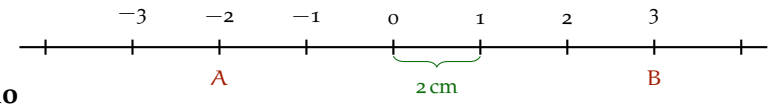
## §13 Scale logaritmiche

L'usuale corrispondenza fra i numeri reali e i punti sugli assi di un diagramma cartesiano si chiama scala lineare. Questa maniera di numerare i punti di una retta è definita dalla seguente proprietà.

**Definizione** (Scala lineare)
La distanza fra due numeri è proporzionale alla loro differenza.

**Esempio**

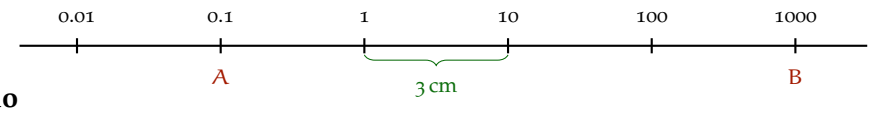



$$\text{dist}(A,B) : 3-(-2) = 2\,\text{cm} : 1-0$$
$$\text{dist}(A,B) = \frac{5\cdot 2\,\text{cm}}{1} = 10\,\text{cm}$$

Un'altra maniera di numerare gli assi che ha interesse pratico è la scala logaritmica, definita dalla proprietà seguente.

**Definizione** (Scala logaritmica)
Rappresenta solo numeri positivi, e la distanza fra due numeri è proporzionale alla differenza dei loro logaritmi (in una qualsiasi base fissata).

**Esempio**

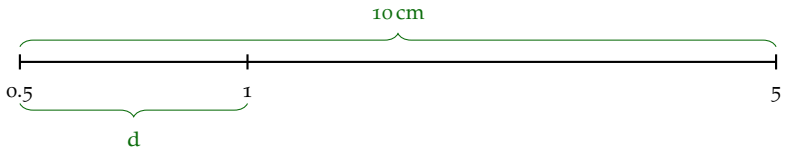



$$\text{dist}(A,B) : \log_{10}(1000) - \log_{10}(0.1) = 3\,\text{cm} : \log_{10}(10) - \log_{10}(1)$$
$$\text{dist}(A,B) = \frac{4\cdot 3\,\text{cm}}{1} = 12\,\text{cm}$$

**Nota importante**
Quella qui sopra è la forma tipica di una scala logaritmica: le potenze di 10 sono equispaziate.

**Esercizio**
Traccia una scala logaritmica lunga 10 cm che, all'estremo sinistro, ha 0.5 e, a quello destro, ha 5.

*Soluzione.* Come esempio, calcoliamo dove mettere il numero 1 (il calcolo è lo stesso qualunque numero vogliamo riportare sulla scala). Conviene determinare la distanza d del nostro numero dall'estremo sinistro.




$$d : \log_{10}(1) - \log_{10}(0.5) = 10\,\text{cm} : \log_{10}(5) - \log_{10}(0.5)$$

$$d = \frac{(\log_{10}(1) - \log_{10}(0.5)) \cdot 10\,\text{cm}}{\log_{10}(5) - \log_{10}(0.5)} = \frac{\log_{10}\left(\frac{1}{0.5}\right) \cdot 10\,\text{cm}}{\log_{10}\left(\frac{5}{0.5}\right)} = \frac{\log_{10}(2) \cdot 10\,\text{cm}}{\log_{10}(10)} \approx 3\,\text{cm}$$

□

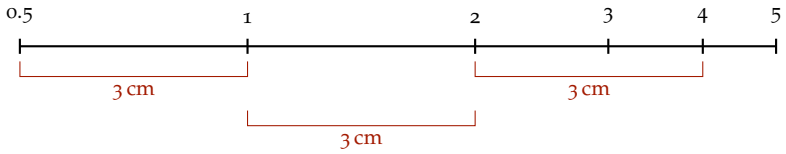
## §13.1 Osservazioni sull'esercizio

Se ripetiamo il calcolo in un'altra base otteniamo il medesimo risultato:

$$d : \underbrace{\log_e(1)}_{0} - \underbrace{\log_e(0.5)}_{\approx -0.693} = 10\,\text{cm} : \underbrace{\log_e(5)}_{\approx 1.609} - \underbrace{\log_e(0.5)}_{\approx -0.693}$$

$$d : 0.693 = 10\,\text{cm} : 2.302 \qquad \Longrightarrow \qquad d \approx \frac{0.693 \cdot 10\,\text{cm}}{2.302} \approx 3\,\text{cm}$$

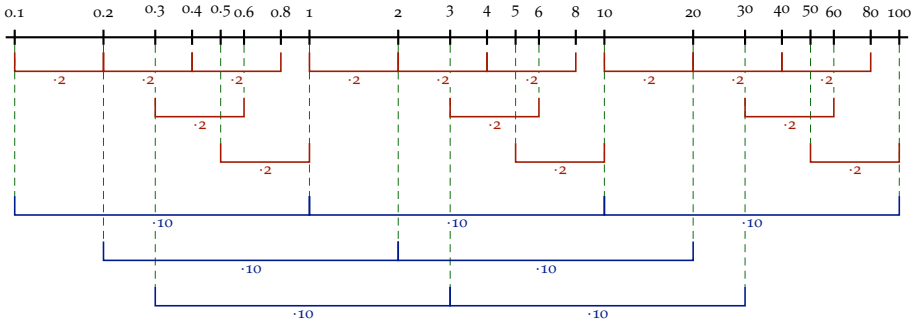
Riportando altri numeri otteniamo




Notiamo che le distanze fra 0.5 e 1, fra 1 e 2, e fra 2 e 4 sono uguali. Questo accade perché

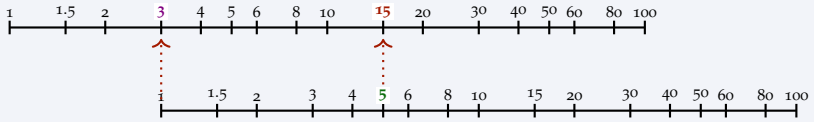
$$\frac{1}{0.5} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2}$$

In generale spostarsi lungo una scala logaritmica di una certa distanza significa moltiplicare per un certo numero (che dipende dalla scala e dalla distanza). Nell'esercizio, se ci spostiamo verso destra di 3 cm, moltiplichiamo per 2. Proseguendo questa scala a destra e a sinistra otteniamo

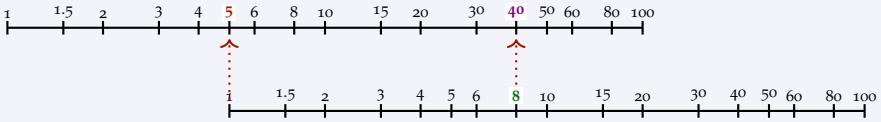



È interessante notare come il gioco *spostamento* = *moltiplicazione* fa sì che gli ordini di grandezza 0.1–1, 1–10, 10–100, &c. siano lunghi uguali, e suddivisi in maniera simile.

