(D perché C è già usata). Questa è la soluzione generale dell'equazione (C). Per trovare la soluzione particolare che rappresenta la legge del moto del corpo dato dobbiamo determinare le costanti C e D usando le condizioni (A) e (B):

$$0 \overset{(A)}{=} x(0) = -Ce^{-0} + D = D - C \qquad \Longrightarrow \qquad D = C$$
$$1 \overset{(B)}{=} x'(0) = v(0) = Ce^{-0} = C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1$$

Quindi, in definitiva, $x(t) = 1 - e^{-t}$. □

Nota
L'equazione (C) coinvolge derivate che arrivano fino alla seconda: si tratta quindi di un'equazione del secondo ordine. La soluzione generale di un'equazione dell'n-esimo ordine è una famiglia di funzioni con n parametri, ed è per questo che la soluzione che abbiamo trovato dipende da due costanti (C e D). In generale, per fissare una soluzione particolare di un'equazione di n-esimo ordine servono n condizioni (in questo caso ne avevamo infatti due).

§27.2 Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti del secondo ordine

$$f''(x) = af'(x) + bf(x) + c$$

Le equazioni di questa classe si risolvono nei medesimi passaggi delle equazioni lineari a coefficienti costanti del primo ordine:

1. risolvere l'equazione omogenea associata;
2. trovare una soluzione particolare dell'equazione da risolvere;
3. la soluzione generale cercata è la somma della soluzione generale dell'omogenea e di una soluzione particolare.

Vediamoli in dettaglio.

1. Soluzione dell'omogenea

L'equazione omogenea associata è

$$f''(x) = af'(x) + bf(x)$$

Provvisoriamente cerchiamo $f(x) = e^{\alpha x}$; mettiamo quindi $f'(x) = \alpha e^{\alpha x}$ e $f''(x) = \alpha^2 e^{\alpha x}$ nell'equazione:

$$\alpha^2 \cancel{e^{\alpha x}} = a\alpha \cancel{e^{\alpha x}} + b\cancel{e^{\alpha x}} \qquad \Longrightarrow \qquad \alpha^2 - a\alpha - b = 0 \qquad (*)$$

- Se $\Delta = a^2 + 4b > 0$, l'equazione di secondo grado $(*)$ ha due soluzioni α_1 e α_2, e la soluzione generale dell'omogenea è

$$f(x) = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x}$$

- Se $\Delta = 0$, l'equazione $(*)$ ha una sola soluzione α, e la soluzione generale è
$$f(x) = \big(C_1 x + C_2\big)e^{\alpha x}$$
- Se $\Delta < 0$, la soluzione generale dell'omogenea è
$$f(x) = e^{\frac{a}{2}x}\Big(C_1\cos(\omega x) + C_2\sin(\omega x)\Big) \qquad \text{con} \qquad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}$$

2. Soluzione particolare

- Se $c = 0$, allora l'equazione data coincide con l'omogenea, quindi abbiamo già finito.
- Se $b \neq 0$, allora $f(x) = -\frac{c}{b}$ è una soluzione particolare.
- Se $b = 0$ e $a \neq 0$, allora $f(x) = -\frac{c}{a}x$ è una soluzione particolare.
- Se $b = a = 0$, allora $f(x) = \frac{c}{2}x^2$ è una soluzione particolare.

3. Soluzione generale

La soluzione generale si ottiene sommando una soluzione particolare e la soluzione generale dell'equazione omogenea associata.

Nota importante
Non è importante che si sappia a memoria il metodo per risolvere questo tipo di equazioni. È importante sapere che le soluzioni hanno, in generale, comportamenti esponenziali e oscillanti variamente combinati (a seconda dei coefficienti). Ed è importante sapere (libro o appunti alla mano) come applicare il metodo.

Esempio $(f'' = 3f' - 2f)$

1. Omogenea: $\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0 \implies \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, quindi
$$f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$$
2. Soluzione particolare: $c = 0 \implies f(x) = 0$.
3. $f(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Esempio $(f'' = 2f' - 2f + 6)$

1. Omogenea: $\alpha^2 - 2\alpha + 2 = 0 \implies \Delta = -4 < 0$ (e $\omega = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1$), quindi
$$f(x) = e^x\big(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\big)$$

2. Soluzione particolare: $f(x) = -\frac{c}{b} = -\frac{6}{-2} = 3$.
3. $f(x) = e^x\left(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\right) + 3$.

