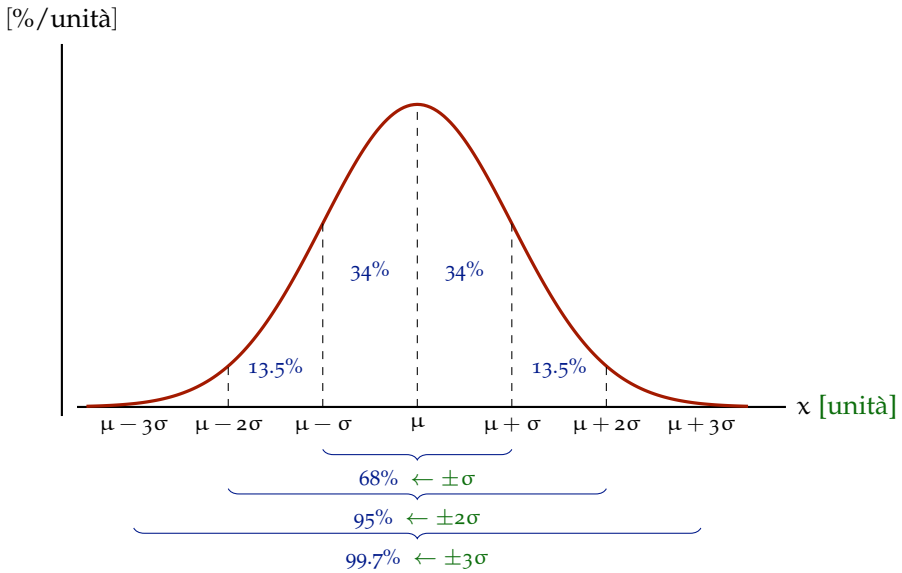
§18 La distribuzione gaussiana

Diverse variabili statistiche numeriche — stature, concentrazioni di emoglobina nel sangue, pesi delle compresse di un lotto, errori di misura, punteggi di prove di abilità — hanno istogrammi dalla forma simile: una campana simmetrica, alta al centro e sempre più bassa allontanandosi dalla media. La curva ideale che descrive questa forma si chiama distribuzione gaussiana, o semplicemente gaussiana (si dice anche distribuzione normale).



Una gaussiana è determinata da due parametri: la media μ, che è il centro della campana, e la deviazione standard σ, che ne misura la larghezza. I punti $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ sono i punti in cui la curva cambia concavità.

Fatto
In una variabile statistica distribuita in maniera gaussiana, con media μ e deviazione standard σ,

- circa il 68% degli individui ha un valore compreso fra $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$;
- circa il 95% fra $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$;
- circa il 99.7% fra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$.

Nota importante
Memorizza le percentuali: 68%, 95%, 99.7%!

Usando la regola del 68–95–99.7 è facile ricavare mnemonicamente la percentuale degli individui con variabile compresa fra numeri del tipo $\mu \pm n\sigma$, per $n = 0 \dots 3$.

Esempio
Che percentuale della popolazione sta fra $\mu + \sigma$ e $\mu + 2\sigma$?

Fra μ e $\mu + 2\sigma$, sfruttando la simmetria della distribuzione, c'è la metà del 95% degli individui che sta fra $\mu - 2\sigma$ e $\mu + 2\sigma$, cioè il 47.5%. Fra μ e $\mu + \sigma$, ragionando allo stesso modo, c'è lo $\frac{1}{2} \cdot 68\% = 34\%$ degli individui. Gli individui fra $\mu + \sigma$ e $\mu + 2\sigma$ sono tutti quelli fra μ e $\mu + 2\sigma$ meno quelli fra μ e $\mu + \sigma$, quindi il $47.5\% - 34\% =$ 13.5% circa (circa perché i numeri 68–95–99.7 non sono esatti).

Nota importante
L'ipotesi che una variabile statistica sia gaussiana non va presa alla leggera. In particolare, le code delle gaussiane, cioè le parti della distribuzione lontane dalla media, sono molto sottili. Fuori dall'intervallo fra $\mu - 3\sigma$ e $\mu + 3\sigma$ resta solo lo 0.3% degli individui. Fuori dall'intervallo fra $\mu - 5\sigma$ e $\mu + 5\sigma$ ne resta meno di uno su un milione.

