Esame del 27·I·2020

Esercizio B

Se α e β sono ordinali, diciamo che $\alpha \mid \beta$ se esiste un ordinale γ tale che $\alpha\gamma = \beta$.

B.1 – Calcola $(2 \cdot \omega^2 + \omega \cdot 3 + 7)^3$ in forma normale di Cantor.
B.2 – Quali ordinali α soddisfano $\alpha \mid \omega^2 + \omega \cdot 12$?
B.3 – Dimostra che, dati α e β ordinali, esiste un ordinale γ tale che $\delta \mid \alpha$ e $\delta \mid \beta$ se e solo se $\delta \mid \gamma$.
B.4 – Per quali ordinali α l'insieme $\{\beta : \beta \mid \alpha\} \cup \{0\}$ è un ordinale?

B.1 $2\cdot\omega^2 + \omega\cdot 3 + 7 = \omega^2 + \omega\cdot 3 + 7$

$$(\omega^2+\omega\cdot 3+7)^2 = (\omega^2+\omega\cdot 3+7)\omega^2 \leftarrow \omega^4$$
$$+ (\quad\text{"}\quad)\cdot\omega\cdot 3 \leftarrow \omega^3\cdot 3$$
$$+ (\quad\text{"}\quad)\cdot 7 \leftarrow \omega^2\cdot 7 + \omega\cdot 3 + 7$$
$$= \omega^4 + \omega^3\cdot 3 + \omega^2\cdot 7 + \omega\cdot 3 + 7$$

$$(\omega^2+\omega\cdot 3+7)^3 = (\omega^2+\omega\cdot 3+7)^2\cdot(\omega^2+\omega\cdot 3+7)$$
$$= (\omega^4+\omega^3\cdot 3+\omega^2\cdot 7+\omega\cdot 3+7)\cdot\omega^2 \leftarrow \omega^6$$
$$+ (\quad\text{"}\quad)\cdot\omega\cdot 3 \leftarrow \omega^5\cdot 3$$
$$+ (\quad\text{"}\quad)\cdot 7 \leftarrow \omega^4\cdot 7 + \dots$$
$$= \omega^6 + \omega^5\cdot 3 + \omega^4\cdot 7 + \omega^3\cdot 3 + \omega^2\cdot 7 + \omega\cdot 3 + 7$$

B.2 Detto $\beta = \omega^2+\omega\cdot 12$, cerchiamo α tale che $\alpha\gamma = \beta$ per qualche γ. Dimostriamo che gli α cercati sono tutti gli elementi di $\omega\setminus\{0\}$ e ω, $\omega\cdot 2$, $\omega\cdot 3$, $\omega\cdot 4$, $\omega\cdot 6$, $\omega\cdot 12$, $\omega^2+\omega\cdot 12$.

- Se $\alpha \geq \omega^2$ allora $\gamma = 1$, altrimenti $\alpha\gamma \geq \omega^2\cdot 2 > \beta$, quindi $\alpha = \beta$
- Se $\omega^2 > \alpha \geq \omega$, allora $\gamma < \omega\cdot 2$, altrimenti $\alpha\gamma \geq \omega\cdot\omega\cdot 2 > \beta$, quindi $\gamma = \omega + k$ con $k \in \omega$. Detto $\alpha = \omega\cdot x + y$ con $x, y \in \omega$ e $x \geq 1$, abbiamo

$$\alpha\gamma = (\omega\cdot x + y)(\omega + k) = \omega^2 + \omega\cdot x\cdot k + \begin{cases} y & \text{se } k > 0 \\ 0 & \text{se } k = 0 \end{cases}$$

Quindi $xk = 12$, da cui $k > 0$, e, di conseguenza $\chi = 0$.

$\beta = w(w+12) = w2(w+6) = w3(w+4) = w4(w+3) = w6(w+2) = w12(w+1)$

- Se $w > \alpha$. Allora $\alpha \neq 0$, altrimenti $\alpha\gamma = 0 \neq \beta$, e tutti gli α in $w \setminus \{0\}$ hanno la proprietà richiesta, infatti, se $\alpha \in w - \{0\}$ allora $\alpha(w^2 + w \cdot 12) = w^2 + w \cdot 12 = \beta$.

B.3 Si tratta di applicare agli ordinali il classico algoritmo di Euclide. Senza perdita di generalità, assumiamo $0 < \beta < \alpha$, se $\beta = \alpha$ o $0 = \beta < \alpha$ basta prendere $\gamma = \alpha$.

