Esame del 5.VI.2019

Esercizio B

B.1 – Calcolare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2+\omega+1)^{\omega^2+\omega+1}$.

B.2 – Trovare gli ordinali x che soddisfano l'equazione $2x = x+1$.

B.3 – Trovare gli ordinali x che soddisfano l'equazione $2x+1 = x$.

B.4 – Siano $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ordinali. Dimostrare che, se l'equazione $\alpha_1 x + \beta_1 = \alpha_2 x + \beta_2$ ha più di una soluzione, allora ne ha infinite.

B.1 $(\omega^2+\omega+1)^{\omega^2+\omega+1} = (\omega^2+\omega+1)^{\omega^2} \cdot (\omega^2+\omega+1)^{\omega} \cdot (\omega^2+\omega+1)$

$= \omega^{2\omega^2} \cdot \omega^{2\omega} \cdot (\omega^2+\omega+1) = \omega^{\omega^2+\omega}(\omega^2+\omega+1)$

$= \omega^{\omega^2+\omega+2} + \omega^{\omega^2+\omega+1} + \omega^{\omega^2+\omega}$

B.2 Osserviamo intanto che se x fosse limite, allora $2x$ sarebbe limite, ma $2x = x+1$ implica che $2x$ è successore. Quindi x è successore. Poniamo $x = y+1$. L'equazione data equivale a

$$2(y+1) = (y+1)+1 \iff 2y+2 = y+2 \implies 2y = y$$

Dove la seconda equivalenza vale per l'iniettività di $\alpha \mapsto \alpha+1$. Scriviamo ora $y = \omega\cdot z + \rho$ con $\rho < \omega$, per la divisione euclidea.

$$2y = y \iff 2\cdot\omega\cdot z + 2\rho = \omega z + \rho \iff \omega z + 2\rho = \omega z + \rho \iff 2\rho = \rho$$

Dove la semplificazione è valida perché il $+$ è cancellativo a sinistra. Adesso, siccome $\rho < \omega$, $2\rho = \rho$ se e solo se $\rho = 0$. In definitiva le soluzioni sono tutti e soli gli ordinali della forma $x = \omega\cdot z + 1$.

B.3 Siccome $x \leq 2x < 2x+1$, per qualunque ordinale x, abbiano $x < 2x+1$, di conseguenza l'equazione non ha soluzioni.

B.4 Supponiamo di avere due soluzioni $x < y$, possiamo quindi scrivere $y = x + z$ con $z \neq 0$. Dimostriamo che tutti gli ordinali della forma $x_n = x + z \cdot n$ con $n \in \omega$ risolvono l'equazione. Questo risolve l'esercizio poiché, siccome $+$ e $\cdot$ sono crescenti nel secondo argomento, la funzione $n \mapsto x_n$ è crescente, quindi gli x_n differiscono tutti fra di loro.

Siccome $\alpha_1 x + \beta_1 \leq \alpha_1 (x + z) + \beta_2$, possiamo scrivere

$$y = \alpha_1 x + \beta_1 = \alpha_2 x + \beta_2 \qquad y + \delta = \alpha_1 (x + z) + \beta_1 = \alpha_2 (x + z) + \beta_2$$

Ci basta dimostrare che per $i = 1, 2$

$$\forall n \in \omega \quad \alpha_i x_n + \beta_i = y + \delta \cdot n$$

Per induzione su n. Il caso base è immediato.

Passo induttivo: osserviamo che

$$\alpha_i x + \alpha_i z + \beta_i = y + \delta = \alpha_i x + \beta_i + \delta \implies \alpha_i z + \beta_i = \beta_i + \delta$$

Per cui:

$$\alpha_i x_{n+1} + \beta_i = \alpha_i (x + z(n+1)) + \beta_i$$

$$= \alpha_i x + \alpha_i z n + \alpha_i z + \beta_i \overset{\text{per l'osservazione}}{=} \alpha_i x + \alpha_i z n + \beta_i + \delta = \alpha_i x_n + \beta_i + \delta$$

$$\overset{\text{ip. induttiva}}{=} y + \delta \cdot n + \delta = y + \delta (n+1)$$

Nota: l'idea è di estendere la sequenza delle soluzioni linearmente

$$x \qquad y = x + z \qquad x + z \cdot 2 \qquad x + z \cdot 3 \qquad \dots \qquad x + z \cdot n$$

per dimostrare che $\alpha_1 (x + z \cdot n) + \beta_1 = \alpha_2 (x + z \cdot n) + \beta_2$ conviene poi inventarsi un termine medio dell'uguaglianza, anch'esso lineare

$$\alpha_1 (x + z \cdot n) + \beta_1 = y + \delta \cdot n = \alpha_2 (x + z \cdot n) + \beta_2$$