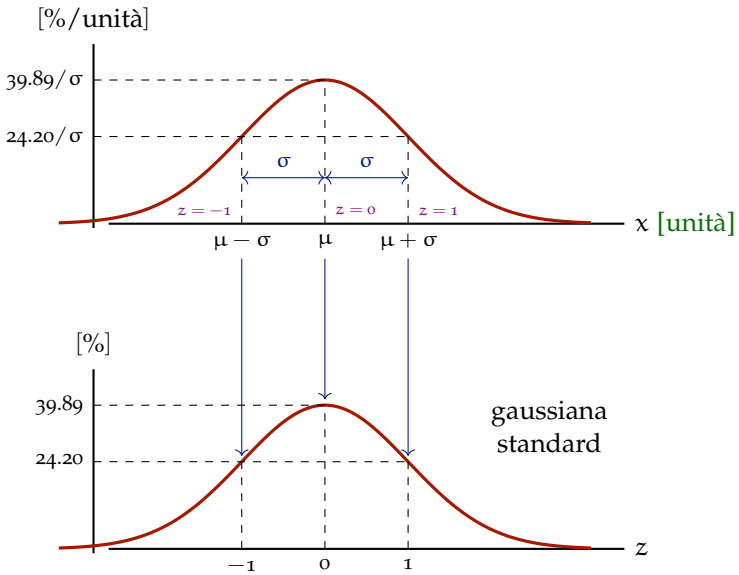
In una popolazione gaussiana è quasi impossibile trovare individui molto lontani dal centro della distribuzione (in proporzione alla larghezza del centro stesso). Un esempio classico in cui questi individui, però, ci sono è la distribuzione dei redditi. Altri sono le durate delle degenze ospedaliere, e l'ammontare delle spese mediche per paziente: quasi tutti i pazienti vengono dimessi in pochi giorni, e quasi tutte le cure non costano molto, tuttavia una quota piccola, ma non trascurabile, dei ricoveri dura mesi, e alcuni interventi sono costosissimi.

§18.1 La gaussiana standard

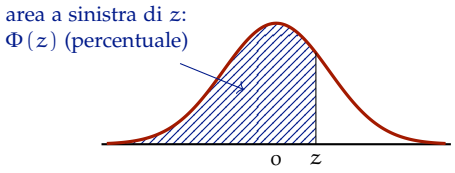
Tutte le gaussiane hanno la stessa forma: cambiano solo la posizione del centro e la scala. Per ricondurle a una sola si usa la coordinata standard, o z-score, di un valore x della variabile:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

La z misura la distanza di x dalla media in deviazioni standard: il punto $x = \mu$ corrisponde a $z = 0$, il punto $x = \mu + \sigma$ a $z = 1$, il punto $x = \mu - \sigma$ a $z = -1$, e così via. La gaussiana con media 0 e deviazione standard 1 si chiama gaussiana standard.



Le aree sotto la gaussiana standard sono tabulate.



z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
−0.85	19.77	0.65	74.22
−0.80	21.19	0.70	75.80
−0.75	22.66	0.75	77.34
−0.70	24.20	0.80	78.81
−0.65	25.78	0.85	80.23

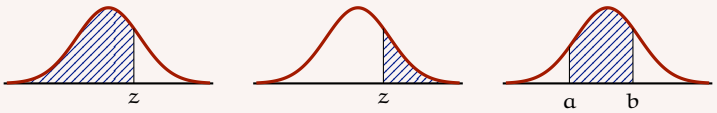
La tavola dell'appendice C riporta, per ciascun valore di z, l'area a sinistra di z, in percentuale, cioè la percentuale degli individui con coordinata standard minore di z. Questa area si indica con $\Phi(z)$ e si chiama funzione di ripartizione della gaussiana standard. Per esempio, il 77.34% degli individui ha coordinata standard minore di 0.75, e il 22.66% minore di -0.75. Notiamo che $22.66\% + 77.34\% = 100\%$: per la simmetria della curva, l'area a sinistra di $-z$ è uguale all'area a destra di z.

Per conoscere la percentuale di individui con $X < a$, per una variabile X gaussiana qualunque, basta passare alla coordinata standard: la percentuale degli individui con $X < a$ è $\Phi(z) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$.

