Test 127 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = x^x$.

Test 128 (soluzione a p. 334)
Calcola la derivata di $f(x) = \tan(x) + \log_e(x)$.

Test 129 (soluzione a p. 335)
Calcola la derivata di $f(x) = \sin(x^2) + \log_{10}(x)$.

Test 130 (soluzione a p. 335)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_x(2)$.

Test 131 (soluzione a p. 336)
Calcola la derivata di $f(x) = \log_e(x^4)$.

Esercizio 132 (soluzione a p. 336)
Trova un polinomio di terzo grado $f(x)$ tale che $x^2 + x \cdot f'(x) = 3 \cdot f(x)$ e $f(1) = 0$.

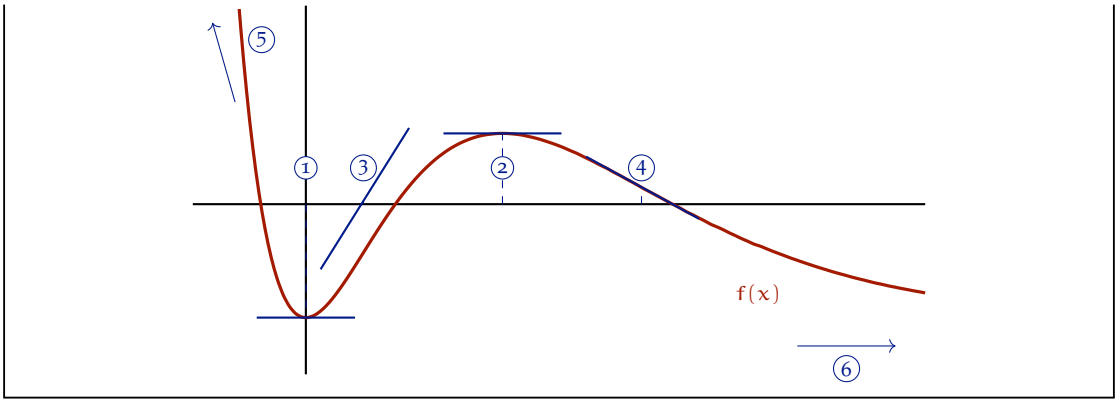
§24 Grafici e derivate

Siccome sappiamo che $f'(x_0)$ è la pendenza del grafico di $f(x)$ nel punto x_0 (in un diagramma in cui ascisse e ordinate abbiano la stessa scala), possiamo farci un'idea qualitativa (ossia priva di accuratezza numerica) del grafico di f' semplicemente osservando il grafico di f. Conviene tenere a mente questi principi.

Fatto

- Dove il grafico di f è orizzontale, $f' = 0$.
- Dove il grafico di f è crescente, $f' > 0$.
- Dove il grafico di f è decrescente, $f' < 0$.
- Maggiore è l'inclinazione del grafico di f rispetto all'orizzontale, maggiore è $|f'|$.

Esercizio
Traccia un grafico qualitativo della derivata della funzione $f(x)$ il cui grafico è dato in figura.



Soluzione. Ragioniamo così:

A. Nei punti ① e ② f è orizzontale, quindi $f' = 0$.

B. f decresce a sinistra di ①, cresce fra ① e ②, e decresce a destra di ②. Quindi $f' > 0$ fra ① e ②, e $f' < 0$ altrimenti.

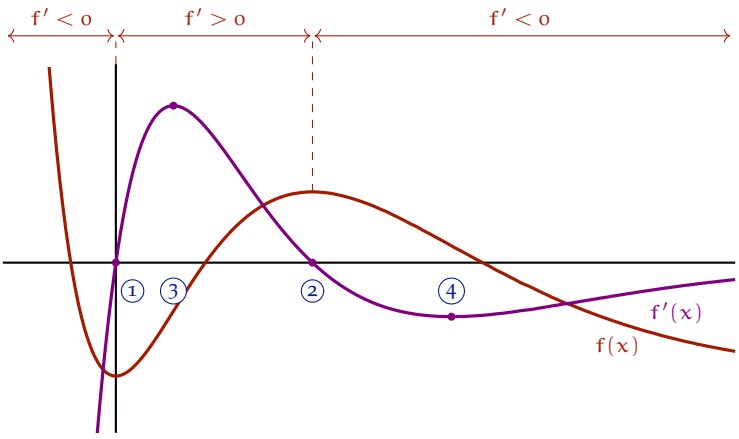
C. I punti ③ e ④ sono punti di massima pendenza per f, detti anche punti di flesso, quindi

- f' cresce a sinistra di ③;
- f' decresce fra ③ e ④;
- f' cresce a destra di ④.

D. In ⑤ f' pare assumere valori arbitrariamente negativi.

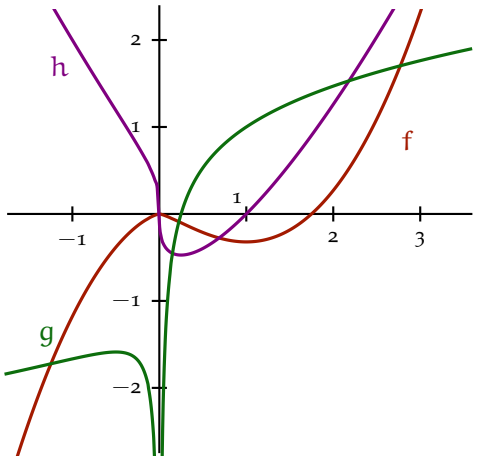
E. In ⑥ il grafico di f sembra essere sempre più orizzontale, quindi f' si avvicina allo zero.

Sfruttando queste considerazioni possiamo ottenere il grafico seguente.



□

Esercizio
Il grafico seguente rappresenta tre funzioni, di cui una è la primitiva, una la derivata, e una la derivata seconda (la derivata della derivata). Chi è chi?



Soluzione. Consideriamo le tre ipotesi possibili.

1. f **è la primitiva.** Siccome intorno a $x = 1$ il grafico di f è orizzontale, in quei paraggi deve esserci un punto di annullamento della derivata di f. Di certo, però, $g \neq 0$ (infatti, dal grafico, $g(1) \approx 1$). In questo caso l'unica possibilità è quindi $f' = h$ e, per esclusione, $h' = g$.

2. g **è la primitiva.** Vediamo bene che g è crescente nel semiasse positivo, quindi la sua derivata dovrebbe essere positiva per $x > 0$. Però, fra 0 e 1, sia f che h sono negative: non c'è un candidato valido per la derivata, e dobbiamo quindi escludere questa ipotesi.

3. h **è la primitiva.** In questo caso f e g dovrebbero essere una la derivata dell'altra (o f di g, oppure g di f). Però, intorno a $x = -1$, f e g sono entrambe crescenti ed entrambe negative, e questo non può essere: quella delle due che è la derivata, essendo derivata di una funzione crescente, dovrebbe essere positiva. Dobbiamo quindi escludere anche questa ipotesi.

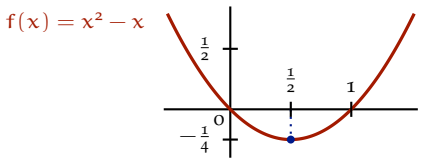
In conclusione deve essere vera l'unica ipotesi che non abbiamo escluso: f è la primitiva, h la derivata e g la derivata seconda. □

Nota (metodologica)
Quando ci viene richiesto di identificare il caso vero fra una lista di casi possibili, non dobbiamo ragionare per conferma, ossia mostrare perché il caso vero è plausibile. Dobbiamo invece ragionare per esclusione, ossia portare argomenti incontrovertibili che escludono ciascuno degli altri casi.