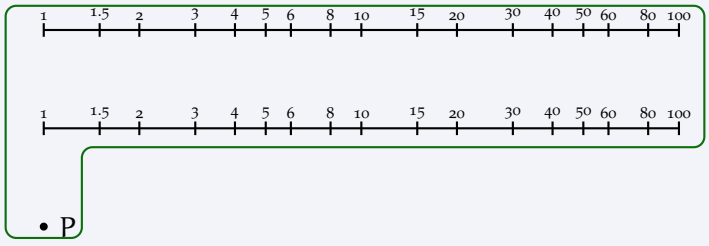
**Approfondimento (fuori programma)** (Curiosità sulle scale logaritmiche)
Costruiamo due scale logaritmiche uguali e mobili l'una rispetto all'altra. Supponiamo di voler calcolare un prodotto, per esempio $3 \cdot 5$. Poniamo l'1 della seconda scala in corrispondenza del 3 della prima: il numero della prima scala corrispondente al 5 sulla seconda sarà il prodotto.



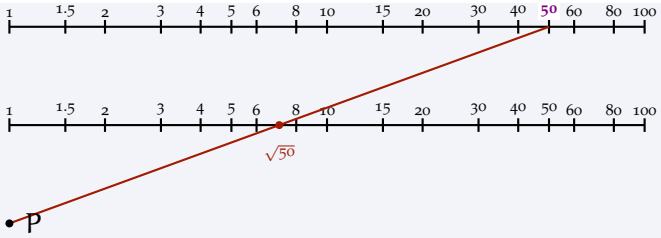

Per calcolare una divisione, per esempio $40/8$, mettiamo il divisore sulla seconda in corrispondenza del dividendo sulla prima. L'1 della seconda indicherà il risultato.




Questo diagramma, invece, permette di calcolare le radici quadrate: le due scale sono fisse, e con esse il punto P.



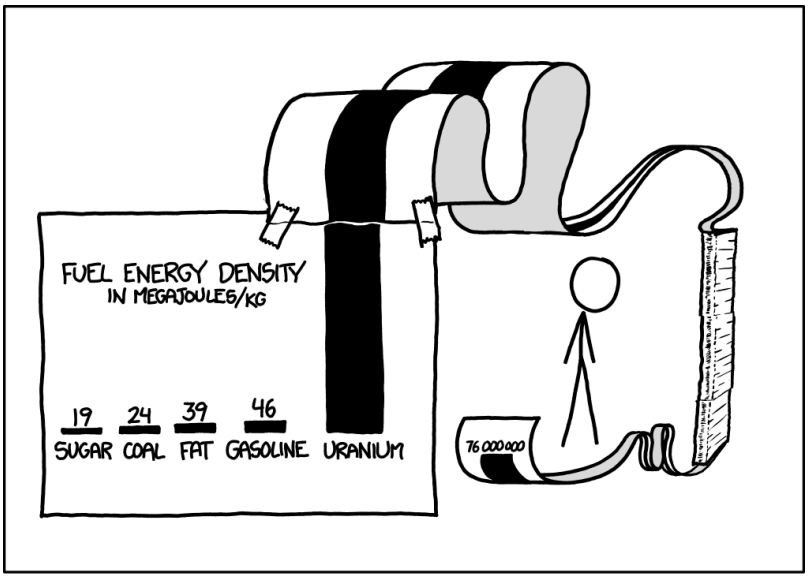

Per trovare, per esempio, $\sqrt{50}$, riportiamo 50 sulla scala superiore, poi connettiamo questo punto con P. Il segmento così identificato interseca la scala inferiore in $\sqrt{50}$.




La costruzione funziona perché la scala inferiore taglia a metà il fascio di rette uscenti da P: la distanza dall'1 si dimezza, e dimezzare un logaritmo significa estrarre una radice quadrata.

## §13.2 A cosa servono le scale logaritmiche?

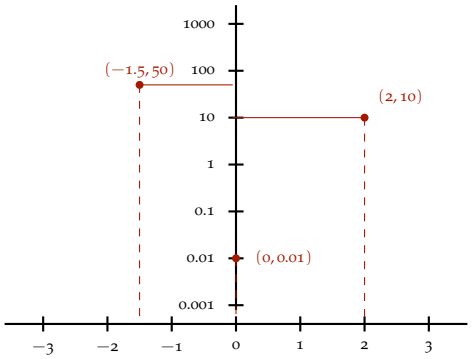
Una scala logaritmica permette solo di rappresentare quantità positive. In generale, è conveniente usare una scala logaritmica per quantità che variano su più ordini di grandezza. I grafici logaritmici sono particolarmente utili in quanto evidenziano certe leggi (o funzioni) che si incontrano di frequente (esponenziali, potenze).




Randall Munroe, *Log Scale*, xkcd n. 1162, CC BY-NC 2.5.

## §13.3 Grafici semi-logaritmici (o lin-log)

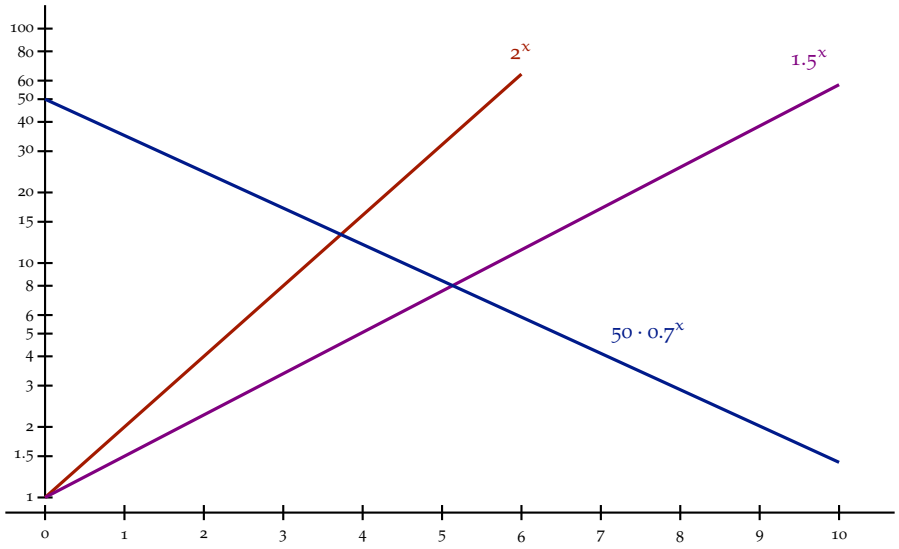
Un grafico semi-logaritmico (o lin-log) si distingue dagli usuali grafici cartesiani poiché l'asse delle ordinate è graduato in scala logaritmica. I punti si identificano su un grafico logaritmico mediante l'intersezione di due linee coordinate, esattamente nello stesso modo dei grafici cartesiani.




Alcuni punti rappresentati su un grafico semi-logaritmico.

Da notare che l'asse delle ordinate riporta solo valori positivi. L'asse delle ascisse, invece, può anche rappresentare numeri negativi.

I grafici semi-logaritmici sono importanti per riconoscere le funzioni esponenziali. Infatti un grafico appare rettilineo se e solo se rappresenta un esponenziale.