Per tracciare un disegno approssimativo della curva bastano le quote del picco e dei flessi, indicate nel diagramma qui sopra. Per una gaussiana qualunque, le quote vanno divise per σ: il risultato è naturalmente espresso in %/unità, ossia in densità di probabilità. Perché? La curva è stirata orizzontalmente di un fattore σ rispetto a

quella standard, quindi, per conservare l'area totale del 100%, deve essere schiacciata verticalmente del medesimo fattore.

Regola
Con la tavola di Φ si calcola l'area di qualunque regione:



$\Phi(z)$ $\quad 100\% - \Phi(z)$ $\quad \Phi(b) - \Phi(a)$

e per simmetria $\Phi(-z) = 100\% - \Phi(z)$.

Per esempio, fra -1 e 1 cade il $\Phi(1) - \Phi(-1) = 84.13\% - 15.87\% = 68.26\%$ degli individui: è il 68% che già conosciamo.

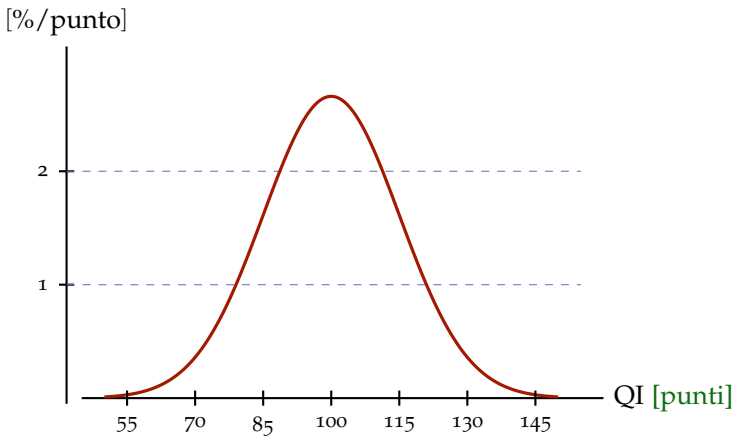
Nota importante
Fai sempre, in brutta, un disegno, tratteggiando l'area che cerchi, e scrivila come differenza di aree a sinistra, cioè di valori di Φ.

Esercizio
Il quoziente di intelligenza (QI) è costruito in modo tale che risulta distribuito in maniera gaussiana con media 100 e deviazione standard 15. Riporta su un diagramma la graduazione corretta, inclusa l'unità di misura sull'asse delle ordinate. Completa quindi le frasi seguenti.

1. Il . . . % delle persone ha un QI maggiore di 100.
2. Il . . . % delle persone ha un QI maggiore di 110.
3. Il . . . % delle persone ha un QI maggiore di 120.
4. Le persone con un QI minore di 95 sono tante quante quelle con un QI maggiore di . . .
5. Solo una persona su 100 ha un QI maggiore di . . .
6. La differenza fra il 75-esimo e il 25-esimo percentile (detta differenza interquartile) è di . . . punti, e in questo intervallo di QI cade il . . . % delle persone.

Soluzione. L'altezza massima della curva, in 100, e l'altezza nei flessi, in 100 ± 15, cioè in 85 e 115, sono

$$\frac{39.89\%}{15 \text{ punti}} \approx 2.66 \frac{\%}{\text{punto}} \qquad \frac{24.20\%}{15 \text{ punti}} \approx 1.61 \frac{\%}{\text{punto}}$$



1. Il 50%, per simmetria.
2. $z = \frac{110-100}{15} \approx 0.67$. Dalla tavola, interpolando fra $\Phi(0.65) = 74.22\%$ e $\Phi(0.70) = 75.80\%$,
$$\Phi(0.67) \approx 74.22\% + \frac{0.67-0.65}{0.70-0.65}(75.80\% - 74.22\%) = 74.85\%$$
quindi oltre 0.67 resta $100\% - 74.85\% = 25.15\% \approx 25\%$.
3. $z = \frac{120-100}{15} \approx 1.33$. Interpolando fra $\Phi(1.30) = 90.32\%$ e $\Phi(1.35) = 91.15\%$,
$$\Phi(1.33) \approx 90.32\% + \frac{1.33-1.30}{1.35-1.30}(91.15\% - 90.32\%) = 90.82\%$$
quindi oltre resta $100\% - 90.82\% = 9.18\% \approx 9\%$.
4. $95 = 100 - 5$, quindi per simmetria $105 = 100 + 5$.
5. Cerchiamo z tale che oltre z ci sia l'1%, ossia $\Phi(z) = 99\%$: dalla tavola, interpolando fra $\Phi(2.30) = 98.93\%$ e $\Phi(2.35) = 99.061\%$,
$$z \approx 2.30 + \frac{2.35-2.30}{99.061-98.93}(99.00 - 98.93) = 2.327$$
quindi $\mathrm{QI} = 100 + 2.327 \cdot 15 = 134.9 \approx 135$.
6. Fra il 25-esimo e il 75-esimo percentile cade, per definizione, il 50% delle persone. Il 75-esimo percentile ha $\Phi(z) = 75\%$: dalla tavola, interpolando fra $\Phi(0.65) = 74.22\%$ e $\Phi(0.70) = 75.80\%$,
$$z \approx 0.65 + \frac{0.70-0.65}{75.80-74.22}(75.00 - 74.22) \approx 0.675$$
e per simmetria il 25-esimo ha $z = -0.675$. I due percentili sono quindi $100 \pm 0.675 \cdot 15$, ossia 89.9 e 110.1, e la differenza interquartile è circa 20 punti.