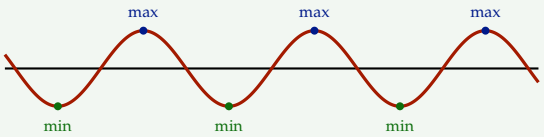
§24.1 Massimi e minimi di funzioni

Definizione
Data una funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ definita in un certo dominio D, diciamo che f ha un punto di massimo in $x_{max} \in D$ se, per ogni $x \in D$, vale $f(x) \leqslant f(x_{max})$ — in altre parole se $f(x_{max})$ è il massimo valore possibile di $f(x)$ al variare di $x \in D$. Diciamo che f ha un punto di minimo in $x_{min} \in D$ se, per ogni $x \in D$, vale $f(x) \geqslant f(x_{min})$, ossia se $f(x_{min})$ è il minimo valore possibile di $f(x)$ al variare di $x \in D$.

Per esempio, se $f(x) = x^2 - x$ e $D = \mathbb{R}$, il vertice $x_{min} = \frac{1}{2}$ della parabola $y = x^2 - x$ è un punto di minimo di $f(x)$.



Osservazione
L'esempio della funzione seno evidenzia che i punti di massimo e di minimo non sono sempre unici.



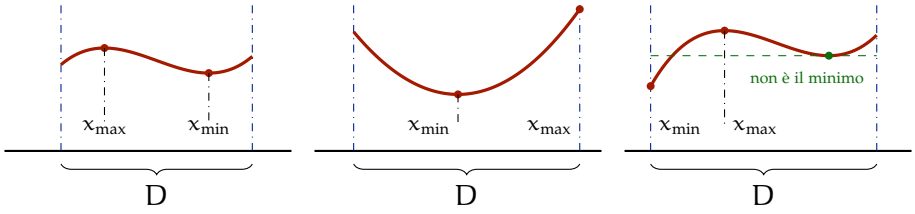
In generale massimi e minimi possono anche non esistere: basta pensare alla funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$, il cui grafico  sale e scende senza fermarsi mai. Se però il dominio è un intervallo chiuso le cose vanno meglio.

Fatto
Se il dominio D è un intervallo chiuso $[a, b]$ (ossia l'insieme degli x con $a \leqslant x \leqslant b$) e la funzione $f\colon D \to \mathbb{R}$ è continua — ossia è definita in tutti i punti dell'intervallo e il suo grafico può essere tracciato con un unico tratto continuo di penna — allora f ha almeno un punto di massimo e almeno un punto di minimo in D.

Se abbiamo la derivata f' di f, allora possiamo cercare massimi e minimi di f sfruttando il fatto seguente.

Fatto
I punti di massimo o di minimo di f si possono trovare solo

- dove il grafico di f è orizzontale (ossia $f' = 0$),
- oppure agli estremi del dominio.



§24.2 Massimi e minimi in un intervallo chiuso

Data una funzione derivabile $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, per trovarne massimi e minimi procediamo così.

Regola

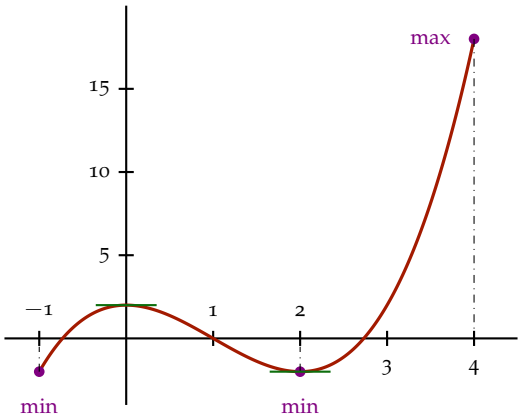
1. Calcoliamo i punti stazionari (ossia risolviamo $f'(x) = 0$) che cadono nell'intervallo $[a,b]$, ottenendo, diciamo, $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (le soluzioni fuori dall'intervallo si scartano).
2. Calcoliamo $f(a)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_n)$, $f(b)$.
3. Quelli fra i punti a, x_1, x_2, $\ldots$, x_n, b in cui f assume il valore più grande sono i punti di massimo; quelli in cui assume il più piccolo sono i punti di minimo.

Esercizio
Trova massimi e minimi di $f\colon [-1,4] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$, e traccia un grafico di f.

Soluzione.

1. $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$, quindi i punti stazionari sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.
2. $f(-1) = -2$, $\quad f(0) = 2$, $\quad f(2) = -2$, $\quad f(4) = 18$.
3. Il più grande di questi numeri, 18, è assunto da $f(x)$ in $x = 4$; il più piccolo, -2, in $x = -1$ e in $x = 2$.

Quindi $f(x)$ ha un punto di massimo in $x = 4$ e due punti di minimo in $x = -1$ e $x = 2$; il massimo valore assunto da $f(x)$ è 18, il minimo valore assunto è -2.

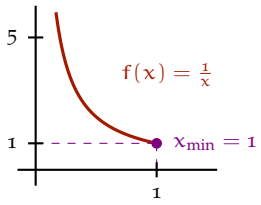


□

§24.3 Massimi e minimi in generale

Se il dominio della funzione da massimizzare o minimizzare non è un intervallo chiuso — per esempio se è $]a, b[$, ossia l'insieme degli x strettamente compresi fra a e b (cioè $a < x < b$), oppure $]a, b]$, ossia gli x con $a < x \leqslant b$, oppure ancora una semiretta come $[a, +\infty[$, che denota tutti gli $x \geqslant a$ — allora non necessariamente massimi e minimi esistono.

Per esempio la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(x) = x$ non ha né un massimo né un minimo. La funzione $f\colon]0, 1] \to \mathbb{R}$ con $f(x) = \frac{1}{x}$ ha un minimo in $x_{\min} = 1$, ma non ha un massimo, perché assume valori arbitrariamente grandi all'avvicinarsi di x a 0.



Approfondimento (fuori programma)
Ci sono, poi, anche i cavilli burocratici come la funzione $f\colon [0, 1[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = x^2$. Questa non ha massimo perché avrebbe tutte le carte in regola per assumere il valore massimo $f(x) = 1$ in $x = 1$, salvo che il punto $x = 1$ non appartiene al dominio $[0, 1[$. Di questi casi ci preoccupiamo il giusto.

Quando il dominio non è un intervallo chiuso possiamo ancora avvalerci degli zeri della derivata per trovare massimi e minimi, però la procedura si complica leggermente.

Regola

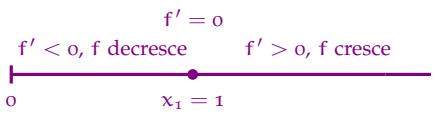
1. Troviamo i punti stazionari (ossia risolviamo $f'(x) = 0$).
2. Valutiamo f nei punti stazionari e negli estremi del dominio (dove siano inclusi).
3. Quelli fra i punti precedenti in cui $f(x)$ assume il massimo valore y_{max} sono candidati massimi; quelli dove assume il minimo valore y_{min} sono candidati minimi.
4. Per decidere se i candidati massimi siano effettivamente massimi occorre capire se $f(x)$ assume valori più grandi di y_{max} all'avvicinarsi di x agli estremi del dominio. Simmetricamente, per decidere se i candidati minimi siano minimi occorre controllare che $f(x)$ non scenda sotto y_{min} agli estremi del dominio.

I primi due punti sono come nel caso dell'intervallo chiuso. Il punto 4 può essere più o meno complicato, e c'è più di un modo per affrontarlo: per esempio sfruttando il grafico di f, o studiando il segno della derivata, oppure ancora calcolando i limiti agli estremi.

Esercizio
Trova massimi e minimi di $f\colon]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ con $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

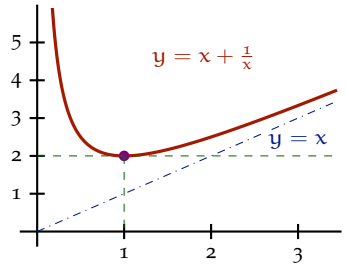
Soluzione.

1. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, che si annulla per $x_1 = 1$ (l'altra soluzione $x_2 = -1$ non appartiene a $]0, +\infty[$).
2. $f(x_1) = 2$ (non c'è altro da calcolare, perché $]0, +\infty[$ non ha estremi inclusi).
3. x_1 è l'unico punto che abbiamo, quindi è sia un candidato massimo sia un candidato minimo.
4. Usando il segno della derivata possiamo notare che $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$ è negativa a sinistra di $x_1 = 1$, nulla in x_1, e positiva a destra.



