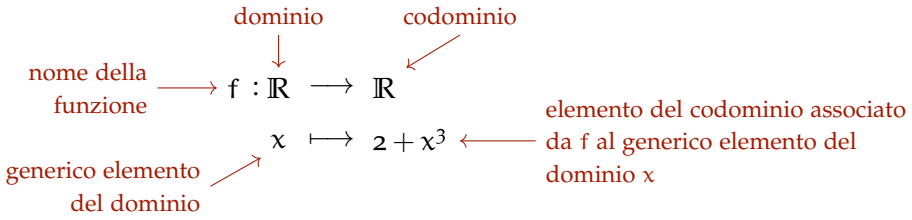
§10 Funzioni & grafici

Una funzione è una legge che associa, ad ogni elemento di un insieme detto dominio della funzione, un ben preciso elemento di un altro insieme detto codominio.

Esempio
La funzione



è la legge che associa ad ogni numero reale x — il dominio è l'insieme $\mathbb{R}$ — il numero reale $2 + x^3$ — anche il codominio è $\mathbb{R}$.

La disposizione tipografica degli elementi

$$\begin{aligned}[\text{nome della funzione}] : [\text{dominio}] &\longrightarrow [\text{codominio}] \\ [\text{variabile}] &\longmapsto [\text{espressione associata}]\end{aligned}$$

è un modo formale, preciso, di descrivere una funzione, non è un'accozzaglia di simboli in ordine sparso. Se si intende specificare una funzione con questa simbologia, quindi, va fatto esattamente come indicato qua sopra.

Spesso parleremo di funzioni che hanno come dominio l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, o un suo sottoinsieme, e come codominio ancora l'insieme $\mathbb{R}$. Quando è chiaro dal contesto quali siano dominio e codominio, possiamo descrivere una funzione semplicemente con un'espressione come

$$f(x) = 2 + x^3 \qquad \text{"f di x è } 2 + x^3\text{"}$$

Similmente, nota questa funzione f, possiamo voler esprimere il fatto che f associa all'elemento del dominio 3 l'elemento del codominio 29 (ossia $2 + 3^3 = 29$). Questo si fa con l'espressione

$$f(3) = 29 \qquad \text{"f di 3 è 29"}$$

Nuovamente: le espressioni matematiche sono *formali*. Dire che f di 3 è 29 o che f di 29 è 3 non è uguale!

Nota
Tuttavia alcuni specifici abusi della notazione sono comuni, e si possono commettere quando non c'è rischio di confondersi. Per esempio a volte si scrive

"la funzione $f(x)$"	e sarebbe corretto	"la funzione f"
$\sin 30°$	"	$\sin(30°)$
$\cos^2 7$	"	$(\cos(7))^2$

Nel dubbio, conviene utilizzare la forma pedante.

Una funzione non deve necessariamente possedere una espressione di natura algebrica. Per esempio, i valori assunti da una funzione (quindi la funzione stessa) potrebbero essere determinati sperimentalmente, o stabiliti per convenzione, e dati in forma grafica o tabulare.

Esempio
- la funzione che associa un punto della Terra alla sua quota sul livello del mare — definita sperimentalmente;
- la funzione che associa ad ogni data il giorno della settimana corrispondente — definita per convenzione;
- sarebbe SBAGLIATO parlare della funzione che associa ad x il numero y tale che $y^2 = x$ — infatti questo numero non è determinato univocamente: a 4 si potrebbe associare sia 2 sia -2.

§10.1 Rappresentazioni di funzioni

Il modo più immediato di rappresentare una funzione f è forse una tabella che elenca, per ogni valore di x ritenuto interessante, il corrispondente valore di $f(x)$.

Esempio
La funzione $f(x) = 1 + x^2$ può dar luogo alla tabella

x	-1	-0.5	0	0.5	1	2	100
$f(x)$	2	1.25	1	1.25	2	5	$10\,001$

Per quanto semplice, questa rappresentazione non determina f univocamente: come fare se il valore di x che ci interessa non è fra quelli tabulati? Vedremo come ovviare, in parte, a questo inconveniente quando parleremo di interpolazione lineare. Ad ogni modo, avendo qualche informazione sulla forma di $f(x)$, può darsi che si riesca a ricostruire la funzione da una tabella.

Esercizio
Data la tabella

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	1.5	4	7.5	12

e sapendo che la funzione f è della forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, determina l'espressione di f.

Soluzione. Dobbiamo determinare le tre costanti a, b, c: ci aspettiamo, quindi, di dover sfruttare tre condizioni. Possiamo provare con:

$$\left.\begin{aligned} a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c &= f(0) = 0 \\ a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c &= f(2) = 4 \\ a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c &= f(4) = 12 \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} c = 0 \\ a \cdot 4 + b \cdot 2 + c = 4 \\ a \cdot 16 + b \cdot 4 + c = 12 \end{cases}$$

A sinistra: le uguaglianze sono vere per via della forma di f, e i valori $f(0)$, $f(2)$, $f(4)$ sono letti dalla tabella.