In conclusione:

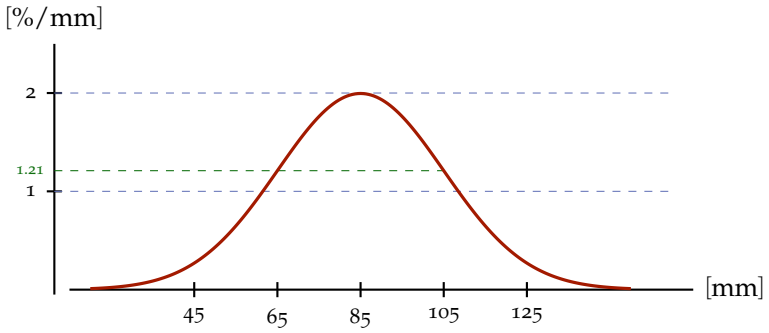
1. Il 50% delle persone ha un QI maggiore di 100.
2. Il 25% delle persone ha un QI maggiore di 110.
3. Il 9% delle persone ha un QI maggiore di 120.

4. Le persone con un QI minore di 95 sono tante quante quelle con un QI maggiore di 105.
5. Solo una persona su 100 ha un QI maggiore di 135.
6. La differenza fra il 75-esimo e il 25-esimo percentile (detta differenza interquartile) è di 20 punti, e in questo intervallo di QI cade il 50% delle persone.

□

Esercizio
Le lunghezze di un campione di mille pesci rossi sono distribuite in maniera gaussiana, con media di 85 mm e deviazione standard di 20 mm. Rappresenta graficamente questa distribuzione. Quanti pesci rossi sono più lunghi di dieci centimetri? Che percentuale di questi supera gli undici centimetri? È ragionevole che qualcuno dei pesci del campione raggiunga quindici centimetri di lunghezza?

Soluzione. Il grafico: il massimo, in 85 mm, vale $\frac{39.89\%}{20\,\text{mm}} \approx 2\,\%/\text{mm}$; in $85\,\text{mm} - 20\,\text{mm}$ e in $85\,\text{mm} + 20\,\text{mm}$ vale $\frac{24.20\%}{20\,\text{mm}} \approx 1.21\,\%/\text{mm}$.



Per 100 mm:

$$z = \frac{100\,\text{mm} - 85\,\text{mm}}{20\,\text{mm}} = 0.75$$

Dalla tavola, $\Phi(0.75) = 77.34\%$, quindi oltre 0.75

$$100\% - 77.34\% = 22.66\% \qquad \text{n. pesci oltre } 10\,\text{cm} = \frac{22.66}{100} \cdot 1000 \approx 227$$

Per 110 mm:

$$z = \frac{110\,\text{mm} - 85\,\text{mm}}{20\,\text{mm}} = 1.25 \qquad 100\% - \Phi(1.25) = 100\% - 89.44\% = 10.56\%$$

ossia circa 106 pesci. Fra i 227 pesci più lunghi di 10 cm, quelli oltre 11 cm sono quindi

$$\frac{105.6}{226.6} \cdot 100\% \approx 47\%$$

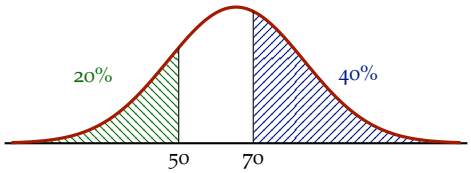
Infine, per 150 mm:

$$z = \frac{150\,\text{mm} - 85\,\text{mm}}{20\,\text{mm}} = 3.25 \qquad 100\% - \Phi(3.25) = 100\% - 99.9423\% = 0.0577\%$$

che su mille pesci fa 0.577 pesci, cioè circa mezzo pesce. Quindi può essercene uno, come può non essercene nessuno; trovarne parecchi, invece, sarebbe sorprendente. □

