Esame del 27-I-2020

ESERCIZIO A

Siano $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che $f \sim g$ se esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [-\epsilon, \epsilon]$. Chiamiamo germi le classi di equivalenza indotte dalla relazione $\sim$. Calcola la cardinalità degli insiemi seguenti.

A.1 – L'insieme dei germi.
A.2 – L'insieme dei germi che hanno un rappresentate continuo.
A.3 – L'insieme delle funzioni biunivoche $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
A.4 – L'insieme dei sottogruppi del gruppo delle funzioni biunivoche $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con l'operazione di composizione.

A.1 Sia G l'insieme dei germi. Dimostriamo $|G| = 2^{2^{\aleph_0}}$. Siccome $|\mathbb{R}^{\mathbb{R}}| = c^c = 2^{2^{\aleph_0}}$ e la funzione $f \mapsto [f]$ da $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ a G è surgettiva — dove $[f]$ indica la classe di equivalenza di f — abbiamo $|G| \leq 2^{2^{\aleph_0}}$. Occorre dimostrare la disuguaglianza opposta.

Esibiamo $F : \mathbb{R}^{[-1,1]} \to G$ iniettiva. Questo basta perché $|\mathbb{R}^{[-1,1]}| = c^c = 2^{2^{\aleph_0}}$. $F(f) \overset{\text{def.}}{=} [\tilde{f}]$ dove

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(\sin(\frac{1}{x})) & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Se $F(f) = F(g)$, fissiamo $\varepsilon > 0$ tale che $\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ $\tilde{f}(x) = \tilde{g}(x)$. Per ogni $a \in [-1, 1]$, usando la periodicità del seno, esiste x con $0 < x < \varepsilon$ tale che $\sin(\frac{1}{x}) = a$. Quindi $f(a) = \tilde{f}(x) = \tilde{g}(x) = g(a)$. Per l'arbitrarietà di a, abbiamo dimostrato $f = g$. Quindi F è iniettiva.

A.2 Detto C l'insieme dei germi che hanno un rappresentante continuo, dimostriamo che $|C| = 2^{\aleph_0}$. Come nella domanda A.1, $|C| \leq |\{f. \text{ continue}\}| = 2^{\aleph_0}$. D'altro canto, i germi delle

funzioni costanti sono tutti distinti fra loro, e ci sono $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$ costanti, per cui vale anche la disuguaglianza opposta.

A.3 Sia B l'insieme delle funzioni biunivoche $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Dimostriamo che $|B| = 2^{\aleph_0}$. Osservando che $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ vediamo che $|B| \leq 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. Occorre dimostrare la disuguaglianza opposta. Per questo esibiamo $F: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to B$ iniettiva.

$$F(A)(n) = \begin{cases} 2m+1 & \text{se } n = 2m \text{ con } m \in A \\ 2m & \text{se } n = 2m+1 \text{ con } m \in A \\ n & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$F(A)$ è biunivoca perché $\forall n \in \mathbb{N}\ F(A)(F(A)(n)) = n$, inoltre $\forall m \in \mathbb{N}\ \ m \in A \leftrightarrow F(A)(2m) = 2m+1$, quindi F è iniettiva.

A.4 Dimostriamo che ci sono $2^{2^{\aleph_0}}$ sottogruppi. Non possono essere di più perché, per la domanda precedente, ci sono $2^{2^{\aleph_0}}$ sottoinsiemi del gruppo delle funzioni biunivoche da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{N}$. Per ottenere la disuguaglianza opposta seguiamo questa strategia.

1. Ci sono $2^{2^{\aleph_0}}$ sottogruppi di $(\mathbb{R}, +)$
2. Grazie all'esponenziale, ci sono $2^{2^{\aleph_0}}$ sottogruppi di $(\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$
3. Troviamo un sottogruppo L delle funzioni biunivoche $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ per cui esiste un omomorfismo surgettivo $L \to (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$.
4. Osserviamo che il gruppo delle funzioni biunivoche $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è isomorfo al gruppo delle funzioni biunivoche $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Ottavi

(1) Sia B una base di $\mathbb{R}$ visto come $\mathbb{Q}$-spazio vettoriale. Osserviamo che $|B| = 2^{\aleph_0}$, poiché, per ogni $X \in \mathcal{P}^{fin}(B)$, $|Span(X)| = |X| \cdot |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, quindi

$$|\mathbb{R}| = \left|\bigcup_{X \in \mathcal{P}^{fin}(B)} Span(B)\right| \leq \sum_{X \in \mathcal{P}^{fin}(B)} |Span(B)| \leq |\mathcal{P}^{fin}(B)| \cdot \aleph_0 = |B|$$

Ci sono quindi $2^{2^{\aleph_0}}$ sottoinsiemi Y della base B, per ciascuno di questi un diverso sottospazio $Span(Y)$, che è un sottogruppo.

(2) Immediato poiché $e^{\square} : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}^{>0}, \cdot)$ è un isomorfismo.

(3) Sia $L = \{f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \mid f \text{ è biunivoca e } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}^{>0}\}$

Dimostriamo che L è un sottogruppo rispetto all'operazione di composizione e $F : L \to \mathbb{R}^{>0}$, $F(f) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ è un omomorfismo.

Basta vedere che $F(f \circ g) = F(f) \cdot F(g)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(g(x))}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(g(x))}{x} \frac{g(x)}{g(x)} = \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(g(x))}{g(x)}\right) \cdot \left(\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x}\right)$$

$$\| \qquad \| \qquad \| \qquad \|$$

$$F(f \circ g) \qquad \text{Poiché } g \in L \to \lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty \qquad F(f) \qquad F(g)$$

Dimostriamo, ora, che F è suriettiva. Dato $x \in \mathbb{R}^+$, scegliamo una successione $\{r_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di razionali positivi tendente a x. Poi costruiamo $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ lineare a tratti in modo tale che $f(q) = q$ per $q \leq 0$ e f ha pendenza r_i fra i e $i+1$. Si verifica che $F(f) = x$.

(4) Fissiamo una biiezione $\alpha : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$, la funzione che manda $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in $\alpha \circ f \circ \alpha^{-1}$ è un isomorfismo.