Esempio ($f'' = 2f' - f - 7$)

1. Omogenea: $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = 0 \implies \alpha = 1$ (soluzione doppia), quindi
$$f(x) = e^x\left(C_1 x + C_2\right)$$
2. Soluzione particolare: $f(x) = -\frac{c}{b} = -\frac{-7}{-1} = -7$.
3. $f(x) = e^x\left(C_1 x + C_2\right) - 7$.

Esempio ($f'' = f' + 1$)

1. Omogenea: $\alpha^2 - \alpha = 0 \implies \alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 1$, quindi
$$f(x) = C_1 + C_2 e^x$$
2. Soluzione particolare ($b = 0$ e $a \neq 0$): $f(x) = -\frac{c}{a}x = -x$.
3. $f(x) = C_1 + C_2 e^x - x$.

Nota
Conviene verificare ciascuna di queste soluzioni calcolando separatamente i due membri dell'equazione, come abbiamo fatto per l'equazione del primo ordine: è un esercizio breve e mette al riparo da errori di segno.

Esempio (il corpo con attrito viscoso, di nuovo)
Possiamo rifare l'esercizio di pagina 199 sfruttando, questa volta, l'equazione del secondo ordine. La funzione incognita è $x(t)$ e dobbiamo risolvere $x''(t) = -x'(t)$. Questa equazione è omogenea, ossia non c'è il termine noto: dobbiamo quindi risolvere l'equazione di secondo grado $\alpha^2 + \alpha = 0$, che dà $\alpha_1 = -1$ e $\alpha_2 = 0$, quindi
$$x(t) = C_1 e^{-1\cdot t} + C_2 e^{0\cdot t} = C_1 e^{-t} + C_2$$
Proseguiamo, ora, come nella soluzione precedente per trovare C_1 e C_2:
$$\begin{aligned} 0 = x(0) &= C_1 + C_2 && \implies && C_2 = -C_1 \\ 1 = x'(0) &= -C_1 e^{-0} = -C_1 && \implies && C_1 = -1 \end{aligned}$$
e quindi, ancora una volta, $x(t) = 1 - e^{-t}$.

§27.3 Equazioni differenziali a variabili separabili

Sono a variabili separabili le equazioni della forma

$$f'(x) = g(x) \cdot h\big(f(x)\big)$$

in cui f è la funzione incognita, mentre g e h sono funzioni date. Queste equazioni si possono risolvere con un trucco che non è formalmente ineccepibile, ma funziona.

Regola

1. Scriviamo l'equazione nella forma
$$\frac{df}{dx} = g(x) \cdot h(f)$$
2. Riordiniamo i termini dell'equazione
$$\frac{df}{h(f)} = g(x)\,dx$$
3. Calcoliamo l'integrale indefinito di ambo i membri
$$A(f) + C_1 := \int \frac{df}{h(f)} = \int g(x)\,dx =: B(x) + C_2$$
4. Raccogliamo le costanti C_1 e C_2 in $C := C_2 - C_1$
$$A(f) = B(x) + C$$
5. Ricaviamo f da quest'ultima equazione.

Così troviamo una famiglia di funzioni dipendente dal parametro C, e questa è la soluzione generale.

Esempio ($f' = 3xf$)

1. $\dfrac{df}{dx} = 3xf$
2. $\dfrac{df}{f} = 3x\,dx$
3. $\displaystyle\int \frac{df}{f} = \int 3x\,dx$, ossia $\log_e(f) + C_1 = \frac{3}{2}x^2 + C_2$
4. $\log_e(f) = \frac{3}{2}x^2 + C$

5. $f = e^{\frac{3}{2}x^2+C} = \underbrace{e^C}_{K} \cdot e^{\frac{3}{2}x^2}$

Quindi la soluzione generale dell'equazione è $f(x) = Ke^{\frac{3}{2}x^2}$.

