Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 5·vi·2019
Soluzioni

Esercizio A

Diciamo che un insieme S di successioni di numeri naturali *cambia idea raramente* se ogni successione $a = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, non necessariamente in S, soddisfa la proprietà

$$(P(a,S)) \qquad \exists n \in \mathbb{N} \;\left|\left\{b \in S : a|_{\{0\dots n\}} = b|_{\{0\dots n\}}\right\}\right| \leqslant 1$$

Diciamo che S *almeno ci prova* se soddisfa $P(a,S)$ per ogni successione $a \in S$.

A.1 – Dimostrare che, se un insieme almeno ci prova, allora è al più numerabile.

A.2 – Dimostrare che, se un insieme cambia idea raramente, allora è bene ordinato dall'ordine lessicografico: $a \prec b$ se $a_i < b_i$ con $i \in \mathbb{N}$ minimo per cui $a_i \neq b_i$.

A.3 – Dimostrare che esiste un insieme di successioni che non cambia idea raramente, ma almeno ci prova.

A.4 – Quali ordinali sono isomorfi a qualche insieme che cambia idea raramente?

Soluzione

A.1 – Sia S un insieme di successioni che almeno ci prova. Per ogni successione $a \in S$, denotiamo con n_a il minimo numero naturale tale che

$$\left|\left\{b \in S : a|_{\{0\dots n_a\}} = b|_{\{0\dots n_a\}}\right\}\right| \leqslant 1\,.$$

La funzione che mappa a in $a|_{\{0\dots n_a\}}$ è iniettiva, perché, se $a|_{\{0\dots n_a\}} = b|_{\{0\dots n_b\}}$ per qualche $a, b \in S$ con $a \neq b$, allora in particolare $n_a = n_b$, e la cardinalità al membro di sinistra della disuguaglianza sarebbe almeno 2. Siccome l'insieme delle sequenze finite di numeri naturali è numerabile, S è al più numerabile.

A.2 – Sia S un insieme che cambia idea raramente, sia T un suo sottoinsieme non vuoto. Dobbiamo dimostrare che T ha un minimo. Costruiamo per ricorsione la successione a definita da

$$a_i = \min\left\{x \in \mathbb{N} \;:\; \exists b \in T \;\; b|_i = a|_i \;\wedge\; b_i = x\right\}$$

Dimostriamo per induzione che la definizione è ben data, ossia che, per ogni i, l'insieme $T_i = \{b \in T : b|_i = a|_i\}$ è non vuoto.
(base dell'induzione) Chiaramente $T_0 = T$.
(passo induttivo) Dire $b \in T_{i+1}$ equivale a dire $b \in T_i \wedge b_i = a_i$. Per l'ipotesi induttiva T_i non è vuoto. Per costruzione $\exists b \in T_i \; b_i = a_i$, questo è infatti un qualunque $b \in T_i$ che minimizza b_i.

Osserviamo che, se $a \in T$, allora necessariamente a è il minimo elemento di T. Supponiamo infatti che esista $b \in T$ con $b \prec a$. Sia i minimo tale che $a_i \neq b_i$,

allora $a|_i = b|_i$ per costruzione, e $b_i < a_i$ per definizione di $\prec$, contraddicendo la minimalità di a_i. Basta quindi dimostrare che $a \in T$.

Sia n tale che esiste un'unica successione $b \in T$ con $b|_n = a|_n$. Questo n esiste perché, siccome S cambia idea raramente, abbiamo un n tale che c'è al più una successione $b \in T \subseteq S$ con $b|_n = a|_n$, ma, siccome sappiamo già che $T_n \subseteq T$ è non vuoto, deve esserci anche almeno una successione $b \in T$ con $b|_n = a|_n$. Ci basta dimostrare che $a = b$. Altrimenti esiste un minimo m tale che $a_m \neq b_m$, e necessariamente $m \geqslant n$. Detta allora c una successione in T tale che $c|_{m+1} = a|_{m+1}$, la quale esiste, come prima, perché T_{m+1} non è vuoto, avremmo $c \neq b$ negando l'unicità di b.