Risolvendo il sistema otteniamo

$$a = \tfrac{1}{2} \qquad b = 1 \qquad c = 0 \qquad \implies \qquad f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x$$

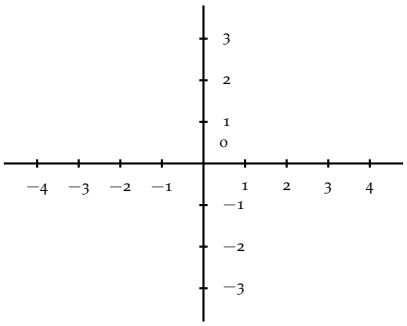
□

Nota importante
È ora importante verificare questo risultato ricostruendo la tabella dei valori di f a partire dalla formula che abbiamo trovato. Una discrepanza indicherebbe un errore.

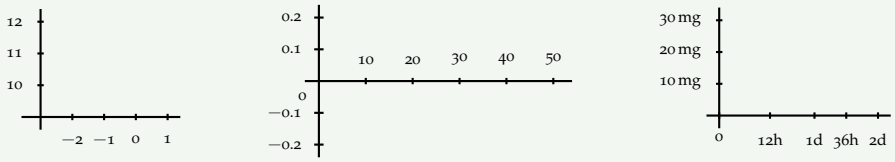
Nota
Abbiamo scelto di scrivere le tre condizioni necessarie per trovare i coefficienti usando i valori tabulati per f in 0, 2, 4. Matematicamente, astrattamente, qualunque terna di valori sarebbe stata adatta allo scopo (per esempio 0, 1, 2). Tuttavia, in pratica, è buona norma usare valori più distanti possibile fra loro, per minimizzare l'impatto degli errori di arrotondamento e delle eventuali incertezze di misura nei dati tabulati.

§10.2 Grafici

Considerando due assi ortogonali e graduati secondo la distanza da un certo punto fissato, si ottiene, come è ben noto, un diagramma cartesiano.



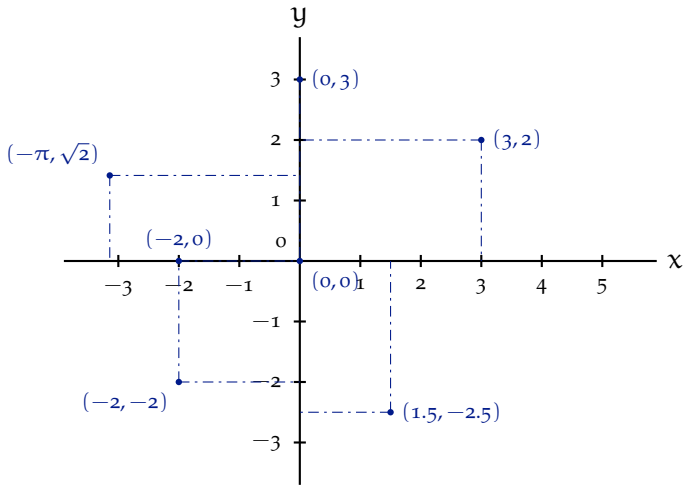
Nota
Nulla obbliga lo zero a trovarsi nel punto di incontro degli assi, né gli assi ad essere graduati nella medesima unità.



Alcuni diagrammi cartesiani.

Un asse è tipicamente rappresentato orizzontalmente e detto asse delle ascisse; l'altro, disposto verticalmente, si chiama asse delle ordinate.

Un diagramma cartesiano ci permette di assegnare ad ogni punto del piano un nome, che è la coppia di valori che si leggono in corrispondenza delle proiezioni del punto rispettivamente — in quest'ordine! — sull'asse delle ascisse e sull'asse delle ordinate.



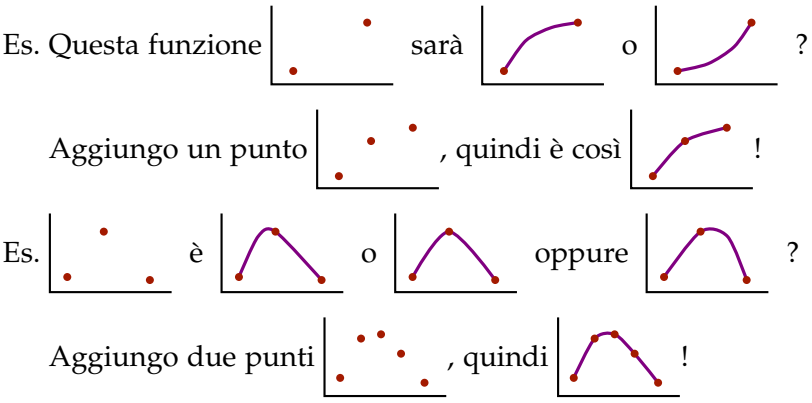
Viceversa, ogni coppia di valori è rappresentata da un punto del diagramma.

Definizione (grafico di una funzione)
Il grafico di una funzione f è costituito da tutti i punti del tipo $\big(x, f(x)\big)$.

Se fosse possibile disegnare tutti gli infiniti punti $\big(x, f(x)\big)$ il loro insieme formerebbe, solitamente, una linea, che è il grafico di f. In pratica, ci si deve limitare al calcolo di una quantità finita di punti, che poi si congiungono tracciando una linea che, ragionevolmente, dovrebbe seguire il vero grafico (teorico).