Verifica:

$$f'(x) = K \cdot \frac{3}{2} \cdot 2x \cdot e^{\frac{3}{2}x^2} = 3xKe^{\frac{3}{2}x^2} = 3xf(x)$$

Esempio ($x'(t) = \frac{3x(t)}{t}$)

1. $\frac{dx}{dt} = \frac{3x}{t}$
2. $\frac{dx}{x} = 3\frac{dt}{t}$
3. $\int \frac{dx}{x} = \int 3\frac{dt}{t}$, ossia $\log_e(x) + C_1 = 3\log_e(t) + C_2$
4. $\log_e(x) = 3\log_e(t) + C$
5. $x = e^{3\log_e(t)+C} = \underbrace{e^C}_{K}\underbrace{e^{3\log_e(t)}}_{t^3} = Kt^3$

Quindi $x(t) = Kt^3$.

Nota
Anche qui conviene verificare la soluzione: si calcola $x'(t)$ e si controlla che sia $\frac{3x(t)}{t}$.

§27.4 Un'applicazione: la cinetica chimica

Le reazioni chimiche non sono istantanee — *natura non facit saltus.* Spesso la velocità di una reazione è legata alla temperatura e alla concentrazione dei reagenti. Analizziamo il caso più semplice: quando conta solo (o principalmente) la concentrazione di un unico reagente; frequentemente, in questo caso, la dipendenza è di questo genere

$$\frac{d[A]}{dt} = -k\,[A]^n$$

dove $[A]$ denota la concentrazione molare del reagente A. Le costanti k e n si chiamano rispettivamente costante di velocità e ordine della reazione (va da sé che le unità di misura della costante di velocità dipendono dall'ordine di reazione: $(\text{mol/L})^{1-n}/\text{s}$). Abbiamo quindi un'equazione differenziale, la cui soluzione ci darà l'andamento della concentrazione di A nel tempo.

Nota importante
La parola "ordine" non si riferisce qui all'ordine dell'equazione differenziale: l'ordine di reazione è una cosa completamente diversa — l'esponente! — mentre l'equazione è sempre del primo ordine.

Ordine zero ($n = 0$). L'equazione è $\frac{d[A]}{dt} = -k$, e basta integrare:

$$[A] = [A]_0 - k\,t$$

dove $[A]_0$ è la concentrazione al tempo $t = 0$: la concentrazione diminuisce linearmente (finché il reagente non è esaurito).

Primo ordine ($n = 1$). L'equazione $\frac{d[A]}{dt} = -k\,[A]$ è lineare a coefficienti costanti:

$$[A] = [A]_0\, e^{-kt}$$

quindi $[A]$ decade esponenzialmente, con tempo di dimezzamento dato dall'equazione $e^{-kt_{1/2}} = \frac{1}{2}$:

$$t_{1/2} = \frac{\log_e(2)}{k}$$

Seguono una cinetica del primo ordine molte reazioni di decomposizione e, approssimativamente, l'eliminazione di molti farmaci dal plasma.

Secondo ordine ($n = 2$). L'equazione $\frac{d[A]}{dt} = -k\,[A]^2$ è a variabili separabili:

$$\frac{d[A]}{[A]^2} = -k\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{[A]} = -k\,t + C$$

e imponendo che al tempo $t = 0$ la concentrazione sia $[A]_0$,

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + k\,t$$

Osservazione
La cinetica del primo ordine ha un tempo di dimezzamento costante. In una cinetica di ordine zero, ogni dimezzamento di $[A]$ impiega la metà del precedente. In una cinetica del secondo ordine, ogni dimezzamento impiega il doppio del precedente.

Misurando la concentrazione di A in vari istanti, è possibile distinguere fra gli ordini di reazione: un modo è osservare che, per ogni ordine di reazione, c'è un opportuno diagramma su cui la funzione $t \mapsto [A]$ è rappresentata da una retta.

ordine	soluzione	grafico che dà una retta
0	$[A] = [A]_0 - kt$	$[A]$ in funzione di t
1	$[A] = [A]_0\, e^{-kt}$	$[A]$ su scala logaritmica (semi-log)
2	$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + kt$	$\frac{1}{[A]}$ in funzione di t

Esempio
Un principio attivo in soluzione si degrada con una cinetica del primo ordine, con costante di velocità $k = 2.0 \cdot 10^{-3}$ giorni^{-1}. Quanto vale il tempo di dimezzamento? Dopo quanto tempo resta il 90% del principio attivo iniziale?

$$t_{1/2} = \frac{\log_e(2)}{k} = \frac{0.693147}{2.0 \cdot 10^{-3}\,\text{giorni}^{-1}} = 346.574\,\text{giorni} \approx 350\,\text{giorni}$$

Resta il 90% quando $e^{-kt} = 0.90$, cioè

$$t = \frac{\log_e(1/0.90)}{k} = \frac{0.105361}{2.0 \cdot 10^{-3}\,\text{giorni}^{-1}} = 52.680\,\text{giorni} \approx 53\,\text{giorni}$$

Esercizio
Due molecole di ciclopentadiene (C_5H_6) possono reagire formando una molecola di *di*ciclopentadiene ($C_{10}H_{12}$). I dati seguenti provengono da un esperimento eseguito alla temperatura di 25.1 °C in soluzione di benzene.