A.3 – Consideriamo l'insieme S delle successioni $a^n = \{a^n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definite da $a^n_i = 0$ se $i < n$, e $a^n_i = 1$ altrimenti. Si vede subito che la sequenza di successioni a_n decresce al crescere di n, questo insieme non è quindi bene ordinato, e, di conseguenza, non può cambiare idea raramente. Tuttavia almeno ci prova, perché $n = \min\{i : a^n_i = 1\}$, quindi se $a^n|_{\{0\dots n\}} = a^m|_{\{0\dots n\}}$, allora, in particolare, $\min\{i : a^n_i = 1\} = \min\{i : a^m_i = 1\}$, quindi $m = n$.

A.4 – Per i punti precedenti, il tipo di ordine di un insieme che cambia idea raramente è necessariamente un ordinale numerabile. Ora vogliamo dimostrare che tutti gli ordinali numerabili si possono ottenere in questo modo. Per assurdo, sia α il minimo ordinale numerabile che non è isomorfo ad alcun insieme che cambia idea raramente. Siccome α è numerabile, si danno due casi: o α è successore, o è limite di una successione numerabile di ordinali numerabili. In ciascun caso, vogliamo costruire un insieme che cambia idea raramente avente tipo di ordine α, così giungendo ad un assurdo.

Se $\alpha = \beta + 1$, per la minimalità di α, esiste un insieme di successioni S il cui tipo di ordine è β. Definiamo l'operazione $x \frown a$ che mappa un numero naturale x, e una successione a, nella successione definita da

$$(x \frown a)_i = \begin{cases} x & \text{se } i = 0 \\ a_{i-1} & \text{se } i > 0 \end{cases}$$

Usando la notazione in modo appropriato, scriviamo $x \frown S$ per indicare l'insieme $\{x \frown a : a \in S\}$. È facile osservare che, per x fissato, $x \frown S$ cambia idea raramente. Infatti, $(x \frown a)|_{n+1} = (x \frown b)|_{n+1}$ se e solo se $a|_n = b|_n$. Si vede immediatamente che la funzione che mappa a in $x \frown a$ preserva l'ordinamento lessicografico. Quindi $0 \frown S$ cambia idea raramente ed è isomorfo ad S. Consideriamo adesso la successione costante 1, che denotiamo $\bar{1}$. È chiaro che, per ogni $a \in 0 \frown S$, vale $a \prec \bar{1}$. Quindi $(0 \frown S) \cup \{\bar{1}\}$ è isomorfo a $\beta + 1$. Inoltre è immdiato ossevare che il nuovo insieme cambia idea raramente, in quanto la successione $\bar{1}$ differisce da tutte le altre già al primo elemento.

Nel caso limite procediamo in maniera analoga. Sia $\alpha = \sup_{i\in\mathbb{N}} \alpha_i$, allora per ogni i esiste un insieme S_i che cambia idea raramente. Consideriamo il seguente insieme

$$S = \bigcup_i i \frown S_i$$

Vogliamo dimostrare che S cambia idea raramente e che il tipo di ordine di S è maggiore o uguale di ciascun α_i, questo conclude la dimostrazione perché ne segue che il tipo di ordine di S è maggiore o uguale ad α, quindi basta prendere un segmento iniziale di S isomorfo ad α. Per dimostrare che S cambia idea raramente, consideriamo una qualunque sequenza a, e consideriamo $n \geqslant 1$ tale che c'è al più una sequenza $b \in a_0 \frown S_{a_0}$ tale che $a|_{n+1} = b|_{n+1}$. Questo n esiste perchè già sappiamo che $a_0 \frown S_{a_0}$ cambia idea raramente. Sia ora b una qualunque sequenza in S tale che $a|_{n+1} = b|_{n+1}$. Necessariamente $b_0 = a_0$, ma allora $b \in S_{a_0}$, per la costruzione di S, ed esiste una sola b siffatta. Resta da dimostrare che il tipo di ordine di S è maggiore di α_i, per ogni i. Ma questo è ovvio se si considera che $i \frown S_i$, che ha tipo di ordine α_i, è un sottoinsieme di S.

Esercizio B

B.1 – Calcolare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2+\omega+1)^{\omega^2+\omega+1}$.