## §13.4 Da grafico semi-logaritmico a espressione

La forma generale di una funzione esponenziale è $f(x) = a \cdot b^x$. Alternativamente, si può fissare una base convenzionale, per esempio 10 oppure $e$, e scrivere $f(x) = a \cdot 10^{k \cdot x}$ oppure $f(x) = a \cdot e^{h \cdot x}$. Ogni funzione esponenziale può essere espressa in ciascuna di queste forme, per esempio

$$\underbrace{0.7}_{a} \cdot \underbrace{3^x}_{b^x} = \underbrace{0.7}_{a} \cdot 10^{x \overbrace{\log_{10}(3)}^{k}} = \underbrace{0.7}_{a} \cdot e^{x \overbrace{\log_e(3)}^{h}}$$

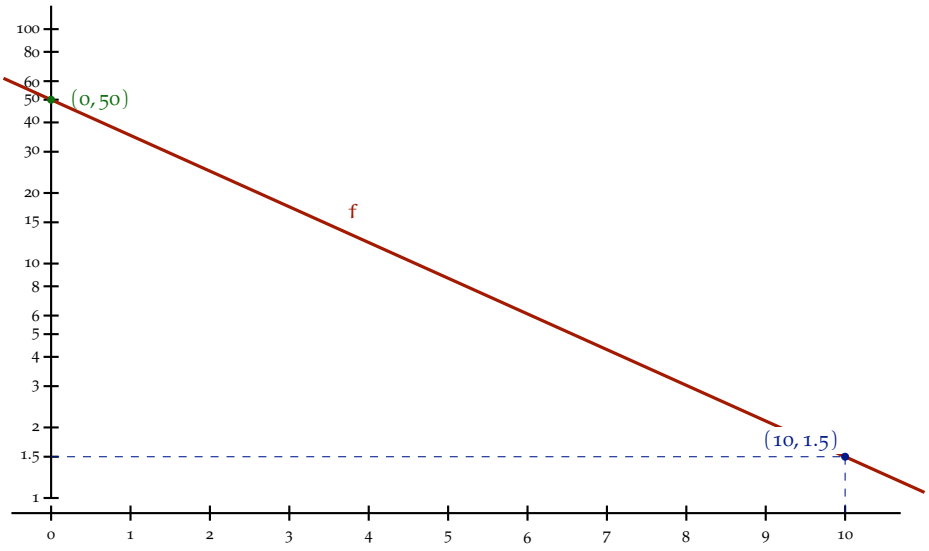
Però, conviene fissare una base convenzionale quando la variabile non è adimensionale. Per esempio, la funzione $f(t) = 4.0 \cdot 10^{t/4\,s}$, della variabile $t$ che ha le dimensioni di un tempo, non si può scrivere nella forma $f(t) = 4.0 \cdot b^t$, perché non ha senso elevare a un tempo (quanto fa $2^{2\,h}$? e $2^{120\,min}$?). Questa funzione si può però scrivere nelle forme equivalenti

$$f(t) = 4.0 \cdot 10^{t \cdot 0.25\,s^{-1}} = 4.0 \cdot e^{t \cdot 0.25 \cdot \log_e(10)\,s^{-1}} = 10^{\log_{10}(4.0) + \frac{15\,t}{1\,min}}$$

Verifica questi calcoli!

Ora, supponiamo di constatare che il grafico di una certa funzione $f$, in un diagramma semi-logaritmico, è una retta. Sappiamo quindi che $f$ è una funzione esponenziale. Come troviamo l'espressione di $f(x)$?

Iniziamo coll'identificare le coordinate di due punti, ragionevolmente distanti fra loro, sul grafico di $f$. In questo esempio $(0, 50)$ e $(10, 1.5)$. Sappiamo quindi che $f(0) = 50$ e $f(10) = 1.5$.




Volendo scrivere $f$ nella forma $f(x) = a \cdot b^x$ vediamo che $f(0) = a \cdot b^0 = 50$ e $f(10) = a \cdot b^{10} = 1.5$. Quindi i parametri $a$ e $b$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} a \cdot b^0 = 50 \\ a \cdot b^{10} = 1.5 \end{cases}$$

Risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} a \cdot \underbrace{b^0}_{=1} = 50 \quad \Longrightarrow \quad a = 50 \\ a \cdot b^{10} = 1.5 \quad \Longrightarrow \quad 50 \cdot b^{10} = 1.5 \quad \Longrightarrow \quad b = \left(\frac{1.5}{50}\right)^{\frac{1}{10}} \approx 0.70 \end{cases}$$

Quindi

$$f(x) = 50 \cdot 0.70^x$$

**Esercizio**
Cerca una funzione esponenziale $g(x)$ tale che $g(2.5) = 7.6$ e $g(4.0) = 12.0$.

*Soluzione.* Questa volta usiamo la forma $g(x) = a \cdot 10^{k \cdot x}$. Otteniamo il sistema

$$\begin{cases} a \cdot 10^{k \cdot 2.5} = 7.6 \quad \Longrightarrow \quad a = \dfrac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \\ a \cdot 10^{k \cdot 4.0} = 12.0 \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \cdot 10^{k \cdot 4.0} = 12.0 \end{cases}$$

$$10^{k \cdot 4.0 - k \cdot 2.5} = 10^{k \cdot 1.5}$$

e quindi

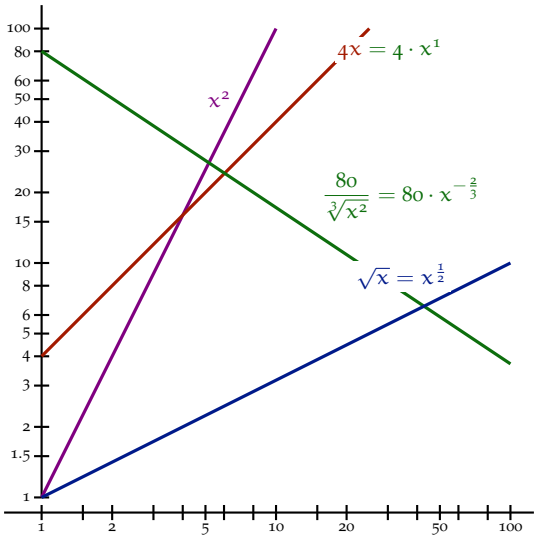
$$7.6 \cdot 10^{k \cdot 1.5} = 12.0 \implies 10^{k \cdot 1.5} = \frac{12.0}{7.6} \implies k \cdot 1.5 = \log_{10}\left(\frac{12.0}{7.6}\right) \implies k \approx 0.132$$

$$a = \frac{7.6}{10^{k \cdot 2.5}} \approx 3.5 \qquad \text{quindi} \qquad g(x) = 3.5 \cdot 10^{0.132 \cdot x}$$

□

## §13.5 Grafici logaritmici (o log-log)

In un grafico logaritmico entrambi gli assi sono in scala logaritmica (va da sé, quindi, che entrambi rappresentano solo numeri positivi). Questi grafici permettono di riconoscere visivamente le funzioni potenza, ossia quelle della forma $f(x) = a \cdot x^k$ (con $k$ che potrebbe anche non essere un numero intero). Per esempio




## §13.6 Dal grafico logaritmico all'espressione

Il procedimento per ottenere l'espressione di una legge potenza $f(x)$ dal suo grafico è analogo a quello descritto per l'esponenziale.