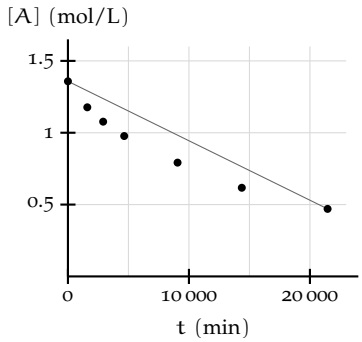
tempo (min)	0	1 600	2 910	4 650	9 060	14 370	21 460
$[C_5H_6]$ (mol/L)	1.358	1.177	1.077	0.977	0.792	0.617	0.470

L'autore dell'esperimento riporta un'accuratezza del 3–5% per le misure di concentrazione; i tempi sono probabilmente accurati entro ±10 min. Determina l'ordine della reazione e stima la costante di velocità.

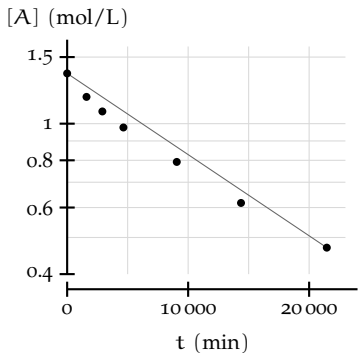
Soluzione. Calcoliamo il reciproco delle concentrazioni misurate, e tracciamo i diagrammi suggeriti dal metodo: lineare, semi-logaritmico e lineare di 1/concentrazione.

tempo (min)	0	1 600	2 910	4 650	9 060	14 370	21 460
$[C_5H_6]$ (mol/L)	1.358	1.177	1.077	0.977	0.792	0.617	0.470
$1/[C_5H_6]$ (L/mol)	0.736	0.850	0.929	1.024	1.263	1.621	2.128

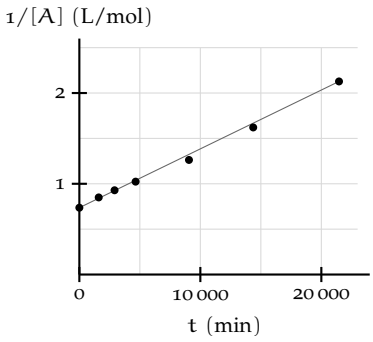
Si ottengono quindi i diagrammi seguenti



lineare



semi-logaritmico



lineare di 1/[A]

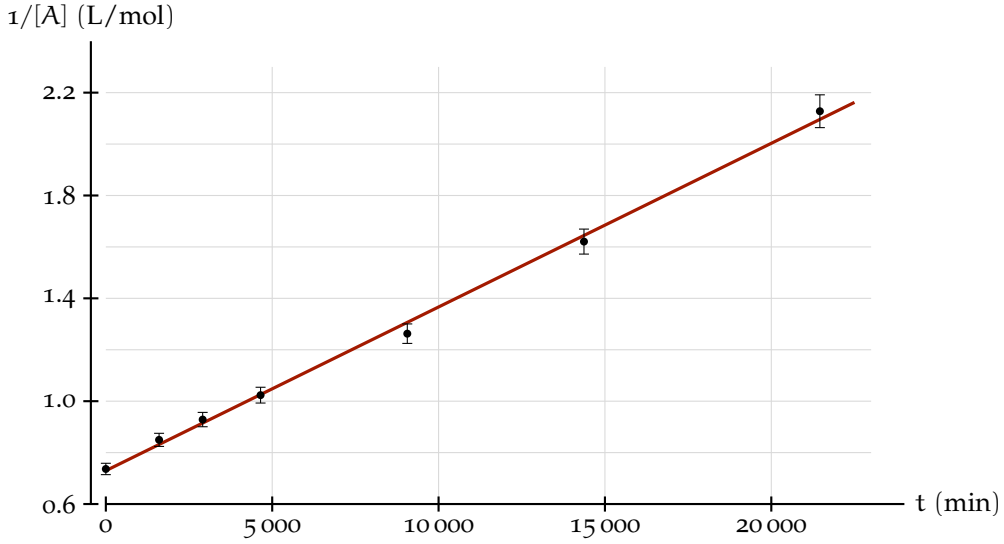
I punti paiono allineati nel terzo diagramma, per cui, se un ordine di reazione c'è, è il secondo. Per determinare i coefficienti della retta

