 1000 L e la resa di cristallizzazione è del 90%, quanto solvente è evaporato?

Soluzione. All'inizio sono disciolti $20 \frac{\text{g}}{\cancel{\text{L}}} \cdot 1000 \cancel{\text{L}} = 20\,000\,\text{g} = 20\,\text{kg}$ di principio attivo. Ne cristallizza il 90%, ossia 18 kg, e quindi ne restano disciolti 2 kg. Siccome la temperatura non cambia, la soluzione che resta è ancora satura, a 20 g/L, e i 2 kg rimasti occupano

$$\frac{2000\,\cancel{\text{g}}}{20\,\cancel{\text{g}}/\text{L}} = 100\,\text{L}$$

di solvente. Sono quindi evaporati $1000\,\text{L} - 100\,\text{L} = 900\,\text{L}$ di solvente ($= 0.9\,\text{m}^3$).

Anche qui la solubilità si semplifica: evapora il 90% del solvente perché cristallizza il 90% del soluto, e potremmo fare a meno del dato 20 g/L.

Test 34 (p. 43)
Quante sono le cifre significative di 0.0308?

Soluzione. Gli zeri all'inizio di un numero che comincia con 0. sono segna-posto: servono soltanto a dire in che posizione stanno le cifre diverse da zero.

$$0.0\underline{308} \quad \Longrightarrow \quad \text{3 cifre significative}$$

(si vede bene in notazione scientifica: $0.0308 = 3.08 \cdot 10^{-2}$, e in notazione scientifica tutte le cifre della mantissa sono significative).

Test 35 (p. 43)
Quante sono le cifre significative di 51 900?

Soluzione. Gli zeri finali di un numero intero, scritto senza cifre decimali, sono segna-posto.

$$\underline{51}900 \quad \Longrightarrow \quad \text{3 cifre significative}$$

(in notazione scientifica, $5.19 \cdot 10^4$).

Test 36 (p. 43)
Quante sono le cifre significative di 51 900.0?

Soluzione. Qui c'è uno .0 finale, che non serve a specificare il posto di nessun'altra cifra: toglierlo non cambierebbe il valore. Quindi è significativo, e con lui tutti gli zeri che lo precedono.

$$\underline{51\,900.0} \quad \Longrightarrow \quad \text{6 cifre significative}$$

(chi scrive 51 900.0 sta dichiarando di conoscere il dato al decimo di unità: un'informazione molto più precisa di quella contenuta in 51 900).

Test 37 (p. 43)
Scrivi 0.035792 arrotondato a tre cifre significative.

Soluzione. Gli zeri iniziali non sono cifre significative: sono segna-posto. Le cifre significative di 0.035792 sono dunque 3, 5, 7, 9, 2, e le prime tre sono 3, 5, 7. La prima cifra scartata è $9 \geqslant 5$, quindi si arrotonda per eccesso:

$$0.035792 \longrightarrow 0.0358$$

Esercizio 38 (p. 47)
Ciascuno dei numeri seguenti è il valore arrotondato di una frazione di interi piccoli. Trova la frazione, ridotta ai minimi termini, e verifica la risposta.

(a) $x = 4.2000$ (b) $x = 0.3750$ (c) $x = 3.1429$ (d) $x = 1.4783$

Soluzione.

Soluzione della domanda a. La parte frazionaria è $0.2 = \frac{1}{5}$, quindi

$$x = 4 + \frac{1}{5} = \frac{20}{5} + \frac{1}{5} = \frac{21}{5}$$

□

Soluzione della domanda b. Qui $x < 1$: conviene passare al reciproco.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{0.3750} = 2.6667 \approx 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad x = \frac{3}{8}$$

Verifica: $\frac{3}{8} = 0.375$ esattamente. □

Soluzione della domanda c. Non riconosco la parte frazionaria $x - 3 = 0.1429$, quindi applico il trucco del reciproco a questa parte frazionaria:

$$\frac{1}{x-3} = \frac{1}{0.1429} = 6.9979 \approx 7$$

(l'errore sulla terza cifra è quello che ci aspettiamo), da cui

$$x = 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

Verifica: $\frac{22}{7} = 3.142857\ldots$, compatibile con il dato. □

Soluzione della domanda d. Procedendo come nella domanda precedente, ottengo

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{0.4783} = 2.0907$$

Non riconoscendo la parte frazionaria 0.0907 di questo nuovo numero, applico nuovamente il procedimento, questa volta a partire da $x_1 = \frac{1}{x-1} = 2.0907$. Ottengo:

$$\frac{1}{x_1 - 2} = \frac{1}{0.0907} = 11.02$$

A questo punto, posso assumere che valga $\frac{1}{x_1 - 2} = 11$ e risalire:

$$x_1 = \frac{1}{11} + 2 = \frac{23}{11} \qquad x = \frac{1}{x_1} + 1 = \frac{1}{\frac{23}{11}} + 1 = \frac{11}{23} + 1 = \frac{34}{23}$$

Verifica: $\frac{34}{23} = 1.4782608\ldots$, compatibile con il dato. □

Esercizio 39 (p. 47)
239.6 mg di un ossido di ferro solido vengono integralmente decomposti, ad elevata temperatura, in ossigeno gassoso e ferro metallico solido. Di quest'ultimo si ottengono 167.7 mg. Stabilisci la formula dell'ossido di ferro.

