Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 3·vii·2019
Soluzioni

Esercizio A

A.1 – Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ bene ordinato dall'ordine indotto dai numeri reali. Dimostrare che S è al più numerabile.

A.2 – Calcolare la cardinalità di $\{S \subseteq \mathbb{R} \mid S \text{ è bene ordinato}\}$.

A.3 – Calcolare la cardinalità di $\{S \subseteq \mathbb{Q} \mid S \text{ è bene ordinato}\}$.

A.4 – Calcolare la cardinalità di $\{S \subseteq \mathbb{R} \mid S \text{ è isomorfo a } \mathbb{R}\}$, dove diciamo che S è isomorfo a $\mathbb{R}$ quando esiste una bigezione $f\colon \mathbb{R} \to S$ tale che $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a \leqslant b \leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.

Soluzione

A.1 – Basta mostrare che esiste una funzione iniettiva $f\colon S \to \mathbb{Q}$. Per $x \in S$ denotiamo con x^+ il minimo elemento di S maggiore di x, se x non è il massimo di S, altrimenti $x+1$. Per ogni $x \in S$ scegliamo il razionale $f(x)$ nell'intervallo (x, x^+). Siccome questi intervalli sono disgiunti, la funzione f è iniettiva come richiesto.

A.2 – Chiaramente l'insieme dato ha almeno la cardinalità del continuo, $2^{\aleph_0}$, perché contiene tutti i singoletti. D'altro canto, per il punto A.1, si tratta di un sottoinsieme dell'insieme dei sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{R}$, che ha la cardinalità del continuo. Di conseguenza la cardinalità cercata è $2^{\aleph_0}$.

A.3 – Sia S l'insieme in questione. Siccome S è un sottoinsieme dell'insieme al punto A.2, la sua cardinalità è al più $2^{\aleph_0}$. D'altro canto, l'insieme delle parti di $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di S, quindi $|S| = 2^{\aleph_0}$.

A.4 – La cardinalità cercata è $2^{\aleph_0}$. Chiaramente ci sono almeno $2^{\aleph_0}$ sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ isomorfi ad $\mathbb{R}$: basta osservare che $f_k(x) = k + e^x$ è un isomorfismo fra $\mathbb{R}$ e $(k, +\infty)$. Per dimostrare la disuguaglianza opposta, notiamo che ogni isomorfismo f fra $\mathbb{R}$ e S è, per definizione, una funzione crescente, e, siccome f determina univocamente la propria immagine S, ci basta dimostrare che esistono al più $2^{\aleph_0}$ funzioni crescenti da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$.

Detto $D(f)$ l'insieme dei punti in cui la funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è discontinua, f è univocamente determinta dalla coppia di funzioni $f_1 = f|_{D(f)}$ e $f_2 = f|_{\mathbb{Q}}$. Infatti, per ogni $x \in \mathbb{R}$, se $x \in D(f)$, allora $f(x) = f_1(x)$. Altrimenti, se $x \notin D(f)$, allora f è continua in x, e, presa una successione di razionali $\{r_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ convergente a x, abbiamo $f(x) = \lim_i f(r_i) = \lim_i f_2(r_i)$. Quindi possiamo controllare la cardinalità dell'insieme delle funzioni crescenti con

$$|\{f_1 \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{crescente}\}| \cdot |\{f_2 \mid f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \text{crescente}\}|$$

Dimostreremo che $D(f)$ è al più numerabile. Assumendo questo fatto, le due cardinalità moltiplicate sono controllate da

$$|\{g\colon A \to \mathbb{R} \mid |\mathrm{dom}(g)| \leqslant \aleph_0\}| \leqslant |\mathbb{R} \times \mathbb{R}|^{\leqslant \aleph_0} \leqslant 2^{\aleph_0}$$

e questo conclude la dimostrazione, perché $2^{\aleph_0} \cdot 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$.

Ci resta da verificare che $D(f)$ è al più numerabile. Per farlo mappiamo ogni $d \in D(f)$ in un razionale iniettivamente. Sia $d \in D(f)$, allora

$$\lim_{x \to d-} f(x) < \lim_{x \to d+} f(x)$$

basta quindi mappare ogni $d \in D(f)$ in un razionale nell'intervallo

$$I_d = (\lim_{x \to d-} f(x), \lim_{x \to d+} f(x)) \,.$$

Siccome f è crescente, gli intervalli I_d sono disgiunti, e quindi la mappa è iniettiva.

Esercizio B

B.1 – Esprimere in forma normale di Cantor l'ordinale $(\omega+1)^7$.

B.2 – Determinare il minimo cardinale κ tale che $\kappa^{\aleph_0} = \kappa + \aleph_0$.

B.3 – Dimostrare che l'equazione al punto B.2 ha infinite soluzioni che sono cardinali singolari.

B.4 – Dimostrare che l'equazione al punto B.2 ha infinite soluzioni che sono cardinali regolari.

Soluzione

B.1 – Dimostriamo per induzione su n che $(\omega+1)^n = \sum_{i=n}^{0} \omega^i$. Il caso $n=1$ è immediato. Assumendo il caso n, abbiamo

$$(\omega+1)^{n+1} = \left(\sum_{i=n}^{0} \omega^i\right)(\omega+1) = \left(\sum_{i=n}^{0} \omega^i\right)\omega + \left(\sum_{i=n}^{0} \omega^i\right) = \left(\sum_{i=n+1}^{0} \omega^i\right)$$

dove abbiamo usato

$$\omega^{n+1} \leqslant \left(\sum_{i=n}^{0} \omega^i\right)\omega \leqslant \omega^n(n+1)\omega = \omega^{n+1}$$

Quindi, in particolare

$$(\omega+1)^7 = \sum_{i=7}^{0} \omega^i = \omega^7 + \omega^6 + \omega^5 + \omega^4 + \omega^3 + \omega^2 + \omega + 1$$

B.2 – Né 0 né 1 sono sono soluzioni, perché in entrambi i casi il membro di sinistra è finito e il membro di destra infinito. Quindi $k \geqslant 2$, da cui $\kappa + \aleph_0 = \kappa^{\aleph_0} \geqslant 2^{\aleph_0}$, e, di conseguenza, $\kappa \geqslant 2^{\aleph_0}$. D'altro canto $k = 2^{\aleph_0}$ risolve l'equazione, infatti $\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0^2} = 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} + \aleph_0$. Questo quindi è il minimo.