**Esercizio**
Supponi di osservare che una funzione $f(x)$ è rappresentata in un grafico logaritmico da una retta. Sai quindi che $f(x) = a \cdot x^k$ per opportuni $a$ e $k$. Vedi anche dal grafico che $f(2.1) = 10$ e $f(30) = 3.7$. Qual è l'espressione di $f$?

*Soluzione.*

$$\begin{cases} a \cdot 2.1^k = 10 \implies a = \dfrac{10}{2.1^k} \\ a \cdot 30^k = 3.7 \implies \dfrac{10}{2.1^k} \cdot 30^k = 3.7 \implies \left(\dfrac{30}{2.1}\right)^k = \dfrac{3.7}{10} \end{cases}$$

$$k = \log_{\frac{30}{2.1}} \left(\frac{3.7}{10}\right) = \frac{\log_{10}\left(\frac{3.7}{10}\right)}{\log_{10}\left(\frac{30}{2.1}\right)} \approx -0.37$$

$$a = \frac{10}{2.1^k} = \frac{10}{2.1^{-0.37}} \approx 13 \qquad \text{quindi} \qquad f(x) = 13 \cdot x^{-0.37}$$

□

**Nota importante**
Al termine di calcoli come questo conviene sempre fare la prova calcolando f nei punti dati:

$f(2.1) = 13 \cdot 2.1^{-0.37} \approx 9.88 \approx 10$ ✓ $\qquad$ $f(30) = 13 \cdot 30^{-0.37} \approx 3.69 \approx 3.7$ ✓

## §13.7 Esercizi

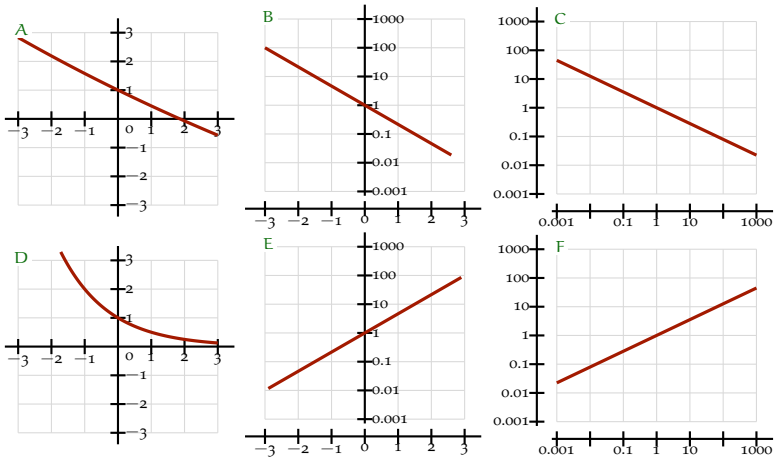
**Esercizio 78** (soluzione a p. 289)
Vogliamo costruire una scala logaritmica lunga 30 cm. Abbiamo stabilito che il numero 20 si trovi esattamente nel mezzo della scala, mentre il numero 1000 deve trovarsi all'estremo destro. Che numero è indicato sull'estremo sinistro della scala? A che distanza, in millimetri, dall'estremo sinistro si trova il numero 7?

**Esercizio 79** (soluzione a p. 290)

1. Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?
2. Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0, da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?
3. Se il numero iniziale di individui alla domanda 2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

**Esercizio 80** (soluzione a p. 292)
La concentrazione di un farmaco nel plasma di un paziente è di 50 µmol/mL al tempo $t_0$, e decresce esponenzialmente con un tempo di dimezzamento di 16 ore. Rappresenta l'andamento di questa concentrazione nelle 72 ore successive a $t_0$, sia per mezzo di un diagramma cartesiano, sia per mezzo di un diagramma semilogaritmico.

**Esercizio 81** (soluzione a p. 293)
Determina quali dei grafici seguenti rappresentano un decadimento esponenziale, e, per ciascuno di questi, trova il tempo di dimezzamento. In tutti i grafici le ascisse sono indicate in secondi.




**Esercizio 82** (soluzione a p. 294)
La concentrazione di un farmaco nel plasma di un paziente, dopo la somministrazione per via endovenosa, decresce esponenzialmente con un tempo di dimezzamento di 8.0 ore.

1. Quanto tempo occorre perché una concentrazione iniziale di 5.0 mg/L scenda a 0.10 mg/L?
2. A ogni somministrazione di una dose, la concentrazione plasmatica aumenta, molto rapidamente, di 5.0 mg/L, poi riprende a decrescere esponenzialmente. Il paziente riceve la prima dose al tempo $t = 0$, e poi una dose ogni 12.0 ore. Rappresenta con un diagramma cartesiano l'andamento della concentrazione plasmatica nelle 48 ore successive alla prima somministrazione.
3. A lungo andare, fra quali valori oscilla la concentrazione plasmatica del paziente?

**Esercizio 83** (soluzione a p. 296)
La crescita di una popolazione di microorganismi segue la curva logistica

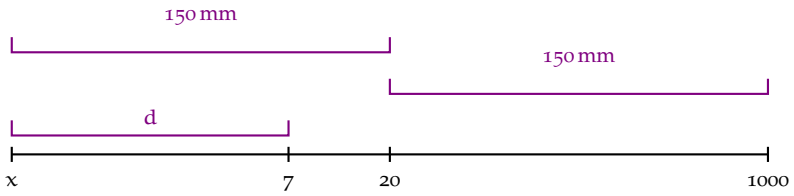
$$P(t) = \frac{P_0 K e^{t/\tau}}{K - P_0 + P_0 e^{t/\tau}}$$

con $P_0 = 1.50 \cdot 10^6$, $K = 3.70 \cdot 10^9$ e $\tau = 2.00\,\mathrm{h}$.

1. Rappresenta l'andamento della popolazione, per tempi compresi fra 0 e 24 ore, in un diagramma cartesiano.
2. Rappresenta la medesima funzione mettendo la popolazione in scala logaritmica.
3. Nelle prime ore, la crescita è approssimativamente esponenziale: rappresenta questa funzione per mezzo di un'espressione analitica, e aggiungi il grafico dell'esponenziale ai due diagrammi precedenti.

**Esercizio 78** (p. 92)
Vogliamo costruire una scala logaritmica lunga 30 cm. Abbiamo stabilito che il numero 20 si trovi esattamente nel mezzo della scala, mentre il numero 1000 deve trovarsi all'estremo destro. Che numero è indicato sull'estremo sinistro della scala? A che distanza, in millimetri, dall'estremo sinistro si trova il numero 7?

*Soluzione.* La situazione è come rappresentata in figura.