$$\frac{1}{[A]} = \frac{1}{[A]_0} + kt$$

(vale a dire $1/[A]_0$ e k) possiamo ricorrere al metodo della regressione lineare (capitolo 20): la retta che troveremo, in questo contesto, si chiama retta dei minimi quadrati, perché è quella che rende minima la somma dei quadrati degli scarti dai dati misurati. La regressione lineare ci dà la retta

$$\frac{1}{[A]} = 0.730 \frac{L}{mol} + 6.366 \cdot 10^{-5} \frac{L}{mol \cdot min} \cdot t$$

Per verificare che questa ipotesi sia compatibile con i dati sperimentali, riportiamo sul diagramma dei dati questa retta e i margini di errore $1/[A] \pm 3\%$ — l'autore riporta un'accuratezza del 3–5%, qualunque cosa questo voglia dire.



I dati sono in accordo con la retta calcolata; possiamo quindi dire che l'ordine della reazione è $n = 2$, e la costante di velocità è $k \approx 6.4 \cdot 10^{-5}\,L\,mol^{-1}\,min^{-1}$.
Perché ho scelto di arrotondare questo valore a due cifre significative? Vista l'incertezza sui dati, sebbene non l'abbiamo calcolata esattamente, possiamo aspettarci un'incertezza simile sul risultato. Siccome il 3% di 6.366 è circa 0.2, l'ultima cifra affidabile del risultato è quella dei decimi. □

§27.5 Esercizi

Test 150 (soluzione a p. 353)
Trova la soluzione generale dell'equazione $f' = -2f + 4$.

Esercizio 151 (soluzione a p. 353)
Trova la soluzione dell'equazione differenziale $f'' + 4f' + 5f + 10 = 0$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$.

Esercizio 152 (soluzione a p. 354)
Trova $f(x)$ sapendo che $x\,f(x)\,f'(x) = 1$ e $f(1) = 1$.

Esercizio 153 (soluzione a p. 354)
La funzione $f(x) = 10^{2+x} + 5$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$f'(x) = Af(x) + B$$

Determina A e B.

Esercizio 154 (soluzione a p. 355)
La funzione $g(x) = (1 + x^2)e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$g'''(x) = Cg''(x) + Dg'(x) + Eg(x) + F$$

Determina C, D, E, F.

Esercizio 155 (soluzione a p. 355)
La funzione $f(x) = e^{-2x}\sin(x + 1)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti: determina questa equazione.

Esercizio 156 (soluzione a p. 356)
Indichiamo con $[A]_t$ la concentrazione molare di un reagente, in una certa reazione chimica, in funzione del tempo t. Sappiamo che $[A]_t$ soddisfa l'equazione differenziale (cinetica del secondo ordine)

$$\frac{d[A]_t}{dt} = -k\,[A]_t^2$$

nella quale k è una costante. Sapendo che $[A]_{0\,s} = 1.000\,\text{mol/L}$ e $[A]_{600\,s} = 0.230\,\text{mol/L}$, determina $[A]_{300\,s}$. Traccia quindi un grafico semilogaritmico, con l'asse dei tempi in scala lineare, che rappresenti l'andamento di $[A]_t$ per t fra 0 e 600 secondi.

Test 150 (p. 208)
Trova la soluzione generale dell'equazione $f' = -2f + 4$.

Soluzione. È lineare a coefficienti costanti del primo ordine, con $a = -2$ e $b = 4$. La soluzione generale dell'omogenea associata $f' = -2f$ è $f(x) = Ce^{-2x}$; una soluzione particolare costante si trova da

$$0 = -2k + 4 \qquad \Longrightarrow \qquad k = 2$$

(ossia $k = -\frac{b}{a}$). Sommando,

$$f(x) = Ce^{-2x} + 2$$

(verifica: $f' = -2Ce^{-2x}$ e $-2f + 4 = -2Ce^{-2x} - 4 + 4 = -2Ce^{-2x}$).