B.2 – Trovare gli ordinali x che soddisfano l'equazione $2x = x+1$.

B.3 – Trovare gli ordinali x che soddisfano l'equazione $2x+1 = x$.

B.4 – Siano $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ordinali. Dimostrare che, se l'equazione $\alpha_1 x + \beta_1 = \alpha_2 x + \beta_2$ ha più di una soluzione, allora ne ha infinite.

Soluzione

B.1 – Notando che

$$\omega^\omega \leqslant (\omega^2+\omega+1)^\omega \leqslant (\omega^3)^\omega = \omega^{3\omega} = \omega^\omega$$

abbiamo $(\omega^2+\omega+1)^\omega = \omega^\omega$. Quindi

$$\begin{aligned}(\omega^2+\omega+1)^{\omega^2+\omega+1} &= \left((\omega^2+\omega+1)^\omega\right)^\omega (\omega^2+\omega+1)^\omega(\omega^2+\omega+1)\\ &= \omega^{\omega^2}\omega^\omega(\omega^2+\omega+1)\\ &= \omega^{\omega^2+\omega+2} + \omega^{\omega^2+\omega+1} + \omega^{\omega^2+\omega}\end{aligned}$$

E quest'ultima espressione è in forma normale di Cantor.

B.2 – Scrivendo $x = \omega y + n$ con $n \in \omega$, otteniamo

$$2\omega y + 2n = \omega y + n + 1$$

la quale, ricordando che $2\omega = \omega$, equivale a

$$\omega y + 2n = \omega y + n + 1\ .$$

Ricordando, infine, che la somma di ordinali è cancellativa a sinistra, quest'ultima equivale a $2n = n+1$, che è soddisfatta unicamente da $n = 1$. In conclusione, risolvono l'equazione tutti gli x della forma $\omega y + 1$.

B.3 – $2x+1 \geqslant x+1 > x$, quindi l'equazione non ha soluzioni.

B.4 – Supponiamo intanto che α_1 e α_2 siano entrambi non nulli. Sia x una soluzione dell'equazione. Allora, detto κ un ordinale maggiore sia di α_1, che di α_2, vediamo che $x_\kappa = \kappa^\omega + x \geqslant \kappa$ risolve l'equazione. Infatti, per $i = 1, 2$, abbiamo $\kappa^\omega \leqslant \alpha_i\kappa^\omega \leqslant \kappa^{1+\omega} = \kappa^\omega$, quindi $\alpha_i\kappa^\omega = \kappa^\omega$. Allora

$$\begin{aligned}\alpha_1 x_\kappa + \beta_1 &= \alpha_1\kappa^\omega + \alpha_1 x + \beta_1\\ &= \kappa^\omega + \alpha_1 x + \beta_1\\ &= \kappa^\omega + \alpha_2 x + \beta_2\\ &= \alpha_2\kappa^\omega + \alpha_2 x + \beta_2 = \alpha_2 x_\kappa + \beta_2\ .\end{aligned}$$

Abbiamo dimostrato che, nel caso in cui α_1 e α_2 sono entrambi non nulli, l'equazione ha soluzioni più grandi di qualunque ordinale dato, quindi ne ha infinite.

Il caso $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ è banale, rimane quindi il caso in cui uno solo degli α_i è nullo. Possiamo allora assumere, per simmetria, che l'equazione sia

$$\alpha_1 x + \beta_1 = \beta_2$$

con $\alpha_1 \neq 0$. Dette x e x' due soluzioni, con $x < x'$, osserviamo che necessariamente $x + 1$ risolve l'equazione. Infatti

$$\beta_2 = \alpha_1 x + \beta_1 \leqslant \alpha_1(x+1) + \beta_1 \leqslant \alpha_1 x' + \beta_1 = \beta_2 \ .$$

Ora, siccome $\alpha_1 x + \beta_1 = \beta_2 = \alpha_1 x + \alpha_1 + \beta_1$, usando il fatto che la somma di ordinali è cancellativa a sinistra, otteniamo $\beta_1 = \alpha_1 + \beta_1$. Da qui si deduce facilmente per induzione che, per ogni $n \in \omega$, vale $\beta_1 = \alpha_1 n + \beta_1$. Quindi, per ogni $n \in \omega$, abbiamo

$$\alpha_1(x+n) + \beta_1 = \alpha_1 x + \alpha_1 n + \beta_1 = \alpha_1 x + \beta_1 = \beta_2$$

e tutti gli ordinali della forma $x + n$ risolvono l'equazione.