   Quindi f decresce a sinistra di 1, tocca il minimo in 1, e cresce dopo 1.

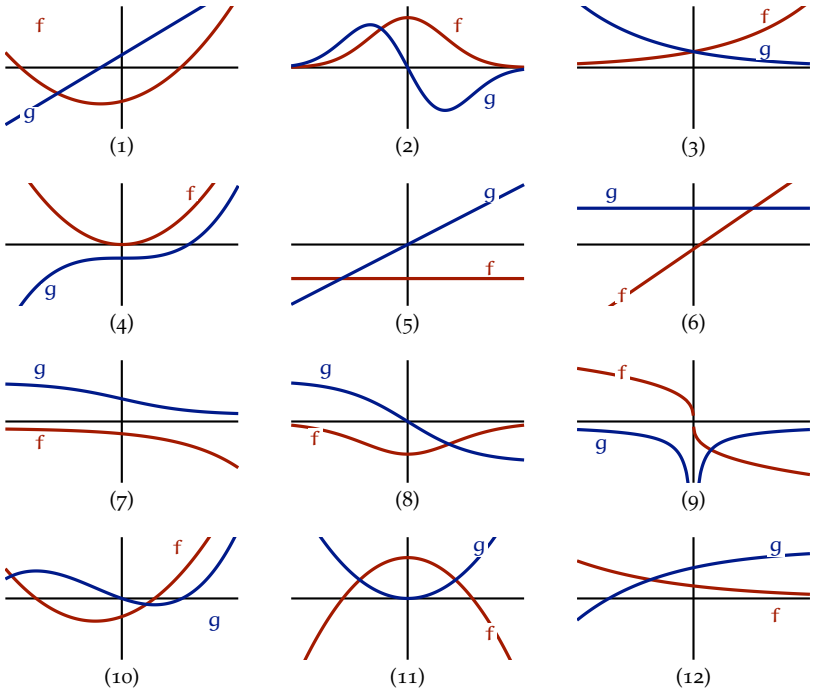
Altro modo: studiando il grafico vediamo che sia per x che si avvicina a 0, sia per x grande, il grafico di f resta sopra il valore $f(1) = 2$, quindi f ha un minimo in $x_{min} = 1$, e un massimo non c'è.



□

§24.4 Esercizi

Esercizio 133 (soluzione a p. 337)
Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f potrebbe essere la derivata di g, o g quella di f, oppure non si dà nessuno di questi due casi.



Esercizio 134 (soluzione a p. 338)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ per $0 \leqslant x \leqslant 3$. Determina quindi il massimo ed il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Esercizio 135 (soluzione a p. 339)
Traccia il grafico di $f(x) = (1+x)^2(1-x)^5$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -1 e 1; quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale.

Esercizio 136 (soluzione a p. 340)
Traccia il grafico di

$$f(x) = 0.60 + 0.41\,x - \sqrt{x}$$

per $1 \leqslant x \leqslant 2$ su un diagramma cartesiano. Determina il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo, scrivendo i risultati correttamente arrotondati a quattro cifre significative.

Esercizio 137 (soluzione a p. 341)
Traccia il grafico di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -5 e 5; quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale, e in quali raggiunge la massima e la minima pendenza.

Esercizio 138 (soluzione a p. 342)
Traccia il grafico di

$$f(x) = x - 5\sin(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 10$ su un diagramma cartesiano. Trova i punti stazionari di $f(x)$ in questo intervallo, e determina il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ nel medesimo intervallo. Indica i tuoi risultati con quattro cifre significative di precisione.

Esercizio 139 (soluzione a p. 344)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ per $0 \leqslant x \leqslant 10$. Determina quindi il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Esercizio 140 (soluzione a p. 346)
Traccia il grafico di

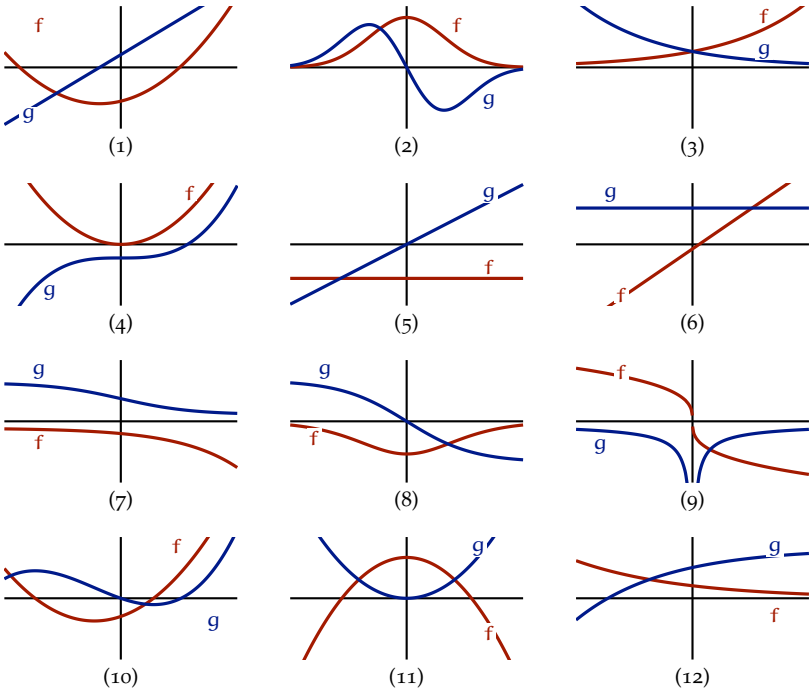
$$f(x) = 5.64^x - 15.28^x$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 0$ in un diagramma cartesiano. Determina il massimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo, scrivendo il risultato, correttamente arrotondato, con cinque cifre significative di precisione.

Esercizio 141 (soluzione a p. 348)
Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg. Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/L, calcola la capienza del fusto.

Esercizio 142 (soluzione a p. 349)
Dati i punti $A = (-2, -1)$ e $B = (0, -1)$, trova il punto $C = (x, y)$ sulla retta $x + y = 1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

Esercizio 133 (p. 187)
Per ciascuna di queste coppie di grafici decidi se f potrebbe essere la derivata di g, o g quella di f, oppure non si dà nessuno di questi due casi.



Soluzione. Conviene ragionare sempre allo stesso modo: dove il grafico del candidato "funzione" sale, il candidato "derivata" deve stare sopra l'asse; dove scende, sotto; dove il grafico è orizzontale, la derivata si annulla. Inoltre una retta ha pendenza costante, quindi la sua derivata è una costante.

coppia	$g = f'$	$f = g'$	perché
(1)	✓		f scende dove la retta g è negativa, sale dove è positiva, e ha il minimo dove g taglia l'asse.
		✗	la derivata della retta g è costante, ma f no.
(2)	✓		g si annulla nel massimo di f, ed è positiva dove f sale.
		✗	g scende dopo l'origine, mentre f resta positiva.
(3)	✗		f sale, quindi f' è positiva e crescente, mentre g scende.
		✗	g scende, quindi g' è negativa, mentre f è positiva.
(4)	✗		f sale subito a destra di 0, dove g è ancora negativa.
		✓	g è orizzontale in 0, dove f si annulla, e sale dove $f > 0$.
(5)	✗		f è costante, quindi $f' = 0$, mentre g non è nulla.
		✗	g' è una costante positiva, mentre f è negativa.
(6)	✓		la pendenza di f è costante e positiva, come g.
		✗	la derivata della costante g è nulla.
(7)	✗		f scende, quindi f' è negativa, mentre g è positiva.
		✗	a destra, g si appiattisce, quindi g' si avvicina a zero, mentre f diventa sempre più negativa.
(8)	✗		g è positiva dove f scende, ossia dove f' è negativa, e viceversa.
		✓	g scende sempre, ed è più ripida dove f ha il minimo, piatta dove f si avvicina a zero.
(9)	✓		f scende sempre, e ha tangente verticale in 0: la sua derivata è negativa ovunque e sprofonda in 0, come g.
		✗	g sale a destra di 0, mentre f scende.
(10)	✗		dove f scende, g è positiva.
		✓	g è orizzontale dove f taglia l'asse, e sale dove $f > 0$.
(11)	✗		f scende a destra di 0, dove g è positiva.
		✗	g scende a sinistra di 0, mentre f vicino a 0 è positiva.
(12)	✗		f scende, quindi f' è negativa, mentre g è quasi ovunque positiva.
		✓	g sale sempre più lentamente, e infatti f è positiva e decrescente.