Esercizio 151 (p. 208)
Trova la soluzione dell'equazione differenziale $f'' + 4f' + 5f + 10 = 0$ tale che $f(0) = f'(0) = 0$.

Soluzione. Portiamo l'equazione nella forma in cui sappiamo trattarla:

$$f'' = \underbrace{-4}_{a} f' \underbrace{-5}_{b} f \underbrace{-10}_{c}$$

1. Omogenea. L'equazione di secondo grado è $\alpha^2 - a\alpha - b = \alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0$, con $\Delta = a^2 + 4b = 16 - 20 = -4 < 0$. Siamo nel terzo caso, con

$$\omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad \text{e} \qquad e^{\frac{a}{2}x} = e^{-2x}$$

quindi la soluzione generale dell'omogenea è

$$f(x) = e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big)$$

2. Soluzione particolare. Siccome $b \neq 0$, va bene la costante $f(x) = -\frac{c}{b} = -\frac{-10}{-5} = -2$.

3. Soluzione generale.

$$f(x) = e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big) - 2$$

4. Le condizioni. Da $f(0) = 0$:

$$0 = \underbrace{e^0}_{1}\big(C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0\big) - 2 = C_1 - 2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = 2$$

Per l'altra condizione serve la derivata:

$$f'(x) = -2e^{-2x}\big(C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)\big) + e^{-2x}\big(-C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)\big)$$

e in $x = 0$

$$0 = -2C_1 + C_2 \qquad \Longrightarrow \qquad C_2 = 2C_1 = 4$$

In conclusione

$$f(x) = e^{-2x}\big(2\cos(x) + 4\sin(x)\big) - 2$$

Esercizio 152 (p. 208)
Trova $f(x)$ sapendo che $x\,f(x)\,f'(x) = 1$ e $f(1) = 1$.

Soluzione. L'equazione è a variabili separabili: isolando la derivata,

$$f' = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g(x)} \cdot \underbrace{\frac{1}{f}}_{h(f)}$$

Procediamo con il metodo solito.

1. $\dfrac{df}{dx} = \dfrac{1}{xf}$
2. $f\,df = \dfrac{dx}{x}$
3. $\displaystyle\int f\,df = \int \frac{dx}{x}$, ossia $\frac{1}{2}f^2 + C_1 = \log_e(x) + C_2$
4. $\frac{1}{2}f^2 = \log_e(x) + C$
5. $f^2 = 2\log_e(x) + 2C$, e chiamando $K = 2C$,

$$f(x) = \sqrt{2\log_e(x) + K}$$

Questa è la soluzione generale. Imponiamo ora $f(1) = 1$, ricordando che $\log_e(1) = 0$:

$$1 = \sqrt{0 + K} \qquad \Longrightarrow \qquad K = 1$$

e quindi

$$f(x) = \sqrt{2\log_e(x) + 1}$$

(verifica: $f' = \frac{1}{x\sqrt{2\log_e(x)+1}}$, quindi $xff' = x \cdot \cancel{\sqrt{2\log_e(x)+1}} \cdot \frac{1}{x\cancel{\sqrt{2\log_e(x)+1}}} = 1$).

Esercizio 153 (p. 208)
La funzione $f(x) = 10^{2+x} + 5$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$f'(x) = Af(x) + B$$

Determina A e B.

Soluzione. Sostituendo l'espressione di f nell'equazione otteniamo

$$(10^{2+x} + 5)' = A(10^{2+x} + 5) + B$$
$$10^{2+x}\log_e(10) = A10^{2+x} + 5A + B$$

Ne ricaviamo il sistema

$$\begin{cases} \log_e(10) = A \\ 0 = 5A + B \end{cases}$$

che, risolto, dà

$$A = \log_e(10) = 2.303 \qquad B = -5\log_e(10) = -11.51$$

Esercizio 154 (p. 208)
La funzione $g(x) = (1+x^2)e^x$ è una soluzione particolare dell'equazione

$$g'''(x) = Cg''(x) + Dg'(x) + Eg(x) + F$$

Determina C, D, E, F.