§10.3 Come si disegna un grafico in pratica?

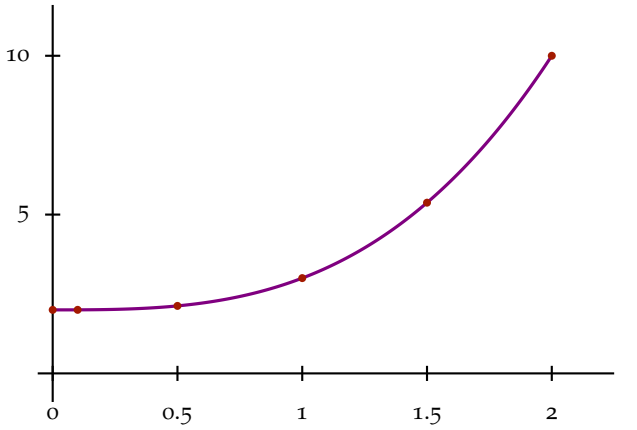
1. Calcolo il valore della funzione in alcuni (pochi) punti per capire come impostare gli assi.
2. Traccio gli assi e riporto i punti calcolati.
3. Aggiungo punti in quelle zone dove l'andamento del grafico non mi è chiaro.



Esercizio
Traccia il grafico di $x \mapsto 2 + x^3$ per x compreso fra 0 e 2.

Soluzione.

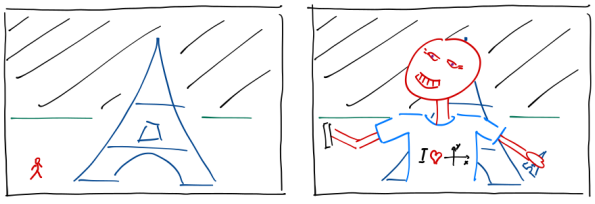
x	f(x)
0	2
0.1	2.001
0.5	2.13
1	3
1.5	5.38
2	10



□

Nota importante

Nel tracciare il diagramma di una funzione è importante prestare attenzione alla scelta della scala e alla centratura. Se un turista ti chiede una foto, la vuole come quella di destra.

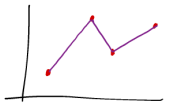


Anche le funzioni preferiscono essere in primo piano — e hanno, bene o male,

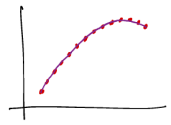
tanto buon gusto quanto il grosso dei turisti. In maniera più seria, un grafico è un mezzo per comunicare informazione. È fondamentale far uso di tutto lo spazio disponibile in maniera informativa.

Siccome lo spazio vuoto non comunica informazione, è bene che i grafici occupino tutto lo spazio disponibile.

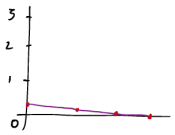
§10.4 Come NON tracciare un grafico



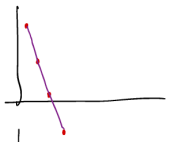
Spezzata (salvo se la funzione è davvero una spezzata).



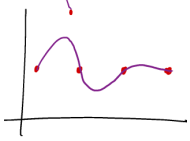
Calcolare 2000 **punti** non è sbagliato, ma spreca tempo.



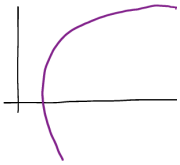
Scala sbagliata: può convenire usare unità diverse sui due assi.



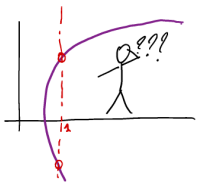
Centratura sbagliata: non tutti i numeri sono positivi.



Comportamento non evidenziato dai punti calcolati.



Uncino: quanto vale $f(1)$?



§10.5 Un esercizio

Nota importante
In questo corso, le funzioni trigonometriche si intendono in radianti.

Esercizio
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - \sin(x) \qquad -0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$$

Soluzione.

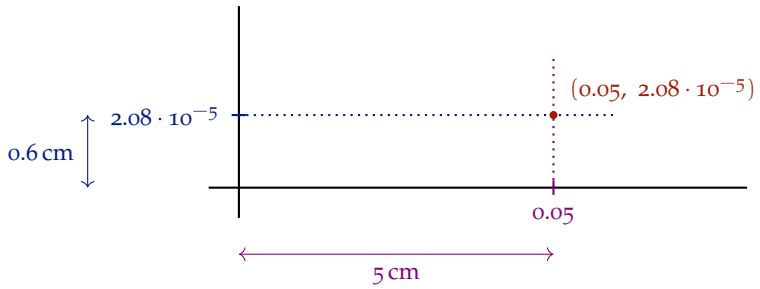
1. Comincio con

$$f(-0.1) = -1.67 \cdot 10^{-4} \qquad f(0) = 0 \qquad f(0.1) = 1.67 \cdot 10^{-4}$$

(Attenzione: $\sin(0.1) = 0.0998334$, per cui $0.1 - 0.0998334 = 0.0001666$ è la differenza fra due numeri quasi uguali, che si mangia le prime cifre. Per avere tre cifre significative del risultato, il seno va preso con almeno sette cifre decimali.)