Esercizio 134 (p. 187)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = x - 2\sqrt{x}$ per $0 \leqslant x \leqslant 3$. Determina quindi il massimo ed il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Soluzione. Calcoliamo la derivata di f,

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{2\sqrt{x}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

che si annulla per $\sqrt{x} = 1$, ossia in $x = 1$, che cade nell'intervallo. Per $0 < x < 1$ la frazione $1/\sqrt{x}$ è maggiore di 1, quindi $f'(x) < 0$, mentre per $x > 1$ è minore di 1 e $f'(x) > 0$. La funzione scende quindi fino a $x = 1$ e poi risale. Siccome è continua sull'intervallo chiuso, il massimo e il minimo vanno cercati in $x = 1$ e negli estremi, dove f vale

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 1 - 2 = -1 \qquad f(3) = 3 - 2\sqrt{3} = 3 - 3.4641 = -0.4641$$

da cui

$$\text{massimo} = f(0) = 0 \qquad \text{minimo} = f(1) = -1$$

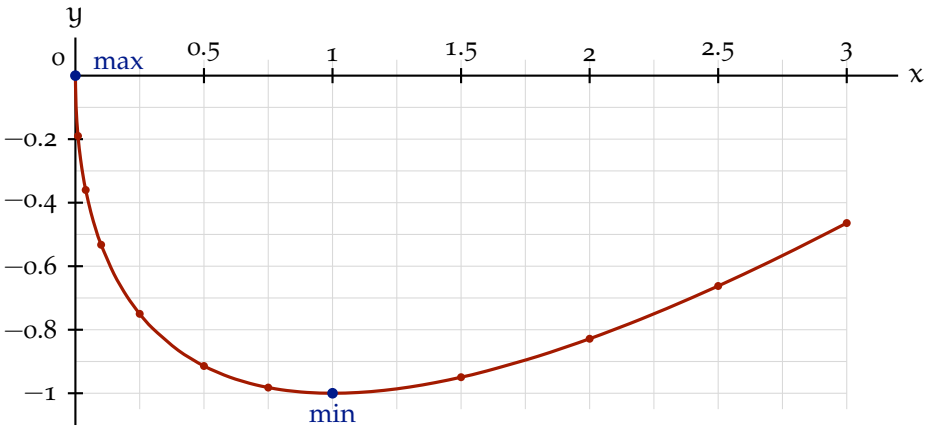
(Il massimo è nell'estremo sinistro dell'intervallo, non in un punto stazionario, perché $f(3)$ è negativo e $f(0) = 0$.)

Nella tabella dei valori per il grafico infittisco i punti vicino a $x = 0$, dove la derivata è molto grande in valore assoluto — la tangente in 0 è verticale.

x	0	0.01	0.04	0.1	0.25	0.5	0.75
$f(x)$	0	−0.190	−0.360	−0.532	−0.750	−0.914	−0.982

x	1	1.5	2	2.5	3
$f(x)$	−1	−0.949	−0.828	−0.662	−0.464

Le ordinate stanno fra -1 e 0, e per l'asse y scelgo un'unità più lunga di quella dell'asse x.



Anche senza derivate si vede che il massimo è in $x = 0$ — la funzione, che possiamo scrivere come $f(x) = \sqrt{x}\,(\sqrt{x} - 2)$, è negativa per $0 < x < 4$, quindi su tutto l'intervallo tranne che in $x = 0$, dove vale 0.

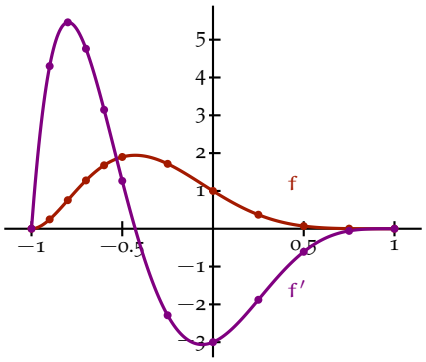
Esercizio 135 (p. 188)
Traccia il grafico di $f(x) = (1+x)^2(1-x)^5$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -1 e 1; quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale.

Soluzione. Cominciamo dalla derivata, che calcoliamo con la regola del prodotto:

$$f'(x) = 2(1+x)(1-x)^5 - 5(1+x)^2(1-x)^4$$

Per il grafico calcolo alcuni valori di f e di f', infittendo vicino a -1, dove la derivata sale e scende in fretta.

x	−1	−0.9	−0.8	−0.7	−0.6	−0.5	−0.25	0	0.25	0.5	0.75	1
$f(x)$	0	0.25	0.76	1.28	1.68	1.90	1.72	1.00	0.37	0.07	0.003	0
$f'(x)$	0	4.30	5.46	4.76	3.15	1.27	−2.29	−3.00	−1.88	−0.61	−0.06	0



I punti in cui il grafico è orizzontale sono i punti di annullamento della derivata (i punti stazionari). Per risolvere l'equazione $f'(x) = 0$ conviene raccogliere il fattore $(1+x)(1-x)^4$ nell'espressione di f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(1+x)(1-x)^5 - 5(1+x)^2(1-x)^4 \\ &= (1+x)(1-x)^4\big(2(1-x) - 5(1+x)\big) = (1+x)(1-x)^4(-3-7x) \end{aligned}$$

Quindi

$$f'(x) = 0 \iff \underbrace{(1+x)}_{x=-1}\underbrace{(1-x)^4}_{x=1}\underbrace{(-3-7x)}_{x=-3/7} = 0$$

$$\iff x = -1 \text{ oppure } x = 1 \text{ oppure } x = -\tfrac{3}{7}$$

I punti in cui il grafico è orizzontale hanno quindi ascissa -1, $-\frac{3}{7}$ e 1.

Nota importante
Espandere il polinomio f' anziché raccogliere, cioè scrivere

$$f'(x) = -7x^6 + 18x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 15x^2 + 2x - 3$$

e poi tentare di risolvere l'equazione, è una cattiva idea. Usando la regola di Ruffini si può fare, e chiaramente si ottengono le soluzioni corrette, ma i calcoli sono così tanti che è difficilissimo non commettere neanche una disattenzione. E ne basta una per cancellare il valore dell'intero procedimento.

Esercizio 136 (p. 188)
Traccia il grafico di

$$f(x) = 0.60 + 0.41\,x - \sqrt{x}$$

per $1 \leqslant x \leqslant 2$ su un diagramma cartesiano. Determina il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo, scrivendo i risultati correttamente arrotondati a quattro cifre significative.