Soluzione. Calcoliamo le derivate: ognuna è un polinomio di secondo grado moltiplicato per e^x.

$$\begin{aligned} g(x) &= (x^2+1)\,e^x \\ g'(x) &= 2x\,e^x + (x^2+1)\,e^x = (x^2+2x+1)\,e^x \\ g''(x) &= (2x+2)\,e^x + (x^2+2x+1)\,e^x = (x^2+4x+3)\,e^x \\ g'''(x) &= (2x+4)\,e^x + (x^2+4x+3)\,e^x = (x^2+6x+7)\,e^x \end{aligned}$$

Sostituendo e portando tutto a sinistra, l'equazione diventa

$$(1-C-D-E)x^2e^x + (6-4C-2D)xe^x + (7-3C-D-E)e^x - F = 0$$

Da cui deduciamo che devono annullarsi i coefficienti fra parentesi e il termine noto:

$$\begin{cases} 1-C-D-E=0 \\ 6-4C-2D=0 \\ 7-3C-D-E=0 \\ F=0 \end{cases}$$

Sottraendo la prima equazione dalla terza si ottiene $6-2C=0$, cioè $C=3$; dalla seconda $D = \frac{6-12}{2} = -3$; dalla prima $E = 1-3+3 = 1$. In conclusione

$$C=3 \qquad D=-3 \qquad E=1 \qquad F=0$$

(verifica: $3(x^2+4x+3) - 3(x^2+2x+1) + (x^2+1) = x^2+6x+7$.)

Esercizio 155 (p. 208)
La funzione $f(x) = e^{-2x}\sin(x+1)$ soddisfa un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti: determina questa equazione.

Soluzione. Dobbiamo determinare a, b, c in modo che valga

$$f''(x) = a\,f'(x) + b\,f(x) + c$$

Calcoliamo le derivate (regola del prodotto e della funzione composta):

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2e^{-2x}\sin(x+1) + e^{-2x}\cos(x+1) \\ f''(x) &= 4e^{-2x}\sin(x+1) - 2e^{-2x}\cos(x+1) - 2e^{-2x}\cos(x+1) - e^{-2x}\sin(x+1) \\ &= 3e^{-2x}\sin(x+1) - 4e^{-2x}\cos(x+1) \end{aligned}$$

L'equazione da soddisfare è quindi

$$3e^{-2x}\sin(x+1) - 4e^{-2x}\cos(x+1) = -2a\,e^{-2x}\sin(x+1) + a\,e^{-2x}\cos(x+1) + b\,e^{-2x}\sin(x+1) + c$$

e, raccogliendo,

$$(3 + 2a - b)\,e^{-2x}\sin(x+1) - (4+a)\,e^{-2x}\cos(x+1) - c = 0$$

Per cui ci basta richiedere che

$$\begin{cases} 3 + 2a - b = 0 \\ 4 + a = 0 \\ c = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} a = -4 \\ b = -5 \\ c = 0 \end{cases}$$

In conclusione, l'equazione cercata è

$$f''(x) = -4f'(x) - 5f(x)$$

(controprova: con $a = -4$ e $b = -5$ occorre risolvere l'equazione di secondo grado $\alpha^2 + 4\alpha + 5 = 0$, con $\Delta = 16 - 20 = -4 < 0$; quindi $\frac{a}{2} = -2$, $\omega = 1$ e la soluzione generale è $e^{-2x}\big(C_1\cos(x) + C_2\sin(x)\big)$. Siccome

$$\sin(x+1) = \sin(1)\cdot\cos(x) + \cos(1)\cdot\sin(x)$$

la nostra f è quella con $C_1 = \sin(1)$ e $C_2 = \cos(1)$.)

Esercizio 156 (p. 208)
Indichiamo con $[A]_t$ la concentrazione molare di un reagente, in una certa reazione chimica, in funzione del tempo t. Sappiamo che $[A]_t$ soddisfa l'equazione differenziale (cinetica del secondo ordine)

$$\frac{d[A]_t}{dt} = -k\,[A]_t^2$$

nella quale k è una costante. Sapendo che $[A]_{0\,s} = 1.000\,\text{mol/L}$ e $[A]_{600\,s} = 0.230\,\text{mol/L}$, determina $[A]_{300\,s}$. Traccia quindi un grafico semilogaritmico, con l'asse dei tempi in scala lineare, che rappresenti l'andamento di $[A]_t$ per t fra 0 e 600 secondi.