L'esercizio chiede il numero $x$ e la distanza $d$. Per $x$ abbiamo la seguente proporzione

$$\log_{10}(1000) - \log_{10}(20) : 150\,\text{mm} = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150\,\text{mm}$$

da cui calcoliamo

$$\underbrace{\left(\log_{10}(1000) - \log_{10}(20)\right)}_{\log_{10}\left(\frac{1000}{20}\right)} \cdot \cancel{150\,\text{mm}} = \underbrace{\left(\log_{10}(20) - \log_{10}(x)\right)}_{\log_{10}\left(\frac{20}{x}\right)} \cdot \cancel{150\,\text{mm}}$$

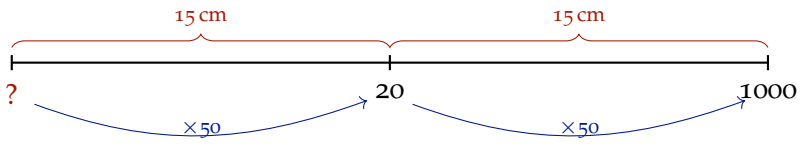
$$\log_{10}\left(\frac{1000}{20}\right) = \log_{10}\left(\frac{20}{x}\right) \implies \frac{1000}{20} = \frac{20}{x} \implies x = \frac{20 \cdot 20}{1000} = 0.4$$

Per $d$ abbiamo

$$\log_{10}(7) - \log_{10}(x) : d = \log_{10}(20) - \log_{10}(x) : 150\,\text{mm}$$

$$d = \frac{\log_{10}(7) - \log_{10}(0.4)}{\log_{10}(20) - \log_{10}(0.4)} \cdot 150\,\text{mm} \approx 110\,\text{mm}$$

Un ragionamento più rapido, che però permette di rispondere solo alla prima domanda, è come segue.




Siccome lo spostamento di 15 cm che porta dal 20 centrale al 1000 all'estremo destro corrisponde ad una moltiplicazione per 50, l'identico spostamento che porta dall'estremo sinistro al centro deve corrispondere ad una moltiplicazione per lo stesso fattore. A sinistra abbiamo quindi

$$? = \frac{\text{valore centrale}}{50} = \frac{20}{50} = 0.4$$

**Esercizio 79** (p. 92)

1. Su una scala logaritmica, è segnato il numero 100 000. Alla distanza di 10 cm dal 100 000 è segnato 10 000 000. A che distanza dal 100 000 si trovano, su questa scala, i punti 1 000 000, 5 000 000 e 200 000?
2. Costruisci un grafico semi-logaritmico che rappresenti la crescita esponenziale di una popolazione costituita, al tempo 0, da 200 000 individui, e dopo 24 ore da 5 000 000 di individui. Quanti individui ci sono dopo 12 ore?
3. Se il numero iniziale di individui alla domanda 2 è stato misurato con un errore assoluto stimato in $\pm 10\,000$, e il numero finale con un errore di $\pm 250\,000$, come puoi stimare l'errore sulla risposta?

*Soluzione.*

*Soluzione della domanda 1.* Facciamo i calcoli per il 200 000, gli altri casi sono analoghi. Chiamiamo $d$ la distanza fra il punto che rappresenta 100 000 e quello del 200 000. Abbiamo la proporzione

$$d : \underbrace{\log_{10}(200\,000)}_{2\cdot 10^5} - \underbrace{\log_{10}(100\,000)}_{10^5} = 10\,\text{cm} : \underbrace{\log_{10}(10\,000\,000)}_{10^7} - \underbrace{\log_{10}(100\,000)}_{10^5}$$

dove il primo membro della proporzione vale $\log_{10}\left(\frac{2\cdot 10^5}{10^5}\right) = \log_{10}(2)$ e il secondo $\log_{10}\left(\frac{10^7}{10^5}\right) = 2$. Quindi

$$d = \frac{\log_{10}(2)\cdot 10\,\text{cm}}{2} \approx 1.5\,\text{cm}$$

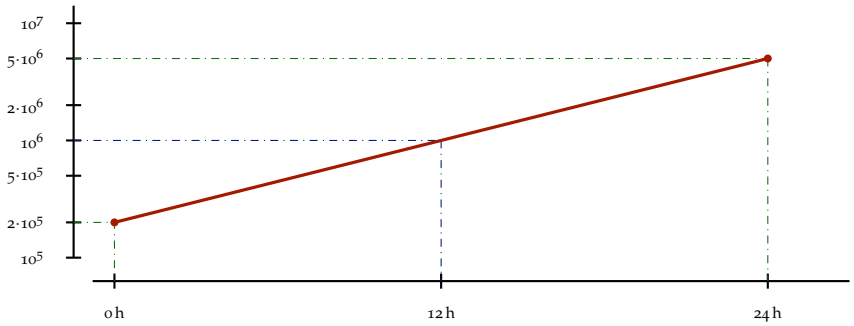
Ripetendo calcoli analoghi per gli altri dati otteniamo

| valore | distanza |
|---|---|
| 1 000 000 | $\frac{\log_{10}(10)\cdot 10\,\text{cm}}{2} = 5\,\text{cm}$ |
| 5 000 000 | $\frac{\log_{10}(50)\cdot 10\,\text{cm}}{2} \approx 8.5\,\text{cm}$ |
| 200 000 | $\frac{\log_{10}(2)\cdot 10\,\text{cm}}{2} \approx 1.5\,\text{cm}$ |

□

**Nota**
In queste situazioni sentiti libero di scrivere "ripetendo calcoli analoghi". Un esercizio di matematica non deve essere un esercizio di bella scrittura.

*Soluzione della domanda 2.* Sappiamo dalla teoria che questo grafico è una retta. Basta quindi impostare il diagramma (per esempio sfruttando la scala logaritmica della domanda 1), individuare i punti $(0, 200\,000)$ e $(24\,\text{h}, 5\,000\,000)$, quindi connetterli con un segmento di retta.




Non è difficile stimare, leggendo il grafico, che a 12 h ci sono $10^6$ individui. Per ottenere questo risultato analiticamente, determiniamo i parametri della funzione esponenziale $\text{individui} = a \cdot 10^{k \cdot \text{tempo}}$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 10^5 = a \cdot 10^{k \cdot 0\,h} & \implies \quad a = 2 \cdot 10^5 \\ 5 \cdot 10^6 = a \cdot 10^{k \cdot 24\,h} & \implies \quad 5 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{k \cdot 24\,h} \end{cases}$$

$$10^{k \cdot 24\,h} = 25 \qquad \implies \qquad k = \frac{\log_{10}(25)}{24}\,h^{-1}$$

Sostituendo ora tempo $= 12\,h$,

$$\text{individui} = 2 \cdot 10^5 \cdot 10^{\frac{\log_{10}(25)}{24}\cancel{h^{-1}} \cdot 12\cancel{h}} = 2 \cdot 10^5 \cdot 5 = 10^6$$

All'esponente resta $\frac{\log_{10}(25)}{2} = \log_{10}(\sqrt{25}) = \log_{10}(5)$, e $10^{\log_{10}(5)} = 5$. □

> **Nota**
> In una soluzione scritta per l'esame, i calcoli riportati qui in verde non sono necessari: li aggiungo per maggior chiarezza.