Soluzione. Siccome il dominio è l'intervallo chiuso $[1,2]$, massimo e minimo esistono, e li cerchiamo fra i punti stazionari e gli estremi. Deriviamo (ricordando che $\left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$),

$$f'(x) = 0.41 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

e troviamo il punto stazionario risolvendo

$$0.41 = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{x} = \frac{1}{0.82} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{0.82^2} = 1.4872$$

Il punto x_1 appartiene a $[1, 2]$, quindi confrontiamo i valori di f in 1, in x_1 e in 2:

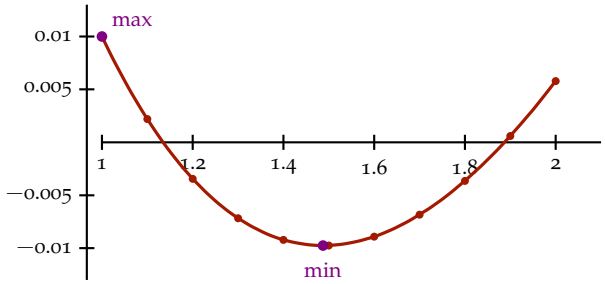
x	1	1.4872	2
$f(x)$	0.01000	−0.009756	0.005786

Il valore più grande è quello in $x = 1$, il più piccolo quello in $x = 1.4872$, quindi

massimo $= 0.01000$ minimo $= -0.009756$

I valori di f stanno tutti fra -0.01 e 0.01, e con la stessa scala sui due assi la curva si confonderebbe con l'asse x. Per il grafico do quindi alle ordinate una scala molto più grande che alle ascisse, e calcolo alcuni valori.

x	1	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2
$f(x)$	0.0100	0.0022	−0.0034	−0.0072	−0.0092	−0.0097	−0.0089	−0.0068	−0.0036	0.0006	0.0058



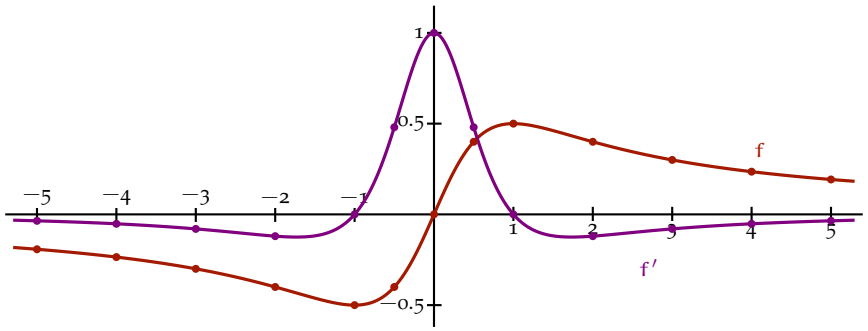
Esercizio 137 (p. 188)
Traccia il grafico di $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e della sua derivata $f'(x)$, per x fra -5 e 5; quindi calcola esattamente in quali punti il grafico di $f(x)$ è orizzontale, e in quali raggiunge la massima e la minima pendenza.

Soluzione. La derivata si calcola con la regola del quoziente:

$$f'(x) = \frac{(x^2+1) - 2x \cdot x}{(x^2+1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2+1)^2}$$

Per il grafico calcolo alcuni valori di f e di f', infittendo vicino a 0, dove le due funzioni cambiano in fretta.

x	−5	−4	−3	−2	−1	−0.5	0	0.5	1	2	3	4	5
$f(x)$	−0.19	−0.24	−0.30	−0.40	−0.50	−0.40	0	0.40	0.50	0.40	0.30	0.24	0.19
$f'(x)$	−0.04	−0.05	−0.08	−0.12	0	0.48	1.00	0.48	0	−0.12	−0.08	−0.05	−0.04



Il grafico è orizzontale dove $f'(x) = 0$:

$$\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = 0 \iff 1-x^2 = 0 \iff x = \pm 1$$

(il denominatore non si annulla mai).

I punti di massima e minima pendenza sono i massimi e i minimi della derivata. Conviene quindi calcolare i punti in cui si annulla la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2x(x^2+1)^2 - 4(1-x^2)(x^2+1)x}{(x^2+1)^4} = \frac{x(x^2+1)(2x^2-6)}{(x^2+1)^4}$$

Come nell'esercizio 135 (p. 188), conviene raccogliere il fattore comune $x(x^2+1)$. Le soluzioni dell'equazione $f'' = 0$ sono 0 e $\pm\sqrt{3}$, quindi massimi e minimi di f' possono trovarsi solo nei punti seguenti (gli estremi ± 5 del tratto che stiamo studiando e i tre punti stazionari di f').

x	-5	$-\sqrt{3}$	0	$\sqrt{3}$	5
$f'(x)$	$-\frac{6}{13^2}$	$-\frac{1}{8}$	1	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{6}{13^2}$
		MIN	MAX	MIN	

La massima pendenza di $f(x)$ si ha in $x = 0$ (pendenza $= 1$); la minima in $x = -\sqrt{3}$ e in $x = \sqrt{3}$ (pendenza $= -\frac{1}{8}$).

Nota importante
È utile verificare la correttezza dei calcoli usando il grafico: nel disegno qui sopra si vede bene che f' ha un picco in 0 e due avvallamenti poco oltre ± 1.7, e che il grafico di f è orizzontale in ± 1.

Esercizio 138 (p. 188)
Traccia il grafico di

$$f(x) = x - 5\sin(x)$$

per $0 \leqslant x \leqslant 10$ su un diagramma cartesiano. Trova i punti stazionari di $f(x)$ in questo intervallo, e determina il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ nel medesimo intervallo. Indica i tuoi risultati con quattro cifre significative di precisione.

Soluzione. La derivata è

$$f'(x) = 1 - 5\cos(x)$$

e si annulla per

$$\cos(x) = \frac{1}{5} = 0.2$$

Troviamo $\arccos(0.2) = 1.369438$. Il coseno è pari e si ripete ogni 2π, ossia ogni 6.283185, quindi le soluzioni sono

$$x = \pm 1.369438 + 2k\pi$$

con k intero, e nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 10$ cadono

$$x_1 = 1.369438 \qquad x_2 = 2\pi - 1.369438 = 4.913747$$

$$x_3 = 2\pi + 1.369438 = 7.652624$$

(la successiva, $4\pi - 1.369438 = 11.197$, è fuori). Con quattro cifre significative, i punti stazionari sono

$$x_1 = 1.369 \qquad x_2 = 4.914 \qquad x_3 = 7.653$$

La derivata è negativa per $0 \leqslant x < x_1$ e per $x_2 < x < x_3$, dove $\cos(x) > 0.2$, e positiva altrove. Quindi f scende fino al *minimo locale* in x_1, sale fino al *massimo locale* in x_2, scende fino al *minimo locale* in x_3 e poi risale fino a $x = 10$.

Nei punti stazionari $\cos(x) = 0.2$, e quindi $\sin(x) = \pm\sqrt{1 - 0.04} = \pm 0.979796$, col segno positivo in x_1 e in x_3 e negativo in x_2. Con questi valori calcoliamo f nei punti stazionari e negli estremi:

x	0	$x_1 = 1.3694$	$x_2 = 4.9137$	$x_3 = 7.6526$	10
$5\sin(x)$	0	4.898979	-4.898979	4.898979	-2.720106
$f(x)$	0	-3.529541	9.812726	2.753645	12.720106

Quindi, con quattro cifre significative,

$$\text{massimo} = f(10) = 12.72 \qquad \text{minimo} = f(1.369) = -3.530$$

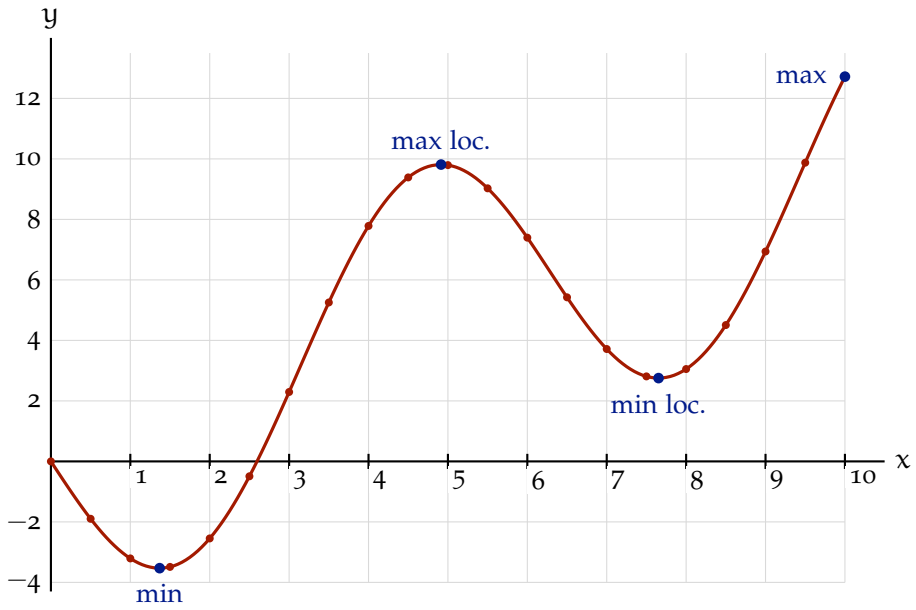
(I valori nei punti stazionari sono $f(x_1) = -3.530$, $f(x_2) = 9.813$, $f(x_3) = 2.754$. Il massimo è nell'estremo destro, non nel *massimo locale* x_2 — senza controllare gli estremi troveresti un massimo sbagliato.)