Soluzione. L'equazione è a variabili separabili, e separandole otteniamo

$$\frac{d[A]}{[A]^2} = -k\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad -\frac{1}{[A]_t} = -k\,t + C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{[A]_t} = \frac{1}{[A]_0} + k\,t$$

(la costante l'abbiamo fissata ponendo $t = 0$). Se misuriamo le concentrazioni in mol/L e i tempi in secondi, i dati ci danno

$$\frac{1}{0.230} = \frac{1}{1.000} + 600\,k \qquad \Longrightarrow \qquad k = \frac{4.348 - 1}{600} = 5.580\cdot 10^{-3}$$

(in $\mathrm{L\,mol^{-1}\,s^{-1}}$), e quindi

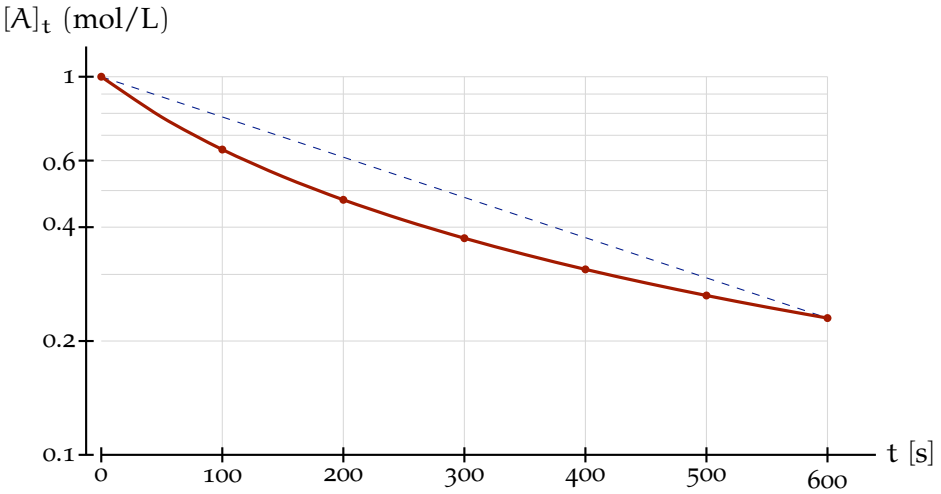
$$\frac{1}{[A]_{300\,s}} = 1 + 300 \cdot 5.580 \cdot 10^{-3} = 2.674 \qquad \Longrightarrow \qquad [A]_{300\,s} \approx 0.374\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{L}}$$

(Siccome $1/[A]$ è una funzione lineare del tempo, a metà tempo $1/[A]$ è la media fra $1/1.000$ e $1/0.230$. Con una cinetica del primo ordine e gli stessi estremi avremmo invece $\sqrt{1.000 \cdot 0.230} \approx 0.480\,\mathrm{mol/L}$.)

Per il grafico calcolo $[A]_t$, in mol/L, ogni 100 secondi:

t	0	100	200	300	400	500	600
$[A]_t$	1.000	0.642	0.473	0.374	0.309	0.264	0.230

Siccome le ordinate vanno da 0.230 a 1, sull'asse logaritmico mi basta una decade, da 0.1 a 1.



Il grafico non è una retta, perché la cinetica non è del primo ordine. Per confronto ho tratteggiato l'andamento che avremmo con una cinetica del primo ordine e gli stessi valori a 0 e a 600 secondi — quella del secondo ordine scende più in fretta all'inizio e più lentamente alla fine.

Esercizio 157 (p. 214)
Calcola l'area della regione limitata di piano compresa fra i grafici di $f(x) = 2 - x^2$ e $g(x) = x^2$.

Soluzione. Le due parabole si incontrano dove $2 - x^2 = x^2$, ossia $x^2 = 1$, cioè in $x = -1$ e $x = 1$. Fra questi due valori la parabola f sta sopra la parabola g, quindi l'area è la differenza fra l'area sotto f e l'area sotto g:

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \int_{-1}^{1} f(x)\,dx - \int_{-1}^{1} g(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \left(2 - x^2\right) - x^2\,dx \\ &= \int_{-1}^{1} 2 - 2x^2\,dx = \left[2x - \frac{2}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \left(2 - \frac{2}{3}\right) - \left(-2 + \frac{2}{3}\right) = \frac{8}{3}\end{aligned}$$