Masse atomiche: Fe = 55.85 g/mol, O = 16.00 g/mol.

Soluzione. Chiamiamo Fe_aO_b la formula cercata: a e b sono interi piccoli e quello che dobbiamo trovare è il loro rapporto. La reazione è

$$Fe_aO_b \longrightarrow Fe + O_2$$

e la massa si conserva, quindi l'ossigeno prodotto pesa

$$239.6\,\text{mg} - 167.7\,\text{mg} = 71.9\,\text{mg}$$

In una molecola ci sono a atomi di ferro ogni b atomi di ossigeno; lo stesso vale per le quantità di sostanza, quindi

$$\frac{a}{b} = \frac{\text{moli di Fe}}{\text{moli di O}}$$

(attenzione: moli di ossigeno atomico, non di O_2). Calcoliamo le due quantità:

$$n_{Fe} = \frac{167.7\,\text{mg}}{55.85\,\text{g/mol}} = 3.003\,\text{mmol} \qquad n_O = \frac{71.9\,\text{mg}}{16.00\,\text{g/mol}} = 4.494\,\text{mmol}$$

da cui

$$\frac{a}{b} = \frac{3.003}{4.494} = 0.6682$$

Ora si tratta di riconoscere la frazione. Siccome il numero è minore di 1 passo al reciproco:

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{0.6682} = 1.4966 \approx 1.5 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

(la terza cifra è già inaffidabile: la massa dell'ossigeno, ottenuta per differenza, ha solo tre cifre significative, e il ferro naturale, peraltro, è una miscela di isotopi). Quindi $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, ossia $a = 2$ e $b = 3$:

$$Fe_2O_3$$

(l'ossido ferrico, cioè la ruggine).

Esercizio 40 (p. 47)
Un elemento X forma due composti clorurati di formula, rispettivamente, XCl_a e XCl_b. Nel primo composto l'elemento X è contenuto per il 22.545% in peso; nel secondo, l'elemento Cl è contenuto per lo 85.132% in peso. Tenendo presente che a e b sono due numeri interi piccoli, e che la massa atomica del cloro è nota, determina la massa atomica di X e la formula dei due composti.

Massa atomica: Cl = 35.453 g/mol.

Soluzione. **Primo passo: il rapporto** a : b**.** Prendiamo 100 g di ciascun composto e vediamo come si ripartiscono:

$$\begin{aligned} 100\,\mathrm{g}\ XCl_a &\longrightarrow 22.545\,\mathrm{g}\ X + 77.455\,\mathrm{g}\ Cl \\ 100\,\mathrm{g}\ XCl_b &\longrightarrow 14.868\,\mathrm{g}\ X + 85.132\,\mathrm{g}\ Cl \end{aligned}$$

Le due righe non sono però confrontabili, perché contengono quantità diverse di X. Riscaliamole entrambe in modo da avere 100 g di X:

$$\begin{aligned} XCl_a &\longrightarrow 100\,\mathrm{g}\ X + \underbrace{77.455 \cdot \frac{100}{22.545}}_{343.5573}\ \mathrm{g}\ Cl \\ XCl_b &\longrightarrow 100\,\mathrm{g}\ X + \underbrace{85.132 \cdot \frac{100}{14.868}}_{572.5854}\ \mathrm{g}\ Cl \end{aligned}$$

Adesso, a parità di atomi di X, la massa di cloro è proporzionale al numero di atomi di cloro per molecola, cioè ad a e a b rispettivamente. Quindi

$$\frac{a}{b} = \frac{343.5573}{572.5854} = 0.6000$$

e questa è una frazione che riconosciamo subito:

$$\frac{a}{b} = \frac{3}{5} \qquad \Longrightarrow \qquad a = 3, \quad b = 5$$

Secondo passo: la massa atomica di X**.** Torniamo ai 100 g del primo composto, XCl_3. Il cloro presente è

$$n_{Cl} = \frac{77.455\,\mathrm{g}}{35.453\,\mathrm{g/mol}} = 2.1847\,\mathrm{mol}$$

e siccome ogni molecola contiene tre atomi di cloro e uno di X,

$$n_X = \frac{2.1847\,\mathrm{mol}}{3} = 0.72824\,\mathrm{mol}$$

La massa atomica cercata è quindi

$$\frac{22.545\,\mathrm{g}}{0.72824\,\mathrm{mol}} \approx 30.96\ \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{mol}}$$

che sulla tavola periodica è il fosforo. I due composti sono il tricloruro e il pentacloruro di fosforo:

$$PCl_3 \qquad\qquad PCl_5$$

Esercizio 41 (p. 47)
Per un buon esercizio di matematica non c'è niente come cercare *sondaggi grande fratello* sul web. Il sito `www.tuttosulgossip.it`, alla domanda "chi è il tuo preferito?", riporta le percentuali seguenti:

Risposte	Statistiche
Anita Mazzotta	17.45%
Grazia Kendi	17.45%
Donatella Mercoledisanto	13.42%
Jonas Pepe	12.08%
Omer Elomari	7.38%
Giulia Soponariu	6.04%
Domenico D'Alterio	5.37%
Francesca Carrara e Simone De Bianchi	5.37%
Benedetta Stocchi	4.70%
Francesco Rana	4.70%
Matteo Azzali	3.36%
Giulio Carotenuto	2.68%

Se leggessi risultati del genere in uno studio serio avresti forti ragioni di sospetto: ci sono numerose percentuali identiche, e questo suggerisce che il numero degli individui coinvolti sia limitato.

Domanda: su quanti voti è basato questo sondaggio?

Suggerimento: parti dal 17.45%, cioè cerca $\frac{a}{b} = 0.1745$. Poi verifica che il denominatore b vada bene anche per le altre percentuali; se no correggilo, prova arrotondamenti diversi, e così via. Avrai finito quando potrai esprimere tutte le percentuali come frazioni con il medesimo denominatore: quello sarà la numerosità del campione.

Soluzione. Cerchiamo la frazione corrispondente a $x_0 = 0.1745$. Siccome $x_0 < 1$ cominciamo dal reciproco e poi proseguiamo con il metodo delle frazioni continue:

$$x_1 = \frac{1}{x_0} = \frac{1}{0.1745} = 5.7307 \qquad x_0 = \frac{1}{x_1}$$

$$x_2 = \frac{1}{x_1 - 5} = \frac{1}{0.7307} = 1.3686 \qquad x_1 = 5 + \frac{1}{x_2}$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{1}{0.3686} = 2.7128 \qquad x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

$$x_4 = \frac{1}{x_3 - 2} = \frac{1}{0.7128} = 1.4030 \qquad x_3 = 2 + \frac{1}{x_4}$$

A questo punto riconosco $x_4 \approx 1.4 = \frac{7}{5}$ (l'errore sulla terza cifra decimale è atteso: abbiamo già fatto quattro passaggi). Risalgo:

$$x_3 = 2 + \frac{5}{7} = \frac{19}{7} \qquad x_2 = 1 + \frac{7}{19} = \frac{26}{19} \qquad x_1 = 5 + \frac{19}{26} = \frac{149}{26}$$

e quindi

$$x_0 = \frac{1}{x_1} = \frac{26}{149}$$

Il candidato è dunque $b = 149$ votanti. Prima di crederci, però, va verificato su tutte le percentuali: moltiplico ciascuna per 149 e controllo di ottenere, ogni volta, un numero intero a meno dell'arrotondamento.

$$\begin{array}{rrrcr} 0.1745 & \times 149 = & 26.00 & \approx & 26 \\ 0.1342 & \times 149 = & 20.00 & \approx & 20 \\ 0.1208 & \times 149 = & 18.00 & \approx & 18 \\ 0.0738 & \times 149 = & 11.00 & \approx & 11 \\ 0.0604 & \times 149 = & 9.00 & \approx & 9 \\ 0.0537 & \times 149 = & 8.00 & \approx & 8 \\ 0.0470 & \times 149 = & 7.00 & \approx & 7 \\ 0.0336 & \times 149 = & 5.01 & \approx & 5 \\ 0.0268 & \times 149 = & 3.99 & \approx & 4 \end{array}$$

Funziona. Contando anche i doppioni, i voti sono

$$26 + 26 + 20 + 18 + 11 + 9 + 8 + 8 + 7 + 7 + 5 + 4 = 149$$

e il totale torna esattamente, che è la controprova decisiva. (Il sondaggio, insomma, è basato su centoquarantanove voti: un campione del tutto inadeguato alla precisione con cui sono espresse le percentuali. L'autore di `www.tuttosulgossip.it` avrebbe fatto meglio ad arrotondare all'unità.)

> **Test 42** (p. 59)
> Converti in errore relativo 24 ± 1.

Soluzione.

$$\frac{1}{24} \cdot 100 \approx 4.17 \qquad \Longrightarrow \qquad 24 \pm \underbrace{1}_{\pm 4.17\%} = 24 \pm 4\%$$

(L'errore relativo è un'incertezza come le altre: si arrotonda a una cifra significativa.)

> **Test 43** (p. 59)
> Converti $60.0 \pm 2\%$ in errore assoluto.

Soluzione.

$$60.0 \pm \underbrace{2\%}_{60.0 \cdot \frac{2}{100}} = 60.0 \pm 1.2$$

L'errore comincia con la cifra 1: lo teniamo a due cifre significative, e il valore resta arrotondato ai decimi.