Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 5·vi·2019

Questo compito consta di tre esercizi (il terzo è sul retro del foglio).

Indica il tuo nome, cognome, e numero di matricola su tutti i fogli del tuo elaborato. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.

Esercizio A

Diciamo che un insieme S di successioni di numeri naturali *cambia idea raramente* se ogni successione $a = \{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, non necessariamente in S, soddisfa la proprietà

$$(P(a,S)) \qquad \exists n \in \mathbb{N} \;\left|\; \left\{ b \in S : a|_{\{0\dots n\}} = b|_{\{0\dots n\}} \right\} \right| \leqslant 1$$

Diciamo che S *almeno ci prova* se soddisfa $P(a,S)$ per ogni successione $a \in S$.

A.1 – Dimostrare che, se un insieme almeno ci prova, allora è al più numerabile.

A.2 – Dimostrare che, se un insieme cambia idea raramente, allora è bene ordinato dall'ordine lessicografico: $a \prec b$ se $a_i < b_i$ con $i \in \mathbb{N}$ minimo per cui $a_i \neq b_i$.

A.3 – Dimostrare che esiste un insieme di successioni che non cambia idea raramente, ma almeno ci prova.

A.4 – Quali ordinali sono isomorfi a qualche insieme che cambia idea raramente?

Esercizio B

B.1 – Calcolare la forma normale di Cantor dell'ordinale $(\omega^2+\omega+1)^{\omega^2+\omega+1}$.

B.2 – Trovare gli ordinali x che soddisfano l'equazione $2x = x+1$.

B.3 – Trovare gli ordinali x che soddisfano l'equazione $2x+1 = x$.

B.4 – Siano $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ ordinali. Dimostrare che, se l'equazione $\alpha_1 x + \beta_1 = \alpha_2 x + \beta_2$ ha più di una soluzione, allora ne ha infinite.

Esercizio C

Una misura σ-additiva sulle parti di un insieme S è una funzione $\mu\colon \mathcal{P}(S) \to \mathbb{R}^{\geqslant 0}$ a valori reali non-negativi, tale che per ogni successione $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di $\mathcal{P}(S)$ a due a due disgiunti

$$\mu\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(X_i)\,.$$

Fissata una misura μ sulle parti di S, diciamo che un sottoinsieme X di S è non trascurabile se $\mu(X) > 0$.

C.1 – Dimostrare che un insieme di sottoinsiemi di S non trascurabili e a due a due disgiunti è al più numerabile.

C.2 – Una matrice di Ulam è una tabella con $\aleph_1$ righe e $\aleph_0$ colonne, le cui entrate $\{A_{i,j}\}_{\substack{i\in\omega_1\\ j\in\omega}}$ sono sottoinsiemi di ω_1 che soddisfano le seguenti proprietà.
(1) Fissato $i \in \omega_1$, l'unione $\bigcup_{j\in\omega} A_{i,j}$ ha complementare al più numerabile in ω_1.
(2) Fissato $j \in \omega$, gli insiemi $A_{i,j}$ per $i \in \omega_1$ sono a due a due disgiunti.

Per ogni $\alpha \in \omega_1$, fissiamo una enumerazione $f_\alpha\colon \omega \to \alpha$ (surgettiva). Dimostrare che gli insiemi

$$A_{i,j} = \{\alpha \in \omega_1 : f_\alpha(j) = i\}$$

formano una matrice di Ulam.

C.3 – Dimostrare che, se μ è una misura σ-additiva sulle parti di ω_1, allora esiste un sottoinsieme al più numerabile di ω_1 il cui complementare è trascurabile.