*Soluzione della domanda 3.* Dobbiamo risolvere la domanda 2 con $n_0 = 200\,000 \pm 10\,000$ individui al tempo 0 e $n_{24\,h} = 5\,000\,000 \pm 250\,000$ individui al tempo 24 h. Cominciamo col ricavare una formula per il valore cercato $n_{12\,h}$.

$$\begin{cases} n_0 = a \cdot 10^{k \cdot 0\,h} & \implies \quad a = n_0 \\ n_{24\,h} = a \cdot 10^{k \cdot 24\,h} & \implies \quad n_{24\,h} = n_0 \cdot 10^{k \cdot 24\,h} \quad \implies \quad k = \dfrac{\log_{10}\left(\frac{n_{24\,h}}{n_0}\right)}{24\,h} \end{cases}$$

$$n_{12\,h} = a \cdot 10^{k \cdot 12\,h} = n_0 \cdot 10^{\frac{\log_{10}\left(\frac{n_{24\,h}}{n_0}\right)}{\cancel{24\,h}} \cdot 12\cancel{h}} = n_0 \left(\frac{n_{24\,h}}{n_0}\right)^{\overbrace{0.5}^{\frac{12}{24}}} = \sqrt{n_0 n_{24\,h}}$$

Sostituendo i dati, abbiamo

$$\begin{aligned} n_{12\,h} = \sqrt{n_0 n_{24\,h}} &= \sqrt{(2.0 \pm 0.1) \cdot 10^5\ (5.0 \pm 0.25) \cdot 10^6} \\ &= \sqrt{(2.0 \pm 5\%) \cdot 10^5\ (5.0 \pm 5\%) \cdot 10^6} \\ &= \sqrt{(1 \pm 10\%) \cdot 10^{12}} = (1.00 \pm \underbrace{5\%}_{\frac{1}{2}10\%}) \cdot 10^6 \end{aligned}$$ □

**Esercizio 80** (p. 92)
La concentrazione di un farmaco nel plasma di un paziente è di $50\,\mu mol/mL$ al tempo $t_0$, e decresce esponenzialmente con un tempo di dimezzamento di 16 ore. Rappresenta l'andamento di questa concentrazione nelle 72 ore successive a $t_0$, sia per mezzo di un diagramma cartesiano, sia per mezzo di un diagramma semilogaritmico.

*Soluzione.* Misuriamo il tempo $t$ in ore a partire da $t_0$. Ogni 16 ore la concentrazione si dimezza, quindi

$$c(t) = 50\,\mu mol/mL \cdot 2^{-\frac{t}{16\,h}}$$

Alla fine del periodo, $t = 72\,h$, i dimezzamenti sono $72/16 = 4.5$, e

$$c(72\,h) = \frac{50\,\mu mol/mL}{2^{4.5}} = \frac{50}{22.63}\,\frac{\mu mol}{mL} \approx 2.21\,\frac{\mu mol}{mL}$$

Tabella dei valori, con $t$ in ore e $c$ in $\mu mol/mL$:

| t | 0 | 16 | 32 | 48 | 64 | 72 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| c | 50.0 | 25.0 | 12.5 | 6.25 | 3.13 | 2.21 |

*Diagramma cartesiano.*

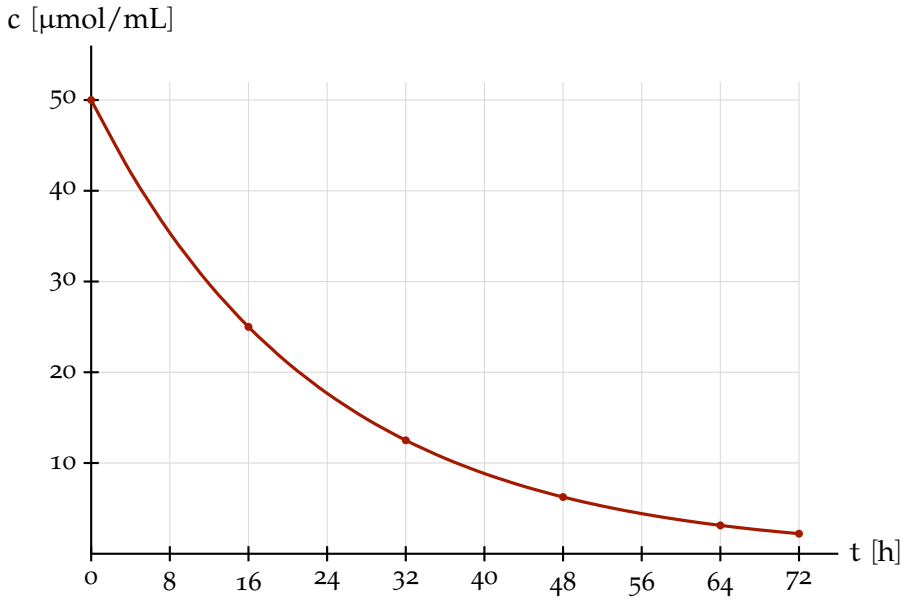
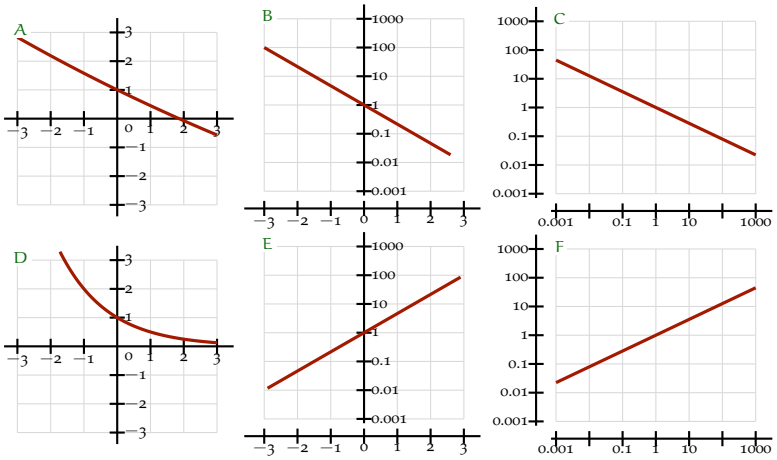


*Diagramma semilogaritmico* (ordinate in scala logaritmica). Le ordinate vanno da 2.21 a 50: bastano due decadi, da 1 a 100. La concentrazione decresce esponenzialmente, quindi il grafico è una retta: basta congiungere i punti (0, 50) e (72, 2.21). Riportiamo comunque anche i punti della tabella.




Verifica di buon senso: sulla retta la concentrazione scende di una decade, cioè di un fattore 10, in $16\,\text{h} \cdot \log_2(10) \approx 16 \cdot 3.32\,\text{h} \approx 53.2\,\text{h}$: infatti la retta parte da 50 e passa per 5 poco dopo $t = 52$. E in 72 ore, 4.5 dimezzamenti, la concentrazione si riduce di un fattore 22.6, meno di un fattore 100: il grafico scende di meno di due decadi.

**Esercizio 81** (p. 92)
Determina quali dei grafici seguenti rappresentano un decadimento esponenziale, e, per ciascuno di questi, trova il tempo di dimezzamento. In tutti i grafici le ascisse sono indicate in secondi.




*Soluzione.*

A — NO perché assume anche valori negativi.

B — sì retta su grafico semi-log → esponenziale, e decrescente.