Per il grafico calcolo f ogni mezza unità, da 0 a 10:

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x)$	0	-1.90	-3.21	-3.49	-2.55	-0.49	2.29	5.25	7.78	9.39	9.79

x	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5	9	9.5	10
$f(x)$	9.03	7.40	5.42	3.72	2.81	3.05	4.51	6.94	9.88	12.72

Le ordinate vanno da circa -3.5 a circa 12.7, quindi sull'asse y prendo un'unità lunga meno della metà di quella dell'asse x.



Il grafico ha la forma che ci aspettiamo. Siccome $-5 \leqslant 5\sin(x) \leqslant 5$, sta sempre nella striscia fra le rette $y = x - 5$ e $y = x + 5$, e oscilla attorno alla retta $y = x$ con periodo 2π.

Esercizio 139 (p. 188)
Traccia il grafico cartesiano della funzione $f(x) = e^{-x}\cos(x)$ per $0 \leqslant x \leqslant 10$. Determina quindi il massimo e il minimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo.

Soluzione. Su un intervallo chiuso, e con f derivabile, massimo e minimo stanno negli estremi o nei punti stazionari, quindi calcoliamo intanto la derivata con la regola del prodotto:

$$f'(x) = -e^{-x}\cos(x) - e^{-x}\sin(x) = -e^{-x}\big(\cos(x) + \sin(x)\big)$$

Siccome $e^{-x} > 0$, la derivata si annulla quando $\cos(x) + \sin(x) = 0$, ossia, dividendo per $\cos(x)$, quando

$$\tan(x) = -1$$

— dividendo non perdiamo nulla, perché dove $\cos(x) = 0$ si ha $\sin(x) = \pm 1$, e l'equazione non è soddisfatta. Le soluzioni sono $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$, e nell'intervallo $0 \leqslant x \leqslant 10$ cadono

$$x_1 = \tfrac{3}{4}\pi = 2.35619 \qquad x_2 = \tfrac{7}{4}\pi = 5.49779 \qquad x_3 = \tfrac{11}{4}\pi = 8.63938$$

(la successiva, 11.78, è fuori). Calcoliamo f in questi tre punti e negli estremi:

x	0	$x_1 = 2.3562$	$x_2 = 5.4978$	$x_3 = 8.6394$	10
e^{-x}	1	0.094780	0.0040958	0.00017700	0.000045400
$\cos(x)$	1	-0.70711	0.70711	-0.70711	-0.83907
$f(x)$	1	-0.067020	0.0028962	-0.00012516	-0.000038094

Quindi

$$\text{massimo} = f(0) = 1 \qquad \text{minimo} = f\left(\tfrac{3}{4}\pi\right) = f(2.356) \approx -0.0670$$

(in x_2 e in x_3 ci sono un *massimo locale* e un *minimo locale*, molto più piccoli in valore assoluto — il fattore e^{-x} smorza le oscillazioni del coseno, di un fattore $e^{-\pi} \approx 0.043$ a ogni mezzo periodo).

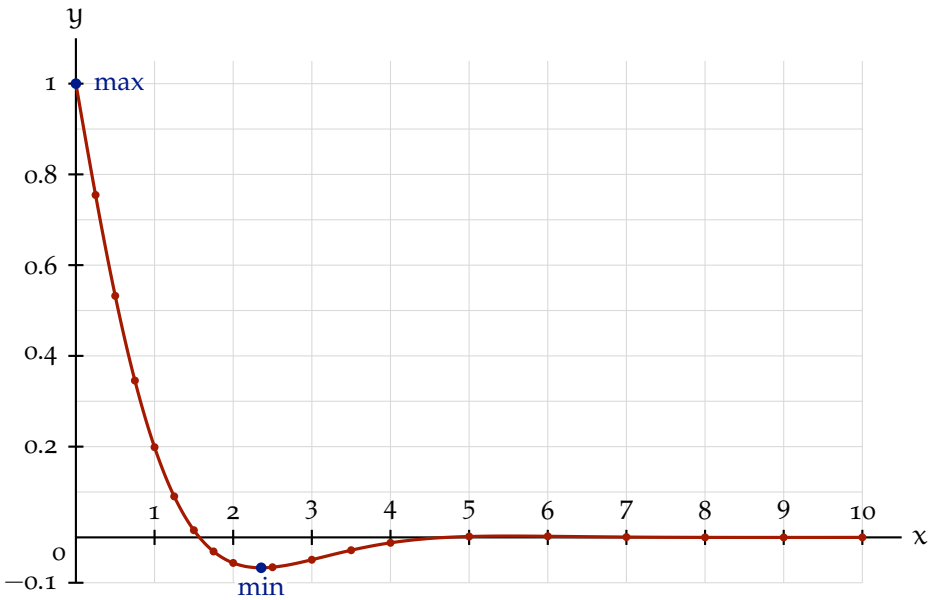
Per il grafico calcolo f con passo 0.25 fino a $x = 2$, dove la funzione cambia in fretta, e poi con un passo via via più largo.

x	0	0.25	0.5	0.75	1	1.25	1.5	1.75	2
$f(x)$	1	0.7546	0.5323	0.3456	0.1988	0.0903	0.0158	−0.0310	−0.0563

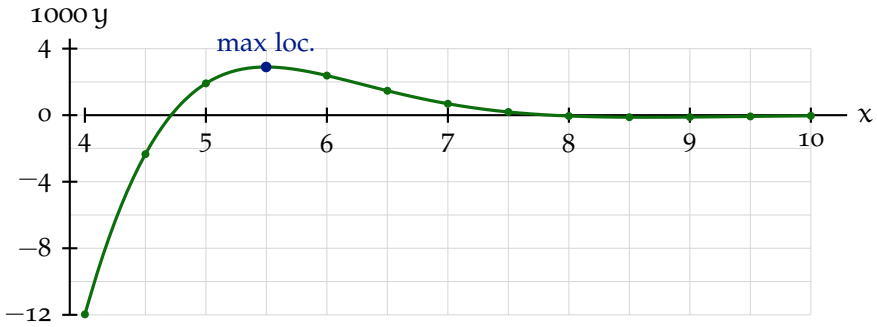
x	2.5	3	3.5	4	5
$f(x)$	−0.0658	−0.0493	−0.0283	−0.0120	0.0019

x	6	7	8	9	10
$f(x)$	0.0024	0.0007	−0.00005	−0.0001	−0.00004

Sull'asse y scelgo un'unità lunga circa sei volte quella dell'asse x.



Per controllare il grafico osserviamo che f si annulla negli zeri del coseno, $\frac{\pi}{2} = 1.571$, $\frac{3}{2}\pi = 4.712$, $\frac{5}{2}\pi = 7.854$, e che fra uno zero e l'altro ha un solo punto stazionario. Oltre $x = 4$ le oscillazioni ci sono, ma sono così piccole — meno di tre millesimi — che a questa scala la curva si confonde con l'asse x. Per vederle ingrandisco le ordinate e traccio, per $4 \leqslant x \leqslant 10$, il grafico di $1000\, f(x)$.



Anche qui il *minimo locale* in $x_3 \approx 8.64$, che vale -0.000125, si vede appena — in valore assoluto è circa venti volte più piccolo del *massimo locale* in x_2.