Esercizio C

Una misura σ-additiva sulle parti di un insieme S è una funzione $\mu\colon \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ a valori reali non-negativi, tale che per ogni successione $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{P}(S)$ a due a due disgiunti

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(X_i)\,.$$

Fissata una misura μ sulle parti di S, diciamo che un sottoinsieme X di S è non trascurabile se $\mu(X) > 0$.

C.1 – Dimostrare che un insieme di sottoinsiemi di S non trascurabili e a due a due disgiunti è al più numerabile.

C.2 – Una matrice di Ulam è una tabella con $\aleph_1$ righe e $\aleph_0$ colonne, le cui entrate $\{A_{i,j}\}_{\substack{i\in\omega_1\\ j\in\omega}}$ sono sottoinsiemi di ω_1 che soddisfano le seguenti proprietà.
(1) Fissato $i \in \omega_1$, l'unione $\bigcup_{j\in\omega} A_{i,j}$ ha complementare al più numerabile in ω_1.
(2) Fissato $j \in \omega$, gli insiemi $A_{i,j}$ per $i \in \omega_1$ sono a due a due disgiunti.

Per ogni $\alpha \in \omega_1$, fissiamo una enumerazione $f_\alpha\colon \omega \to \alpha$ (surgettiva). Dimostrare che gli insiemi

$$A_{i,j} = \{\alpha \in \omega_1 : f_\alpha(j) = i\}$$

formano una matrice di Ulam.

C.3 – Dimostrare che, se μ è una misura σ-additiva sulle parti di ω_1, allora esiste un sottoinsieme al più numerabile di ω_1 il cui complementare è trascurabile.

Soluzione

C.1 – Sia X un insieme di sottoinsiemi non trascurabili di S a due a due disgiunti. Siccome ogni numero reale non nullo è maggiore dell'inverso di qualche intero, abbiamo

$$X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^{>0}} X_n \qquad \text{con} \qquad X_n = \left\{A \in X : \mu(A) > \frac{1}{n}\right\}\,.$$

Quindi, ci basta dimostrare che gli insiemi X_n sono finiti. Supponiamo che, per un certo n, sia X_n contenga infiniti elementi A_i per $i \in \mathbb{N}$. Allora

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$$

che è assurdo perché, siccome $\mu(A_1) > \frac{1}{n}$, la serie al secondo membro diverge.

C.2 – (1) Basta notare che $\alpha \notin \bigcup_{j\in\omega} A_{i,j}$ se e solo se $i \notin \mathrm{Img}(f_\alpha)$, e questo accade se e solo se $\alpha \leqslant i$, quindi per una quantità al più numrabile di α, poiché $i \in \omega_1$.
(2) Supponiamo, per assurdo, che valga $\alpha \in A_{i_1,j}$ e $\alpha \in A_{i_2,j}$, per qualche α, e qualche $i_1 \neq i_2$. Allora, per definizione, $f_\alpha(j) = i_1$ e $f_\alpha(j) = i_2$, quindi $i_1 = i_2$ per transitività, che contraddice l'ipotesi $i_1 \neq i_2$.

C.3 – Per il punto C.1 e la proprietà (2), ciascuna delle colonne della matrice di Ulam costruita al punto C.2 contiene una quantità al più numerabile di insiemi non trascurabili. Siccome ci sono $\aleph_0$ colonne, l'intera matrice ha una quantità al più numerabile di entrate non trascurabili. D'altro canto, le righe sono $\aleph_1$, quindi deve esserci un i tale che sulla riga i compaiono solo entrate trascurabili. Allora, per la σ-additività di μ, l'insieme $\bigcup_{j\in\omega} A_{i,j}$, che è il complementare di un numerabile per la proprietà (1) della matrice di Ulam, è trascurabile.