C — NO retta su grafico log-log → potenza.

D — sì, o almeno non c'è ragione di escluderlo.

E — NO retta su grafico semi-log → esponenziale, ma crescente (non è un decadimento).

F — NO retta su grafico log-log → potenza, inoltre crescente.

Per i tempi di dimezzamento si usa la forma

$$f(t) = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{\tau}} \qquad \tau = \text{tempo di dimezzamento}$$

Per B si legge dal grafico $f(0\,s) = 1$ e $f(3\,s) = 0.01$, quindi

$$\begin{cases} f(0\,s) = 1 & \implies \quad A = 1 \\ f(3\,s) = 0.01 & \implies \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3\,s}{\tau}} = 0.01 \quad \implies \quad \tau = \dfrac{3\,s}{\log_{\frac{1}{2}}(0.01)} \approx 0.45\,s \end{cases}$$

Per D si legge dal grafico $f(-1\,s) \approx 2$, $f(0\,s) \approx 1$, $f(1\,s) \approx \frac{1}{2}$: quindi il valore di $f$ si dimezza grosso modo nel tempo di 1 s.

**Esercizio 82** (p. 93)
La concentrazione di un farmaco nel plasma di un paziente, dopo la somministrazione per via endovenosa, decresce esponenzialmente con un tempo di dimezzamento di 8.0 ore.

1. Quanto tempo occorre perché una concentrazione iniziale di 5.0 mg/L scenda a 0.10 mg/L?
2. A ogni somministrazione di una dose, la concentrazione plasmatica aumenta, molto rapidamente, di 5.0 mg/L, poi riprende a decrescere esponenzialmente. Il paziente riceve la prima dose al tempo $t = 0$, e poi una dose ogni 12.0 ore. Rappresenta con un diagramma cartesiano l'andamento della concentrazione plasmatica nelle 48 ore successive alla prima somministrazione.
3. A lungo andare, fra quali valori oscilla la concentrazione plasmatica del paziente?

*Soluzione.*

*Soluzione della domanda 1.* Ogni 8.0 ore la concentrazione si dimezza:

$$c(t) = 5.0\,\text{mg/L} \cdot 2^{-\frac{t}{8.0\,h}}$$

Imponiamo $c(t) = 0.10\,\text{mg/L}$:

$$2^{\frac{t}{8.0\,h}} = \frac{5.0}{0.10} = 50 \qquad \implies \qquad t = 8.0\,h \cdot \log_2(50) \approx 8.0\,h \cdot 5.64 \approx 45.2\,h$$

cioè circa 45 ore. (Verifica: 50 sta fra $2^5 = 32$ e $2^6 = 64$, quindi servono fra 5 e 6 dimezzamenti, cioè fra 40 e 48 ore.) □

*Soluzione della domanda 2.* Fra una dose e la successiva passano 12.0 ore, cioè 1.5 tempi di dimezzamento: in questo intervallo la concentrazione si moltiplica per

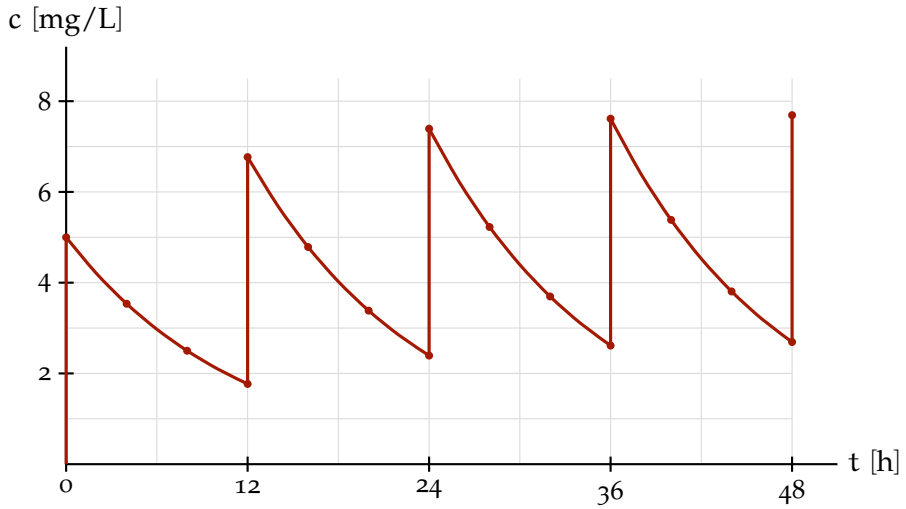
$$r = 2^{-\frac{12.0}{8.0}} = 2^{-1.5} \approx 0.354$$

Subito dopo ogni dose la concentrazione è quella appena prima, più 5.0 mg/L. Tabella dei valori, in mg/L:

| t [h] | 0 | 12 | 24 | 36 | 48 |
|---|---|---|---|---|---|
| prima della dose | 0 | 1.77 | 2.39 | 2.61 | 2.69 |
| dopo la dose | 5.00 | 6.77 | 7.39 | 7.61 | 7.69 |

(Per esempio: $5.00 \cdot 0.354 = 1.77$, poi $1.77 + 5.00 = 6.77$, poi $6.77 \cdot 0.354 \approx 2.39$, e così via. Per tracciare le curve fra una dose e l'altra conviene calcolare anche qualche valore intermedio: dopo 4 ore la concentrazione è moltiplicata per $2^{-0.5} \approx 0.707$, dopo 8 ore per 0.5.) I valori intermedi, in mg/L:

| t [h] | 4 | 8 | 16 | 20 | 28 | 32 | 40 | 44 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| c | 3.54 | 2.50 | 4.79 | 3.38 | 5.23 | 3.70 | 5.38 | 3.81 |




□

*Soluzione della domanda 3.* I valori subito dopo le dosi, 5.00, 6.77, 7.39, 7.61, 7.69, ... crescono, ma sempre di meno: si avvicinano a un valore di regime $c_{max}$. A regime, fra una dose e la successiva la concentrazione scende da $c_{max}$ a $c_{min} = r\, c_{max}$, e la dose la riporta a $c_{max}$. Abbiamo quindi l'equazione

$$c_{max} = c_{min} + 5.0\,\text{mg/L} = r\, c_{max} + 5.0\,\text{mg/L}$$

Da cui

$$c_{max} = \frac{5.0\,\mathrm{mg/L}}{1-r} = \frac{5.0\,\mathrm{mg/L}}{0.646} \approx 7.7\,\frac{\mathrm{mg}}{\mathrm{L}}$$

e $c_{min} = 0.354 \cdot 7.73\,\mathrm{mg/L} \approx 2.7\,\mathrm{mg/L}$. A lungo andare la concentrazione oscilla quindi fra 2.7 mg/L e 7.7 mg/L. □