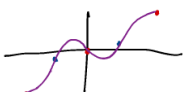
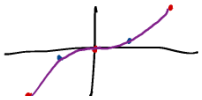
2. Imposto il grafico. Attenzione: mi sono venuti numeri molto piccoli. Converrà usare una scala opportuna per le ordinate, tipo 3 cm corrispondono a 10^{-4}.
Nota. I valori si riportano mediante la proporzione con determinate unità di misura. Per esempio, se decido che, in ascissa 10 cm corrispondono a 0.1, mentre in ordinata 3 cm corrispondono a 10^{-4}, come riporto il punto $(0.05,\ f(0.05))$, cioè $(0.05,\ 2.08 \cdot 10^{-5})$?

$$10\,\text{cm} : 0.1 = x : 0.05 \longrightarrow x = 5\,\text{cm}$$
$$3\,\text{cm} : 10^{-4} = y : 2.08 \cdot 10^{-5} \longrightarrow y = 0.624\,\text{cm} \approx 0.6\,\text{cm}$$



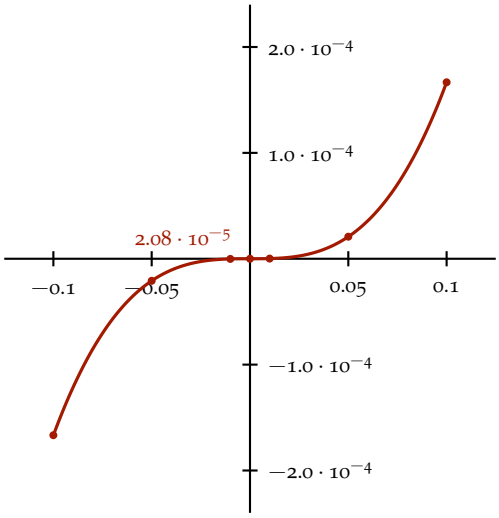
3. Per ora ho un grafico così  ma dubito che sia rettilineo.
Per controllare calcolo $f(0.05) \approx 2.08 \cdot 10^{-5}$, $f(-0.05) \approx -2.08 \cdot 10^{-5}$.

4. Ora ho questa situazione 

Sarà così  o così  ?

Calcolo $f(0.01) \approx 1.67 \cdot 10^{-7}$, $f(-0.01) \approx -1.67 \cdot 10^{-7}$.

5. I punti confermano la seconda ipotesi: probabilmente bastano per tracciare un grafico approssimativo (la figura seguente).



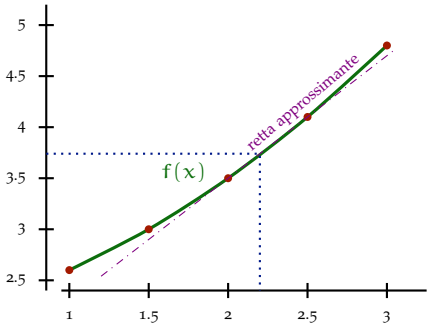
□

§10.6 Tabelle & interpolazione lineare

Può capitare che una funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita, liscia, regolare, &c. ci sia data solo sotto forma di tabella. Per esempio

x	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0
$f(x)$	2.6	3.0	3.5	4.1	4.8

In questo caso come possiamo ottenere una stima dei valori non tabulati, ad esempio $f(2.2)$? Facciamo finta che fra i due valori tabulati più vicini a quello che ci interessa, 2.2, la funzione sia lineare. Non lo è, ma non può discostarsi troppo, se la tabella è costruita bene.



In questo caso i due valori sono 2.0 e 2.5. Se la funzione fosse lineare avremmo $f(2.0) = 3.5$, $f(2.5) = 4.1$, e, usando la formula della retta per due punti, $f(x) = 1.1 + x \cdot 1.2$. Sostituendo, $f(2.2) = 3.74 \approx 3.7$.

Nota
Se questo è il risultato del nostro calcolo scriveremo 3.7 con due cifre significative, perché la tabella è data con due cifre significative. Se però si tratta di un passaggio intermedio conviene mantenere 3.74, e approssimare alla fine.

In definitiva, se vogliamo interpolare $f(x)$ con x fra x_0 e x_1, e abbiamo i valori tabulati $f(x_0) = y_0$ e $f(x_1) = y_1$, allora:

$$f(x) = (x - x_0) \cdot \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

Facendo riferimento alla tabella precedente, sapendo $f(x) = 3.1$, quanto vale x? Dovremo interpolare fra

$$f(\overbrace{1.5}^{x_0}) = \overbrace{3.0}^{y_0} \qquad \text{e} \qquad f(\overbrace{2.0}^{x_1}) = \overbrace{3.5}^{y_1}$$

Primo metodo: risolviamo

$$\underbrace{3.1}_{f(x)} = (x - \underbrace{1.5}_{x_0}) \cdot \frac{\overbrace{3.5}^{y_1} - \overbrace{3.0}^{y_0}}{\underbrace{2.0}_{x_1} - \underbrace{1.5}_{x_0}} + \underbrace{3.0}_{y_0}$$

$$3.1 = x + 1.5 \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1.6$$

Secondo metodo: usiamo la formula scambiando x e y.