Esercizio
La variabile statistica X è distribuita in maniera gaussiana. Sapendo che il 40% degli individui ha $X > 70$ e il 20% degli individui ha $X < 50$, determina media e deviazione standard di X.

Soluzione. Chiamiamo z_{70} e z_{50} le coordinate standard di 70 e di 50.



Poiché il 40% sta oltre 70, sotto 70 c'è il 60%: $\Phi(z_{70}) = 60\%$. Dalla tavola, interpolando linearmente fra le righe 0.25 (59.87%) e 0.30 (61.79%),

$$z_{70} = 0.25 + \frac{0.30 - 0.25}{61.79 - 59.87}(60.00 - 59.87) = 0.2534$$

Allo stesso modo, sotto 50 c'è il 20%: $\Phi(z_{50}) = 20\%$, e interpolando fra le righe -0.85 (19.77%) e -0.80 (21.19%),

$$z_{50} = -0.85 + \frac{-0.80 - (-0.85)}{21.19 - 19.77}(20.00 - 19.77) = -0.8419$$

Ora, $z_{70} = \frac{70-\mu}{\sigma}$ e $z_{50} = \frac{50-\mu}{\sigma}$, quindi

$$\begin{cases} 70 = \mu + 0.2534\,\sigma \\ 50 = \mu - 0.8419\,\sigma \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro,

$$20 = \sigma\,(0.2534 + 0.8419) = 1.0953\,\sigma \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = 18.26$$

e poi

$$\mu = 70 - 0.2534 \cdot 18.26 = 65.37$$

□

§18.2 Esercizi

Test 95 (soluzione a p. 306)
In una distribuzione gaussiana, che percentuale della popolazione ricade

1. entro una deviazione standard dalla media?
2. entro due deviazioni standard dalla media?
3. fra la media e la media più una deviazione standard?
4. fra la media meno due deviazioni standard e la media?

Esercizio 96 (soluzione a p. 307)
Usando la tavola della gaussiana (appendice C), trova la percentuale di una popolazione distribuita in maniera gaussiana che ha coordinata standard

1. $z < 1.5$;
2. $z > -0.5$;
3. $-0.5 < z < 1.5$.

Esercizio 97 (soluzione a p. 307)
Il peso delle compresse prodotte da una macchina è distribuito in maniera gaussiana, con media 500 mg e deviazione standard 8 mg.

1. Che percentuale delle compresse pesa meno di 490 mg?
2. Che percentuale pesa fra 490 mg e 512 mg?
3. Si vogliono scartare le compresse troppo leggere, e soltanto quelle: il 5% più leggero della produzione. Sotto quale peso si scarta una compressa?

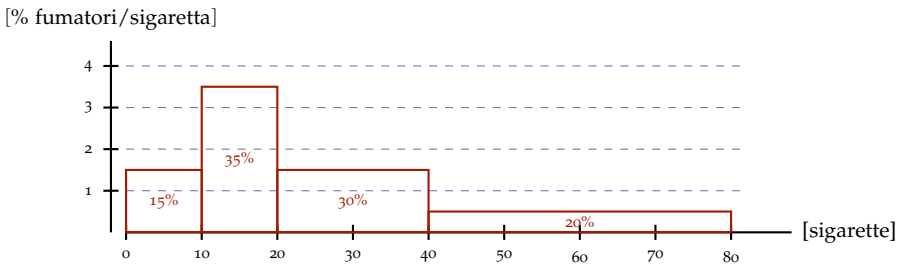
Esercizio 98 (soluzione a p. 308)
Supponiamo che, in una certa popolazione, la pressione arteriosa sistolica sia distribuita in maniera gaussiana, con media 125 mmHg e deviazione standard 15 mmHg.

1. Che percentuale della popolazione ha una pressione sistolica di almeno 140 mmHg?
2. Una persona ha una pressione sistolica di 110 mmHg. A che percentile si colloca, approssimativamente?
3. Quanto vale il 90-esimo percentile della pressione sistolica?