Definiamo la successione per $i \in w$

$$\alpha_0 = \alpha \qquad \alpha_1 = \beta \qquad \alpha_{i+2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha_{i+1} = 0 \\ \text{il resto di } \alpha_i \text{ diviso } \alpha_{i+1} & \text{se } \alpha_{i+1} \neq 0 \end{cases}$$

ossia $\alpha_i = \alpha_{i+1} \cdot \varepsilon + \alpha_{i+2}$ con $\alpha_{i+2} < \alpha_{i+1}$

Se gli α_i non si annullassero mai avremmo una successione infinita decrescente di ordinali, quindi esiste il minimo $k \in w$ per cui $\alpha_k = 0$. Dimostriamo che se $i+1 < k$ allora, per ogni δ

$$(*) \quad (\delta \mid \alpha_i \wedge \delta \mid \alpha_{i+1}) \longleftrightarrow (\delta \mid \alpha_{i+1} \wedge \delta \mid \alpha_{i+2})$$

Ne segue che $\delta \mid \alpha \wedge \delta \mid \beta \longleftrightarrow \delta \mid \alpha_{k-1} \wedge \delta \mid \alpha_k$, ma $\alpha_k = 0$, quindi $\delta \mid \alpha_k$ è automaticamente vera, e prendiamo $\gamma = \alpha_{k-1}$.

$(* \rightarrow)$ Siano $\alpha_i = \delta \cdot \mu$, $\alpha_{i+1} = \delta \cdot \nu$. Abbiamo $\delta \cdot \mu = \delta \cdot \nu \cdot \varepsilon + \alpha_{i+2}$

Per la monotonia del prodotto nel secondo argomento, se valesse $\mu < \nu\varepsilon$ avremmo $\delta\mu < \delta\nu\varepsilon + \alpha_{i+2}$, quindi $\nu\varepsilon \leq \mu$, e possiamo scrivere $\mu = \nu\varepsilon + \lambda$ per qualche λ.

Allora $\delta\nu\varepsilon + \delta\lambda = \delta(\nu\varepsilon + \lambda) = \delta\nu\varepsilon + \alpha_{i+2}$, da cui, per la cancellatività a sinistra della somma, $\delta\lambda = \alpha_{i+2}$.

$(\ast \leftarrow)$ Siano $\alpha_{i+1} = \delta\mu$, $\alpha_{i+2} = \delta\nu$. Allora $\alpha_i = \delta\mu\varepsilon + \delta\nu = \delta(\mu\varepsilon + \nu)$

B.4 Sia $\gamma = \{\beta : \beta | \alpha\} \cup \{0\}$. Siccome $\beta | \alpha \to \beta \leq \alpha$ e $\alpha | \alpha$, abbiamo che $\gamma \subseteq \alpha < \gamma$, quindi $\gamma = \alpha + 1$. Quindi cerchiamo per quali α vale $\forall \beta \leq \alpha \; \beta \neq 0 \to \beta | \alpha$. Dimostriamo che questo capita per la potenza di ω (con esponente ordinale) e per 2. Detto μ il minimo esponente di ω nella forma normale di α, possiamo scrivere $\alpha = \omega^\mu(\nu+1)$. Quindi $\omega^\mu\nu < \alpha$ e $\omega^\mu\nu | \alpha$. Ora, se $\omega^\mu\nu\delta = \alpha$, necessariamente $2 \leq \delta$, $\omega^\mu\nu 2 \leq \omega^\mu(\nu+1)$. Da cui deduciamo $\omega^\mu\nu + \omega^\mu\nu \leq \omega^\mu\nu + \omega^\mu \Rightarrow \omega^\mu\nu \leq \omega^\mu \Rightarrow \nu \leq 1$. Ora se $\alpha = \omega^\mu \cdot 2$ e $\mu \neq 0$, abbiamo $\omega^\mu + 1 < \alpha$, quindi $\omega^\mu + 1 | \alpha$. Ma, come prima, $\alpha \geq (\omega^\mu + 1)\cdot 2 = \omega^\mu \cdot 2 + 1 > \alpha$ $\lightning$ Gli unici casi rimanenti sono, quindi, $\alpha = \omega^\mu$ e $\alpha = 2$.

Si vede immediatamente che il secondo caso è ammissibile. Per il primo, sia $\beta < \alpha$. Allora $\beta = \omega^{\varepsilon_1}k_1 + \ldots + \omega^{\varepsilon_n}k_n$ in forma normale con $\varepsilon_1 < \mu$. Quindi esiste δ tale che $\mu = \varepsilon_1 + \delta$ da cui calcoliamo $\beta \cdot \omega^\delta = (\omega^{\varepsilon_1}\nu_1 + \ldots)\omega^\delta = \omega^{\varepsilon_1+\delta} = \omega^\mu = \alpha$, quindi $\beta | \alpha$.