$$x = (f(x) - y_0)\frac{x_1 - x_0}{y_1 - y_0} + x_0$$

$$x = (\underbrace{3.1}_{f(x)} - \underbrace{3.0}_{y_0}) \frac{\overbrace{2.0}^{x_1} - \overbrace{1.5}^{x_0}}{\underbrace{3.5}_{y_1} - \underbrace{3.0}_{y_0}} + \underbrace{1.5}_{x_0} = 1.6$$

Approfondimento (fuori programma) (Giustificazione della formula)
Risolviamo il sistema di equazioni per calcolare l'equazione della retta $y = ax + b$ passante per (x_0, y_0) e (x_1, y_1).

$$\begin{cases} ax_0 + b = y_0 \implies b = y_0 - ax_0 \\ ax_1 + b = y_1 \implies ax_1 + y_0 - ax_0 = y_1 \implies a = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \end{cases}$$

$$b = y_0 - ax_0 = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0$$

e quindi

$$f(x) = ax + b = \underbrace{\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}}_{a} x + \underbrace{y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} x_0}_{b} = (x - x_0) \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} + y_0$$

§10.7 Esercizi

Esercizio 58 (soluzione a p. 275)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - 0.01 \cdot x^3$$

per $0 \leqslant x \leqslant 15$.

Esercizio 59 (soluzione a p. 276)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - 2\cos(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 5$. Attenzione: il coseno è in radianti!

Esercizio 60 (soluzione a p. 277)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x^3 - 50 \cdot x$$

per $9.8 \leqslant x \leqslant 10.2$.

Esercizio 61 (soluzione a p. 278)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Esercizio 62 (soluzione a p. 279)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \cos(x)$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

Esercizio 63 (soluzione a p. 279)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

Esercizio 64 (soluzione a p. 280)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Esercizio 65 (soluzione a p. 282)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$

per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Esercizio 58 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x - 0.01 \cdot x^3$$

per $0 \leqslant x \leqslant 15$.

Soluzione.

1. Comincio col calcolare

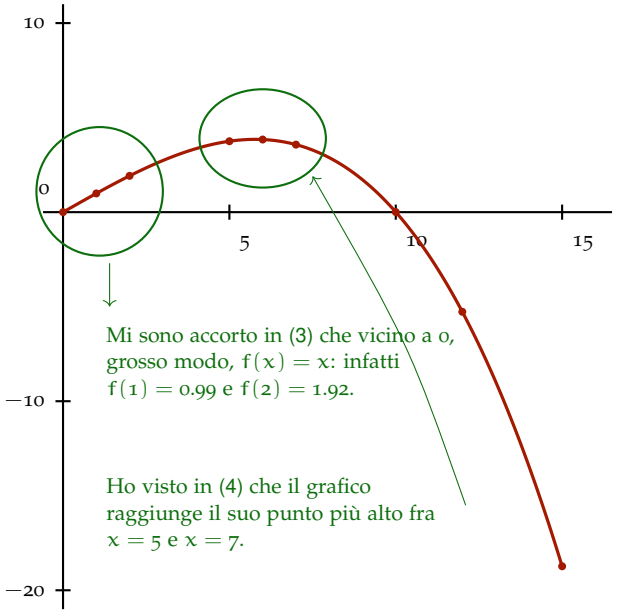
$$f(0) = 0 \qquad f(5) = 3.75 \qquad f(10) = 0 \qquad f(15) = -18.75$$

2. Imposto il grafico e riporto i punti.
3. Desidero indagare meglio l'andamento di f vicino a 0: $f(1) = 0.99$, $f(2) = 1.92$.
4. f toccherà il massimo valore prima o dopo 5? $f(6) = 3.84$, $f(7) = 3.57 \Rightarrow$ probabilmente fra 5 e 7 perché $f(6) > f(5), f(7)$.
5. Per capire meglio il comportamento fra 10 e 15 calcolo $f(12) = -5.28$.

Riassumendo, i valori calcolati sono

x	0	1	2	5	6	7	10	12	15
$f(x)$	0	0.99	1.92	3.75	3.84	3.57	0	-5.28	-18.75

Le ordinate vanno da circa -19 a circa 4, le ascisse da 0 a 15: le due scale possono essere diverse, e conviene scegliere quella delle ordinate in modo che il grafico occupi tutto lo spazio in altezza.



Esercizio 59 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

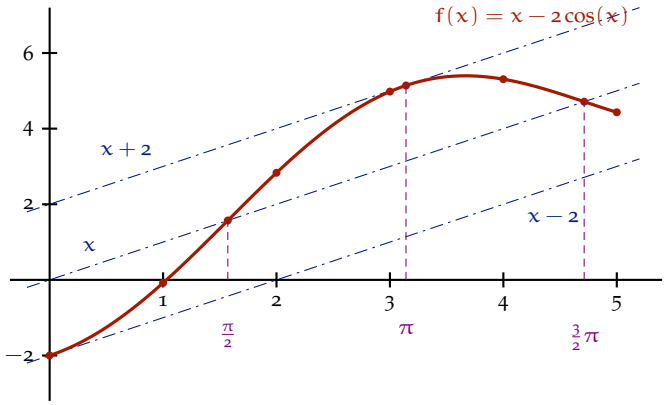
$$f(x) = x - 2\cos(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 5$. Attenzione: il coseno è in radianti!