Esercizio 99 (soluzione a p. 309)
Una variabile statistica X si distribuisce in maniera gaussiana con media 15 e deviazione standard 5.

1. Rappresenta graficamente questa distribuzione indicando, in ascissa, il valore di X e, in ordinata, la densità di probabilità.
2. Che percentuale della popolazione ha un valore di X compreso fra 12 e 13?
3. Determina k in modo tale che il 50% della popolazione abbia un valore di X compreso fra 12 e k.

Esercizio 100 (soluzione a p. 310)
Supponiamo che i volumi dei globuli rossi di un paziente siano distribuiti in maniera approssimativamente gaussiana. Il volume medio di un globulo rosso è di 85 femtolitri, e il 20% dei globuli rossi è più grande di 100 femtolitri. Quanto vale la deviazione standard della distribuzione dei volumi? Quanto vale il volume mediano dei globuli rossi più grandi di 100 femtolitri? Rappresenta graficamente la distribuzione dei volumi.



La mediana è la soglia che divide a metà l'area dell'istogramma: il $15\% + 35\% = 50\%$ dei fumatori sta sotto le 20 sigarette al giorno, quindi la mediana è 20 sigarette.

Più di 30 sigarette: è l'area a destra di 30, cioè metà della colonna del 30% più tutta quella del 20%: $\frac{1}{2} \cdot 30\% + 20\% = 35\%$.

Per la media, il meglio che possiamo fare è supporre che i fumatori di ciascuna colonna siano equidistribuiti, quindi fumino in media quanto il centro della colonna. Su 100 fumatori:

$$15 \cdot \frac{0+10}{2} + 35 \cdot \frac{10+20}{2} + 30 \cdot \frac{20+40}{2} + 20 \cdot \frac{40+80}{2} = 2700$$

sigarette al giorno, quindi in media $\frac{2700}{100} = 27$ sigarette al giorno a testa.

Nota: la media, 27, è maggiore della mediana, 20. Questo era atteso, perché l'istogramma ha una *coda* verso destra.

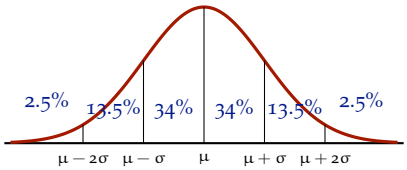
Test 95 (p. 133)
In una distribuzione gaussiana, che percentuale della popolazione ricade

1. entro una deviazione standard dalla media?
2. entro due deviazioni standard dalla media?
3. fra la media e la media più una deviazione standard?
4. fra la media meno due deviazioni standard e la media?

Soluzione. A queste domande possiamo rispondere ricordando due fatti mnemonici: il 68% della popolazione ricade entro una deviazione standard dalla media, il 95% entro due. Questi due numeri rispondono alle prime due domande: 68% e 95%. Sottraendo le due aree fra loro, e dal totale del 100%, otteniamo

$$95\% - 68\% = 27\% \qquad 100\% - 95\% = 5\%$$

e sfruttando la simmetria della gaussiana

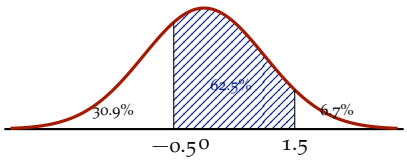


Questa figura permette di rispondere immediatamente alle domande rimanenti: fra la media e la media più una deviazione standard cade il 34%; fra la media meno due deviazioni standard e la media il $13.5\% + 34\% = 47.5\%$. (Non conviene memorizzare le cifre di questa figura: si ricavano dal 68% e dal 95%, che invece conviene sapere.)

Esercizio 96 (p. 133)
Usando la tavola della gaussiana (appendice C), trova la percentuale di una popolazione distribuita in maniera gaussiana che ha coordinata standard

1. $z < 1.5$;
2. $z > -0.5$;
3. $-0.5 < z < 1.5$.

Soluzione. Dalla tavola, $\Phi(1.5) = 93.32\%$ e $\Phi(-0.5) = 30.85\%$.