Esercizio 140 (p. 188)
Traccia il grafico di

$$f(x) = 5.64^x - 15.28^x$$

per $-3 \leqslant x \leqslant 0$ in un diagramma cartesiano. Determina il massimo dei valori assunti da $f(x)$ in questo intervallo, scrivendo il risultato, correttamente arrotondato, con cinque cifre significative di precisione.

Soluzione. Cominciamo dai punti stazionari. La derivata è

$$f'(x) = \log_e(5.64) \cdot 5.64^x - \log_e(15.28) \cdot 15.28^x$$

e si annulla per

$$\log_e(5.64) \cdot 5.64^x = \log_e(15.28) \cdot 15.28^x \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{15.28}{5.64}\right)^x = \frac{\log_e(5.64)}{\log_e(15.28)}$$

$$2.709220^x = \frac{1.729884}{2.726545} = 0.634460$$

da cui, passando ai logaritmi,

$$x_1 = \frac{\log_e(0.634460)}{\log_e(2.709220)} = \frac{-0.454981}{0.996661} = -0.456505$$

che cade nell'intervallo. Il segno della derivata agli estremi,

$$f'(-3) = 1.729884 \cdot 0.005574 - 2.726545 \cdot 0.000280 \approx 0.0089 > 0$$

$$f'(0) = 1.729884 - 2.726545 = -0.9967 < 0$$

ci dice che f cresce fino a x_1 e poi decresce. Siccome l'intervallo è chiuso, il massimo può stare solo in x_1 o in un estremo, e confrontiamo quindi i tre valori

$$f(-3) = 0.0055739 - 0.0002803 = 0.0052936 \qquad f(0) = 1 - 1 = 0$$

$$f(x_1) = 0.453981 - 0.288033 = 0.165948$$

Il più grande è $f(x_1)$, e con cinque cifre significative abbiamo

$$\text{massimo} = f(-0.45651) = 0.16595$$

Le sei cifre decimali non sono un lusso — f è la differenza di due numeri dell'ordine di 0.45 e 0.29, e per averne cinque cifre significative servono almeno sei decimali nei due termini e un x_1 con cinque o sei cifre. Con $x_1 \approx -0.46$, per esempio, troveremmo $f(-0.46) = 0.165943$, ossia 0.16594, sbagliato nell'ultima cifra.

Possiamo ricontrollare $f(x_1)$ per un'altra strada. Nel punto stazionario

$$\log_e(15.28) \cdot 15.28^{x_1} = \log_e(5.64) \cdot 5.64^{x_1}$$

quindi

$$f(x_1) = 5.64^{x_1}\left(1 - \frac{\log_e(5.64)}{\log_e(15.28)}\right) = 0.453981 \cdot 0.365540 = 0.165948$$

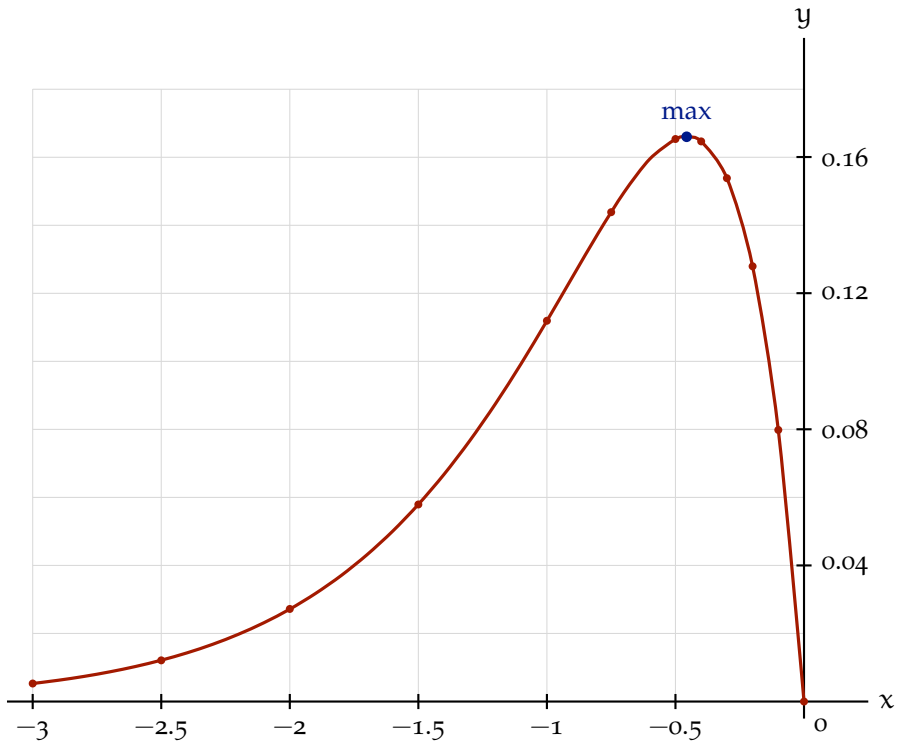
e ritroviamo il valore di prima.

Per il grafico calcolo una tabella di valori, infittendo i punti vicino a 0, dove la funzione cambia in fretta.

x	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.75	-0.5
$f(x)$	0.0053	0.0121	0.0272	0.0579	0.1119	0.1438	0.1653

x	-0.4565	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0
$f(x)$	0.1659	0.1646	0.1538	0.1279	0.0798	0

Le ordinate variano solo di circa 0.17, contro le 3 unità delle ascisse, quindi sull'asse y prendo un'unità molto più lunga.



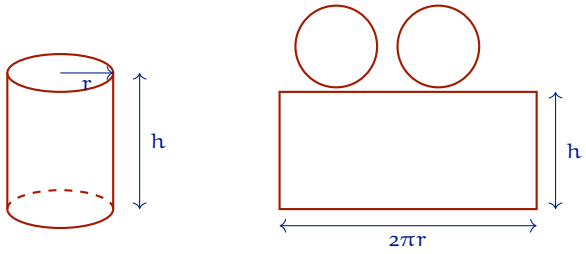
Esercizio 141 (p. 188)
Si vuole costruire un fusto cilindrico in lamiera di acciaio, chiuso da ogni lato, più capiente possibile. La lamiera è spessa 0.90 mm e il peso del fusto vuoto deve essere di 14 kg. Sapendo che il peso specifico dell'acciaio è 7.85 kg/L, calcola la capienza del fusto.

Soluzione. Le informazioni nel testo sono, verosimilmente, sufficienti a calcolare la quantità di lamiera di cui disponiamo per costruire il fusto. Tuttavia, usando la medesima quantità di lamiera, è possibile costruire fusti cilindrici di proporzioni differenti: fra tutte le possibilità, l'esercizio ci chiede di identificare quella che produce il fusto più capiente.

Possiamo quantificare la lamiera a nostra disposizione con la misura S della sua superficie, che dovrà coincidere con la misura della superficie esterna del fusto. Per ricavare S dai dati dell'esercizio, consideriamo un foglio di lamiera di superficie S come un parallelepipedo avente superficie di base S ed altezza 0.90 mm. Il volume di acciaio in questo foglio è $S \cdot 0.90\,\text{mm}$, e il suo peso è $S \cdot 0.90\,\text{mm} \cdot 7.85\,\text{kg/L}$, che deve valere 14 kg:

$$S \cdot 0.90\,\text{mm} \cdot 7.85\,\text{kg/L} = 14\,\text{kg} \qquad \Longrightarrow \qquad S = 1.9816\,\text{m}^2$$

Ora indichiamo le misure del fusto per mezzo del raggio di base r e dell'altezza h. Il valore di S che abbiamo calcolato impone un vincolo che lega r ad h; per esplicitarlo occorre calcolare la superficie del fusto in funzione di r e di h. Questa superficie è costituita da due cerchi di raggio r e da un rettangolo $2\pi r$ per h (il mantello, tagliato lungo una generatrice e srotolato).



$$S = \underbrace{2\pi r^2}_{\text{i due cerchi}} + \underbrace{2\pi r h}_{\text{il rettangolo}} = 2\pi r(r+h)$$