Soluzione. Calcolo una tabella di valori:

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	-2	-0.08	2.83	4.98	5.31	4.43

Aiuta anche ricordare dove il coseno vale 0 o -1: in $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3}{2}\pi$ si ha $f(x) = x$, in $x = \pi$ si ha $f(x) = x + 2$. Il grafico sale, e verso la fine dell'intervallo ridiscende un poco.



Osservazione: siccome $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$, $x - 2\cos(x)$ oscilla attorno a x, fra $x - 2$ e $x + 2$ (le rette tratteggiate).

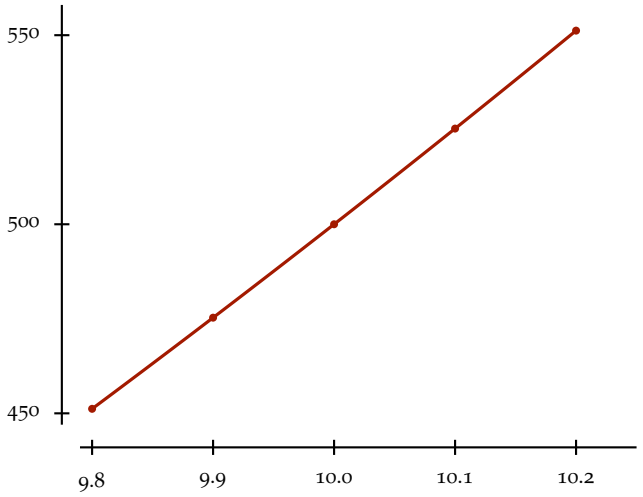
Esercizio 60 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = x^3 - 50 \cdot x$$

per $9.8 \leqslant x \leqslant 10.2$.

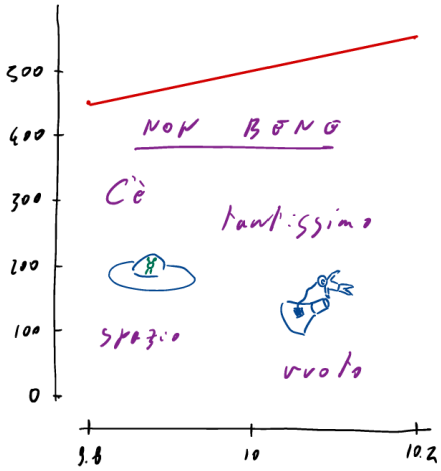
Soluzione.

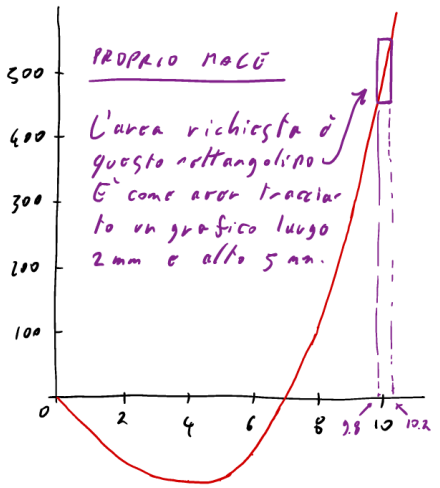
x	f(x)
9.8	451
9.9	475
10	500
10.1	525
10.2	551



Osservazione: sebbene $f(x) = x^3 - 50x$ non sia esattamente l'equazione di una retta, in pratica, questo grafico appare quasi rettilineo.

Nota (Modi per sbagliare questo esercizio)





Esercizio 61 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

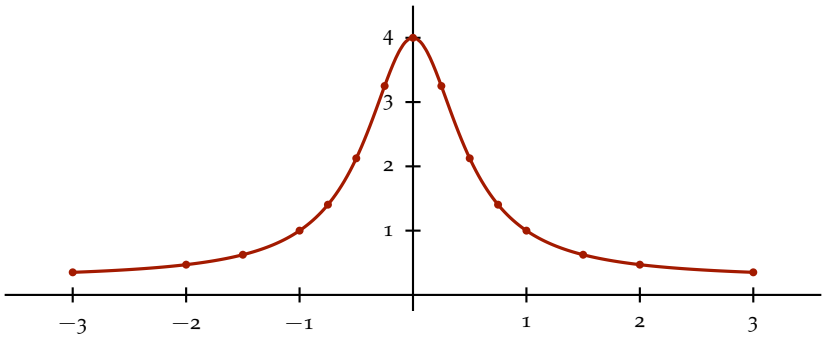
$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{4x^2 + 1}$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

Soluzione. La funzione è pari, $f(-x) = f(x)$, perché x vi compare solo al quadrato: basta calcolare i valori per $x \geqslant 0$, e il grafico è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate.

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.5	2	3
$f(x)$	4	3.25	2.13	1.40	1	0.63	0.47	0.35

Fra 0 e 1 la funzione scende rapidamente da 4 a 1: lì conviene infittire i punti. Poi cala sempre più lentamente (per x grande i termini 4 e 1 contano poco, e $f(x)$ si avvicina a $\frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$).