1. $z < 1.5$: è l'area a sinistra di 1.5, cioè $\Phi(1.5) = 93.32\%$.
2. $z > -0.5$: è l'area a destra di -0.5, cioè

$$100\% - \Phi(-0.5) = 100\% - 30.85\% = 69.15\%$$

   (Per simmetria è anche $\Phi(0.5)$.)
3. $-0.5 < z < 1.5$: l'area tratteggiata, $\Phi(1.5) - \Phi(-0.5) = 93.32\% - 30.85\% = 62.47\%$.

Esercizio 97 (p. 133)
Il peso delle compresse prodotte da una macchina è distribuito in maniera gaussiana, con media 500 mg e deviazione standard 8 mg.

1. Che percentuale delle compresse pesa meno di 490 mg?
2. Che percentuale pesa fra 490 mg e 512 mg?
3. Si vogliono scartare le compresse troppo leggere, e soltanto quelle: il 5% più leggero della produzione. Sotto quale peso si scarta una compressa?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Calcoliamo la coordinata standard di 490 mg,

$$z = \frac{490\,\text{mg} - 500\,\text{mg}}{8\,\text{mg}} = -1.25$$

e leggiamo nella tavola che sotto 490 mg c'è il $\Phi(-1.25) = 10.56\% \approx 10.6\%$ delle compresse. □

Soluzione della domanda 2. Per 512 mg otteniamo

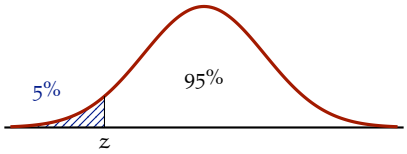
$$z = \frac{512\,\text{mg} - 500\,\text{mg}}{8\,\text{mg}} = 1.5$$

quindi fra 490 mg e 512 mg c'è

$$\Phi(1.5) - \Phi(-1.25) = 93.32\% - 10.56\% \approx 82.8\%$$

□

Soluzione della domanda 3. Cerchiamo la coordinata standard z che ha a sinistra il 5% delle compresse, ossia quella per cui $\Phi(z) = 5\%$.



Interpolando nella tavola fra le righe -1.65 (4.95%) e -1.60 (5.48%) troviamo

$$z = -1.65 + \frac{-1.60 - (-1.65)}{5.48 - 4.95}\,(5.00 - 4.95) = -1.645$$

e quindi dobbiamo scartare le compresse che pesano meno di

$$500\,\text{mg} - 1.645 \cdot 8\,\text{mg} \approx 486.8\,\text{mg}$$

(Il coefficiente non è 1.96: con 1.96 lasceremmo fuori il 5% *in tutto*, ossia il 2.5% per parte, mentre a noi interessa una coda sola.) □

Esercizio 98 (p. 133)
Supponiamo che, in una certa popolazione, la pressione arteriosa sistolica sia distribuita in maniera gaussiana, con media 125 mmHg e deviazione standard 15 mmHg.

1. Che percentuale della popolazione ha una pressione sistolica di almeno 140 mmHg?
2. Una persona ha una pressione sistolica di 110 mmHg. A che percentile si colloca, approssimativamente?
3. Quanto vale il 90-esimo percentile della pressione sistolica?

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. La coordinata standard di 140 mmHg è

$$z = \frac{140\,\text{mmHg} - 125\,\text{mmHg}}{15\,\text{mmHg}} = 1$$

quindi oltre 1 c'è il

$$100\% - \Phi(1) = 100\% - 84.13\% \approx 15.9\%$$

della popolazione. □

Soluzione della domanda 2. La coordinata standard di 110 mmHg è

$$z = \frac{110\,\text{mmHg} - 125\,\text{mmHg}}{15\,\text{mmHg}} = -1$$

e sotto -1 c'è il $\Phi(-1) = 15.87\%$ (lo stesso 15.9% che sta sopra 1, per simmetria). La persona si colloca quindi circa al 16-esimo percentile. □