**Esercizio 83** (p. 93)
La crescita di una popolazione di microorganismi segue la curva logistica

$$P(t) = \frac{P_0\,K\,e^{t/\tau}}{K - P_0 + P_0\,e^{t/\tau}}$$

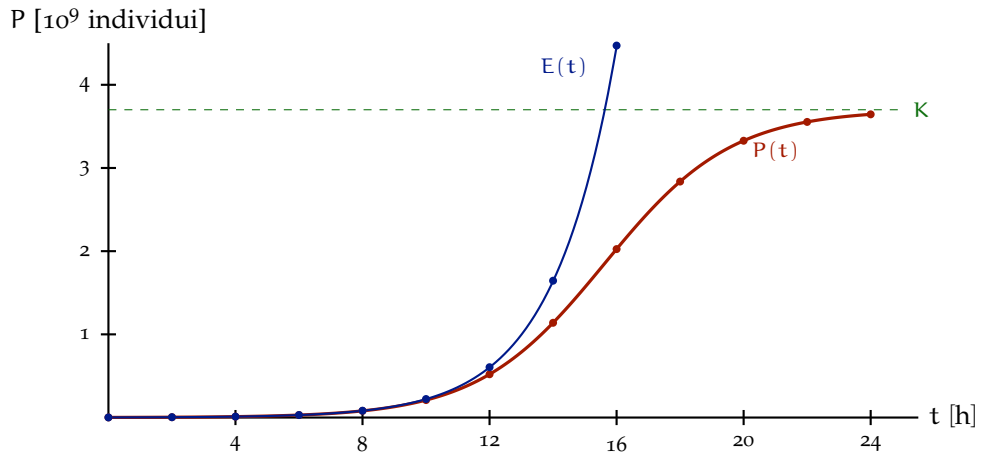
con $P_0 = 1.50 \cdot 10^6$, $K = 3.70 \cdot 10^9$ e $\tau = 2.00\,\mathrm{h}$.

1. Rappresenta l'andamento della popolazione, per tempi compresi fra 0 e 24 ore, in un diagramma cartesiano.
2. Rappresenta la medesima funzione mettendo la popolazione in scala logaritmica.
3. Nelle prime ore, la crescita è approssimativamente esponenziale: rappresenta questa funzione per mezzo di un'espressione analitica, e aggiungi il grafico dell'esponenziale ai due diagrammi precedenti.

*Soluzione.* Cominciamo con una tabella dei valori, ogni due ore. Nell'ultima colonna c'è già l'esponenziale della domanda 3, $E(t) = P_0\,e^{t/\tau}$, per confronto.

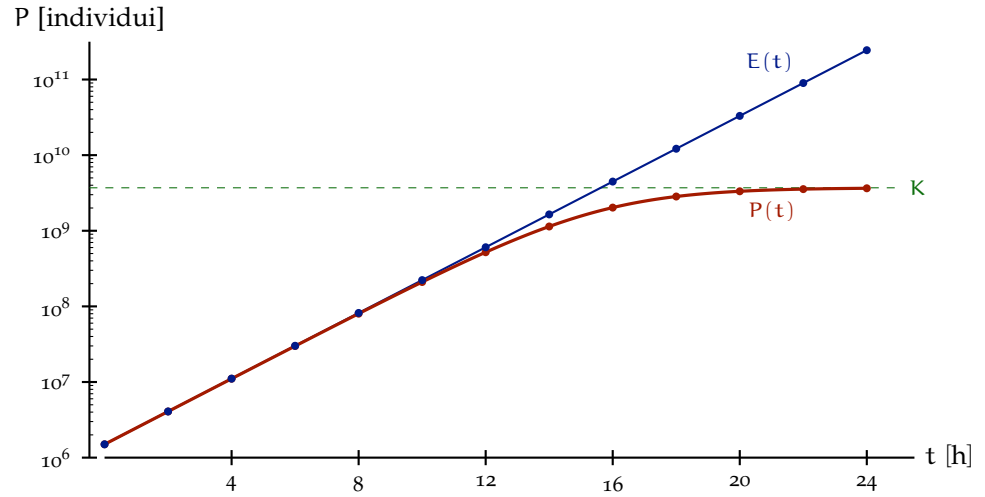
| t | P(t) | E(t) |
|---|---|---|
| 0 h | $1.50 \cdot 10^6$ | $1.50 \cdot 10^6$ |
| 2 h | $4.07 \cdot 10^6$ | $4.08 \cdot 10^6$ |
| 4 h | $1.11 \cdot 10^7$ | $1.11 \cdot 10^7$ |
| 6 h | $2.99 \cdot 10^7$ | $3.01 \cdot 10^7$ |
| 8 h | $8.02 \cdot 10^7$ | $8.19 \cdot 10^7$ |
| 10 h | $2.10 \cdot 10^8$ | $2.23 \cdot 10^8$ |
| 12 h | $5.20 \cdot 10^8$ | $6.05 \cdot 10^8$ |
| 14 h | $1.14 \cdot 10^9$ | $1.64 \cdot 10^9$ |
| 16 h | $2.03 \cdot 10^9$ | $4.47 \cdot 10^9$ |
| 18 h | $2.84 \cdot 10^9$ | $1.22 \cdot 10^{10}$ |
| 20 h | $3.33 \cdot 10^9$ | $3.30 \cdot 10^{10}$ |
| 22 h | $3.55 \cdot 10^9$ | $8.98 \cdot 10^{10}$ |
| 24 h | $3.64 \cdot 10^9$ | $2.44 \cdot 10^{11}$ |

*Soluzione della domanda 1.* In un diagramma cartesiano conviene misurare la popolazione in miliardi (unità di $10^9$). Per tempi grandi $e^{t/\tau}$ diventa enorme, il denominatore è dominato da $P_0\,e^{t/\tau}$ e $P(t)$ si avvicina a $K$: la curva ha l'asintoto orizzontale $P = K = 3.70 \cdot 10^9$ (tratteggiato). Nelle prime ore, invece, la popolazione è così piccola, rispetto alla scala del grafico, che la curva è schiacciata sull'asse delle ascisse.




(La curva blu $E(t)$ è l'esponenziale della domanda 3.) □

*Soluzione della domanda 2.*




Il grafico mostra bene le due fasi della crescita: nelle prime ore la curva è una retta (crescita esponenziale), poi piega e si appiattisce sull'asintoto K (la popolazione satura). Nel diagramma cartesiano la prima fase era invisibile. □

*Soluzione della domanda 3.* Finché $P_0\, e^{t/\tau}$ è piccolo rispetto a K, al denominatore $K - P_0 + P_0\, e^{t/\tau} \approx K$ (anche $P_0$ è trascurabile rispetto a K), e quindi

$$P(t) \approx \frac{P_0\, K\, e^{t/\tau}}{K} = P_0\, e^{t/\tau} = 1.50 \cdot 10^6 \cdot e^{\frac{t}{2.00\,\mathrm{h}}}$$

In scala logaritmica questa è una retta: passa per $1.50 \cdot 10^6$ al tempo 0 e cresce di un fattore e ogni 2 ore, cioè di un fattore 10 ogni $2\,\mathrm{h} \cdot \log_e(10) \approx 4.6\,\mathrm{h}$ (nel grafico, una decade ogni 4.6 ore). I grafici di $E(t)$ sono le curve blu nei due diagrammi: la tabella e il diagramma logaritmico mostrano che l'approssimazione è buona per le prime 8–10 ore (errore del 2% a 8 ore, del 6% a 10), e poi le due curve si separano. □