Esercizio 62 (p. 71)
Traccia il grafico della funzione

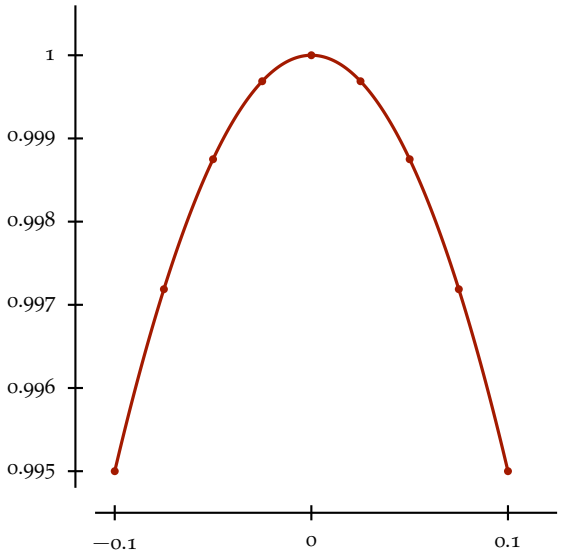
$$f(x) = \cos(x)$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

Soluzione. Il coseno è pari, $\cos(-x) = \cos(x)$: basta calcolare i valori per $x \geqslant 0$.

x	0	0.025	0.05	0.075	0.1
$\cos(x)$	1	0.99969	0.99875	0.99719	0.99500

Tutti i valori stanno fra 0.995 e 1. Se l'asse delle ordinate partisse da 0, il grafico sarebbe indistinguibile da una retta orizzontale, e non comunicherebbe nulla. Facciamo quindi cominciare le ordinate da 0.995: ora si vede che il grafico è un arco, col punto più alto in $x = 0$.



Quando l'asse delle ordinate non parte da 0, bisogna numerarlo con cura, come qui, perché chi legge il grafico se ne accorga.

Esercizio 63 (p. 72)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\cos(x) - 1}{x}$$

per $-0.1 \leqslant x \leqslant 0.1$.

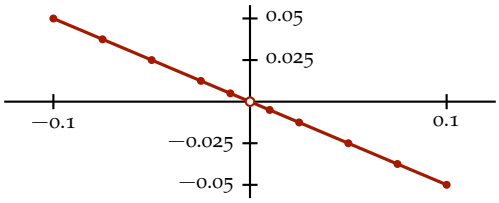
Soluzione. La funzione non è definita in $x = 0$, perché si annulla il denominatore x. Calcolo i valori a sinistra e a destra di 0:

x	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1
$f(x)$	−0.00500	−0.01250	−0.02499	−0.03748	−0.04996

x	-0.01	-0.025	-0.05	-0.075	-0.1
$f(x)$	0.00500	0.01250	0.02499	0.03748	0.04996

(Prendo il coseno con almeno otto cifre decimali — $\cos(0.01) = 0.99995000$, e $\cos(0.01) - 1$ è una differenza fra numeri quasi uguali, di cui voglio tre cifre significative.)

Riportati sul grafico, i punti stanno quasi su una retta con pendenza circa $-\frac{1}{2}$. Siccome però la funzione non è definita in $x = 0$, nel grafico c'è un buco, che si indica con un pallino vuoto.



Nota importante
$\frac{\cos(0) - 1}{0} = \frac{0}{0}$: non è definito.

Esercizio 64 (p. 72)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$$

per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Soluzione. I valori di f sono piccolissimi, perché sono differenze fra numeri molto più grandi che si cancellano quasi del tutto. Per esempio (con il seno in radianti, come sempre)

$$f(0.4) = 0.38941834 - 0.4 + 0.01066667 = 0.00008501$$

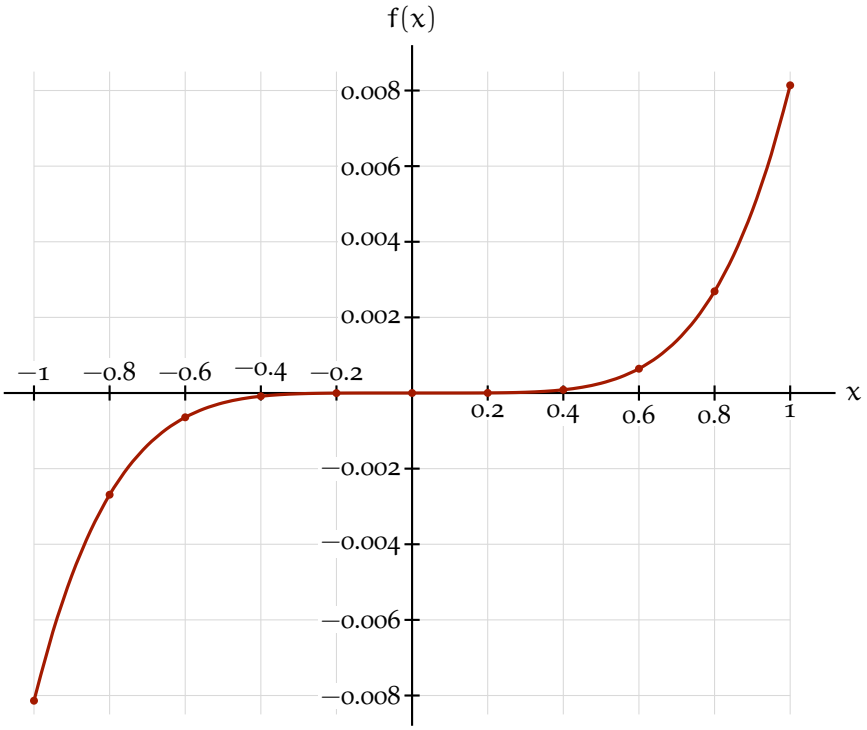
Per comodità, mi calcolo i valori di $1000\, f(x)$