Stante il vincolo su S, possiamo ora ricavare h in funzione di r o, viceversa, r in funzione di h: siamo liberi di scegliere come procedere, quindi facciamo la scelta più comoda. Per ricavare r bisogna risolvere un'equazione di secondo grado, per ricavare h una di primo grado: quindi r sarà la nostra variabile indipendente.

$$S = 2\pi r(r+h) \qquad \Longrightarrow \qquad h = \frac{S}{2\pi r} - r$$

A noi interessa il massimo del volume: esprimiamo quindi il volume in funzione di r e h e, tenuto conto del vincolo, solo di r.

$$V = \underbrace{\pi r^2}_{\text{a. base}} \underbrace{h}_{\text{altezza}} = \pi r^2 \left(\frac{S}{2\pi r} - r\right) = \frac{S}{2} r - \pi r^3$$

Per trovare il massimo calcoliamo la derivata di V rispetto a r:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{S}{2} - 3\pi r^2$$

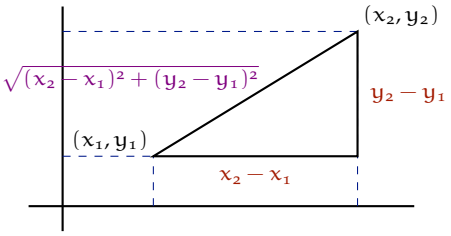
Questa derivata si annulla in $r = r_0 = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$, è positiva per $0 < r < r_0$ ed è negativa per $r > r_0$: quindi V è una funzione crescente di r per $r < r_0$ e decrescente per $r > r_0$, e di conseguenza assume il massimo valore in $r = r_0$. Il volume corrispondente è

$$V_{\max} = \frac{S}{2} r_0 - \pi r_0^3 = \frac{S}{2} r_0 - \underbrace{\pi \frac{S}{6\pi}}_{=\pi r_0^2} r_0 = \frac{S}{3} r_0 = \frac{S}{3}\sqrt{\frac{S}{6\pi}} \approx 0.214\,\mathrm{m}^3 = 214\,\mathrm{L}$$

Esercizio 142 (p. 189)
Dati i punti $A = (-2,-1)$ e $B = (0,-1)$, trova il punto $C = (x,y)$ sulla retta $x + y = 1$ tale che il perimetro del triangolo ABC sia più piccolo possibile.

Soluzione. Cominciamo col ricordare la formula (dalla geometria analitica delle scuole medie superiori) per esprimere la distanza fra $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$:

$$\text{distanza}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Noi vogliamo trovare il punto C che minimizza il perimetro:

$$\begin{aligned}\text{perimetro}(ABC) &= \text{distanza}(A, B) + \text{distanza}(A, C) + \text{distanza}(B, C)\\ &= 2 + \sqrt{(x+2)^2 + (y+1)^2} + \sqrt{x^2 + (y+1)^2}\end{aligned}$$

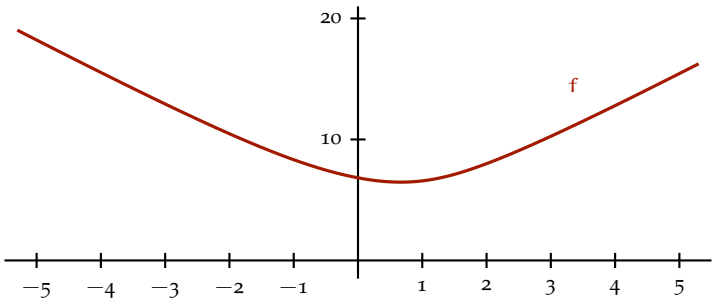
Questa quantità dipende dalle coordinate x e y di C che, però, sono legate fra di loro dalla richiesta che C appartenga alla retta $x + y = 1$. Volendo applicare la teoria che sappiamo, per trovare i minimi di una funzione in una variabile, converrà quindi esplicitare la y in funzione di x, sostituendo $y = 1 - x$ nella formula (e quindi $y + 1 = 2 - x$):

$$\text{perimetro}(ABC) = 2 + \sqrt{(x+2)^2 + (2-x)^2} + \sqrt{x^2 + (2-x)^2} =: f(x)$$

Chiamiamo il perimetro $f(x)$: stiamo cercando i minimi di questa funzione. Conviene fare le semplificazioni algebriche sotto le radici:

$$f(x) = 2 + \sqrt{2x^2 + 8} + \sqrt{2x^2 - 4x + 4}$$

Avendo una funzione scritta esplicitamente, tracciarne un grafico non può essere l'idea peggiore. Nel nostro caso, siccome le ascisse dei punti dati sono -2 e 0, è ragionevole immaginare che troveremo il punto C in quei paraggi, per cui potremmo tracciare il grafico per x fra -5 e 5.



Alla luce del grafico ci aspettiamo che il perimetro sia minimo per qualche x fra 0 e 1, e che questo sia l'unico punto stazionario di f. Proviamo a indagare la situazione rigorosamente.

$$f'(x) = \frac{4x}{2\sqrt{2x^2 + 8}} + \frac{4x - 4}{2\sqrt{2x^2 - 4x + 4}}$$

Notiamo intanto che i denominatori non si possono annullare, quindi questa derivata è ben definita per qualunque valore della x. Cerchiamo i punti stazionari di $f(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\iff \quad \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+8}} + \frac{4x-4}{2\sqrt{2x^2-4x+4}} = 0 \\ &\iff \quad \frac{x}{\sqrt{2x^2+8}} = -\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-4x+4}} \\ &\iff \quad x\sqrt{2x^2-4x+4} = -(x-1)\sqrt{2x^2+8} \end{aligned}$$

Ora eleviamo al quadrato ambo i membri. Questo passaggio potrebbe introdurre delle soluzioni spurie (perché elevando al quadrato cose diverse, alle volte, diventano uguali: $-2 \neq 2$ ma $(-2)^2 = 2^2$), però noi non ce ne curiamo: alla fine separeremo il grano dal loglio controllando quali delle soluzioni trovate soddisfano l'equazione originale.

$$\begin{aligned} x^2(2x^2-4x+4) &= (x-1)^2(2x^2+8) \\ \cancel{2x^4} - \cancel{4x^3} + 4x^2 &= \cancel{2x^4} - \cancel{4x^3} + 10x^2 - 16x + 8 \\ 6x^2 - 16x + 8 = 0 \quad &\implies \quad x = 2 \quad \text{oppure} \quad x = \tfrac{2}{3} \end{aligned}$$

Facciamo la verifica:

$f'(2) = 1+1 = 2$ ✗ soluzione spuria $\qquad f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$ ✓ punto stazionario

La funzione f ha quindi il solo punto stazionario $x = \frac{2}{3}$, che ovviamente è il minimo cercato, per cui $C = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ (ricordando che $y = 1-x$).

Per averne una verifica completamente formale notiamo che il segno della derivata è negativo prima di $\frac{2}{3}$ e positivo dopo. Questo si verifica facilmente perché, siccome $\frac{2}{3}$ è il solo punto di annullamento, basta controllare il segno in un punto arbitrario prima e in un punto arbitrario dopo: abbiamo già visto che $f'(2) = 2 > 0$, e per il prima $f'(0) = -1 < 0$. Questi segni della derivata implicano che $f(x)$ è decrescente prima di $\frac{2}{3}$ e crescente dopo, quindi assume in $\frac{2}{3}$ il valore minimo.

Test 143 (p. 196)
$\int \sin(2x) + x^2 \, dx$

Soluzione.

$$\int \sin(2x)\,dx + \int x^2\,dx = -\frac{1}{2}\cos(2x) + \frac{1}{3}x^3 + C$$

(per il primo integrale si usa la formula $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$).

Test 144 (p. 196)
$\int e^{3x} - \cos(1-x)\,dx$

Soluzione.

$$\int e^{3x}\,dx - \int \cos(1-x)\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + \sin(1-x) + C$$

(nel secondo integrale $a = -1$, quindi $\frac{1}{a}F(ax+b) = -\sin(1-x)$, che cambiato di segno dà $+\sin(1-x)$).