Soluzione della domanda 3. Il 90-esimo percentile è il valore sotto cui sta il 90% della popolazione: $\Phi(z) = 90\%$. Interpolando fra le righe 1.25 (89.44%) e 1.30 (90.32%),

$$z = 1.25 + \frac{1.30 - 1.25}{90.32 - 89.44}(90.00 - 89.44) = 1.282$$

quindi il 90-esimo percentile è

$$125\,\text{mmHg} + 1.282 \cdot 15\,\text{mmHg} \approx 144\,\text{mmHg}$$

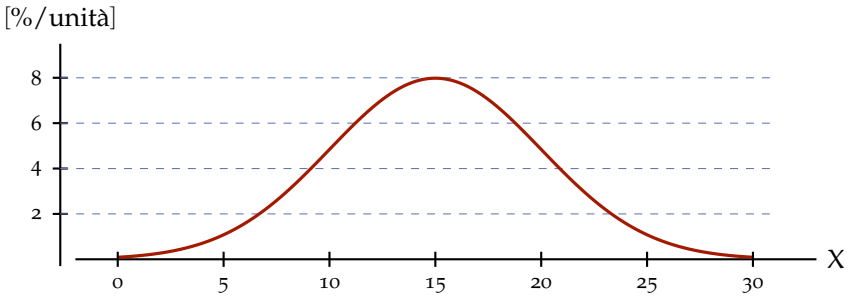
□

Esercizio 99 (p. 134)
Una variabile statistica X si distribuisce in maniera gaussiana con media 15 e deviazione standard 5.

1. Rappresenta graficamente questa distribuzione indicando, in ascissa, il valore di X e, in ordinata, la densità di probabilità.
2. Che percentuale della popolazione ha un valore di X compreso fra 12 e 13?
3. Determina k in modo tale che il 50% della popolazione abbia un valore di X compreso fra 12 e k.

Soluzione.

Soluzione della domanda 1. Il massimo, in $x = 15$, vale $\frac{39.89\%}{5} \approx 8\%$ per unità di X; in 15 ± 5, ossia in 10 e 20, la curva vale $\frac{24.20\%}{5} \approx 4.8\%$ per unità.



□

Soluzione della domanda 2. In coordinate standard 12 e 13 diventano

$$z_{12} = \frac{12-15}{5} = -0.6 \qquad z_{13} = \frac{13-15}{5} = -0.4$$

La percentuale fra -0.6 e -0.4 è

$$\Phi(-0.4) - \Phi(-0.6) = 34.46\% - 27.43\% \approx 7.0\%$$

□

Soluzione della domanda 3. Sotto 12 (cioè sotto $z = -0.6$) c'è il $\Phi(-0.6) = 27.43\%$ della popolazione. Vogliamo che sotto k ci sia il $27.43\% + 50\% = 77.43\%$, cioè $\Phi(z_k) = 77.43\%$. Dalla tavola, interpolando fra $\Phi(0.75) = 77.34\%$ e $\Phi(0.80) = 78.81\%$, $z_k \approx 0.753$, per cui

$$k = 15 + 0.753 \cdot 5 \approx 18.8$$

□

Esercizio 100 (p. 134)
Supponiamo che i volumi dei globuli rossi di un paziente siano distribuiti in maniera approssimativamente gaussiana. Il volume medio di un globulo rosso è di 85 femtolitri, e il 20% dei globuli rossi è più grande di 100 femtolitri. Quanto vale la deviazione standard della distribuzione dei volumi? Quanto vale il volume mediano dei globuli rossi più grandi di 100 femtolitri? Rappresenta graficamente la distribuzione dei volumi.

Soluzione. Se il 20% dei globuli sta oltre 100 fL, sotto 100 fL c'è l'80%, quindi la coordinata standard z di 100 fL è quella con $\Phi(z) = 80\%$. Interpolando nella tavola fra $\Phi(0.80) = 78.81\%$ e $\Phi(0.85) = 80.23\%$ troviamo $z = 0.842$, da cui

$$\frac{100\,\text{fL} - 85\,\text{fL}}{\sigma} = 0.842 \qquad \Longrightarrow \qquad \sigma = \frac{15\,\text{fL}}{0.842} \approx 17.8\,\text{fL}$$

Il volume mediano dei globuli più grandi di 100 fL ne lascia sopra di sé la metà, e quindi, dato che questi globuli sono il 20% del totale, il 10% di tutti i globuli rossi. Cerchiamo allora la z che ha oltre di sé il 10%, ossia quella con $\Phi(z) = 90\%$. Fra $\Phi(1.25) = 89.44\%$ e $\Phi(1.30) = 90.32\%$ la tavola dà $z = 1.282$, e otteniamo

$$V = 85\,\text{fL} + 1.282 \cdot 17.8\,\text{fL} \approx 108\,\text{fL}$$

Per il grafico ci serve ancora l'altezza del massimo, $\frac{39.89\%}{17.8\,\text{fL}} \approx 2.2\,\%/\text{fL}$.