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$1000\, f(x)$	0	0.003	0.085	0.642	2.689	8.138

x		-0.2	-0.4	-0.6	-0.8	-1
$1000\, f(x)$		-0.003	-0.085	-0.642	-2.689	-8.138

(Per calcolare questi valori devi lavorare con almeno sette cifre decimali di precisione: se, per esempio, usassi $\sin(0.4) \approx 0.389$ ti verrebbe $f(0.4) \approx -0.0003$, che ha addirittura il segno sbagliato!)

Per i due assi scelgo scale molto diverse, perché le ascisse coprono un intervallo ampio 2, mentre le ordinate coprono appena 0.016.



Vicino a 0 la funzione è molto piatta — fino a $x = 0.4$ non si stacca visibilmente dall'asse — e poi cresce sempre più in fretta.

Esercizio 65 (p. 72)
Traccia il grafico della funzione

$$f(x) = (x-1)^2(x+1)^3$$

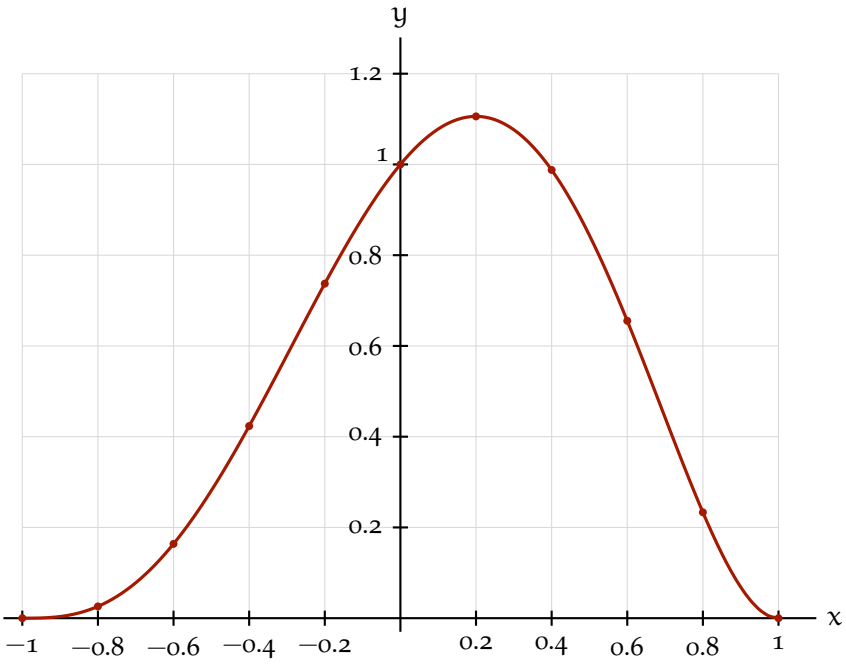
per $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Soluzione. Prima di fare i conti guardo la forma fattorizzata, dalla quale si capiscono già parecchie cose. La funzione si annulla agli estremi dell'intervallo, $f(-1) = f(1) = 0$, e nell'intervallo $(x-1)^2 \geqslant 0$ e $(x+1)^3 \geqslant 0$, quindi il grafico sta tutto sopra l'asse delle ascisse. Vicino a $x = -1$ il fattore $(x+1)^3$ è piccolissimo — in $x = -0.9$ vale 0.001 — quindi la curva parte molto piatta; il fattore $(x-1)^2$ è una parabola con vertice in $x = 1$, per cui la curva si appiattisce anche all'estremo destro del grafico.

Calcolo poi i valori di f con passo 0.2:

x	-1	-0.8	-0.6	-0.4	-0.2	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
$f(x)$	0	0.026	0.164	0.423	0.737	1	1.106	0.988	0.655	0.233	0

Il valore più alto della tabella è $f(0.2) = 1.106$, quindi il grafico ha una gobba un po' spostata a destra.



Test 66 (p. 76)
Risolvi la disequazione $2^x < 5^x$.

Soluzione. Dividendo ambo i membri per la quantità positiva 2^x:

$$\underbrace{\frac{2^x}{2^x}}_{=1} < \underbrace{\frac{5^x}{2^x}}_{=\left(\frac{5}{2}\right)^x} \iff \underbrace{1}_{\left(\frac{5}{2}\right)^0} < \left(\frac{5}{2}\right)^x \iff \left(\frac{5}{2}\right)^0 < \left(\frac{5}{2}\right)^x \underset{\text{poiché } \frac{5}{2}>1}{\iff} 0 < x$$