B.3 – Ci basta dimostrare che dato un qualunque cardinale $k_0 > \aleph_1$, esiste un cardinale singolare $k > k_0$ che risolve l'equazione. Dato k_0, sia $\{k_i\}_{i\in\omega_1}$ una sequenza di cardinali tali che $k_i^{\aleph_0} < k_j$ per ogni $i < j \in \omega_1$. Sia $k = \sup_{i\in\omega_1} k_i$. Allora $\operatorname{cof}(k) = \aleph_1 < k_0 < k$, quindi k è singolare. Dobbiamo dimostrare che k risolve l'equazione. Siccome $\operatorname{cof}(k) = \aleph_1 > \aleph_0$, l'immagine di una funzione $f\colon \aleph_0 \to k$ deve essere contenuta in qualche k_i. Quindi

$$k \leqslant k^{\aleph_0} = \bigcup_{i\in\omega_1} k_i^{\aleph_0} \leqslant \bigcup_{i\in\omega_1} k_{i+1} = k$$

Per cui $k^{\aleph_0} = k = k + \aleph_0$.

B.4 – Sfruttando il punto precedente, ci basta dimostrare che per ogni cardinale k tale che $k^{\aleph_0} = k$, il cardinale k^+, che è regolare in quanto successore, soddisfa $k^{+\aleph_0} = k^+$. Questa si ottiene applicando la formula di Hausdorff

$$k^{+\aleph_0} = k^{\aleph_0}k^+ = kk^+ = k^+$$

Esercizio C

Ricordiamo che un ordine parziale $\leqslant$ su S è una relazione che soddisfa le seguenti proprietà:
1. $\forall a \in S\ a \leqslant a$
2. $\forall a, b \in S\ (a \leqslant b \wedge b \leqslant a) \to a = b$
3. $\forall a, b, c \in S\ (a \leqslant b \wedge b \leqslant c) \to a \leqslant c$

C.1 – Dimostrare che se $\leqslant$ è un ordine parziale su S, allora esiste un ordine totale $\preceq$ su S che estende $\leqslant$ (vale a dire che $\forall a, b \in S\ a \leqslant b \to a \preceq b$).

C.2 – Dimostrare che un ordine totale $(S, \leqslant)$ è un buon ordine se e solo se ogni successione $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di S ha una sottosuccessione crescente (ossia esiste $I \subset \mathbb{N}$ numerabile tale che $\forall i, j \in I\ i \leqslant j \to a_i \leqslant a_j$).

C.3 – Diciamo che un ordine parziale $(S, \leqslant)$ è buono se ogni ordine totale che lo estende è un buon ordine. Dimostrare che un ordine parziale $(S, \leqslant)$ è buono se e solo se ogni sottoinsieme non vuoto A di S ha un numero finito e non nullo di elementi minimali (ossia elementi $a \in A$ tali che $\neg\exists b \in A \setminus \{a\}\ b \leqslant a$).

C.4 – Dimostrare che un ordine parziale $(S, \leqslant)$ è buono se e solo se ogni successione $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ di elementi di S ha una sottosuccessione crescente.

Soluzione

C.1 – Consideriamo l'insieme degli ordini parziali su S che estendono l'ordine dato, ordinato per inclusione (un ordine $\leqslant_1$ è incluso in $\leqslant_2$ se $\leqslant_2$ estende $\leqslant_1$). Questo insieme verifica le ipotesi del lemma di Zorn, quindi ha elementi massimali. Sia $\preceq$ uno di questi: vogliamo dimostrare che ogni coppia di elementi $s, t \in S$ è confrontabile secondo $\preceq$. Supponiamo che s e t non siano confontabili: ci basta vedere che esiste una estensione di $\preceq$ che confronta s e t, contraddicendo la massimalità di $\preceq$. Definiamo $x \preceq^\star y$ se $x \preceq y$ o $x \preceq s$ e $t \preceq y$. Chiaramente $\preceq^\star$ confronta s e t e soddisfa la condizione 1. Se la condizione 2 fosse violata esisterebbero $a \neq b$ tali che si verifica uno dei casi seguenti:
2.1. $a \preceq b$, $b \preceq a$: impossibile perché $\preceq$ è un ordine parziale.
2.2. $a \preceq b$, $b \preceq s$, $t \preceq a$: impossibile, perché allora $t \preceq a \preceq b \preceq s$.
2.3. $a \preceq s$, $t \preceq b$, $b \preceq a$: impossibile come prima.
2.4. $a \preceq s$, $t \preceq b$, $b \preceq s$, $t \preceq a$: impossibile perché si avrebbe $t \preceq s$ per transitività, ma s e t non sono confrontabili.
Per quanto riguarda la condizione 3, se $a \preceq^\star b$ e $b \preceq^\star c$, allora siamo in una delle situazioni seguenti:
3.1. $a \preceq b$, $b \preceq c$: allora $a \preceq c$, e, di conseguenza $a \preceq^\star c$.
3.2. $a \preceq b$, $b \preceq s$, $t \preceq c$: per transitività $a \preceq s$, e, siccome $t \preceq c$, abbiamo $a \preceq^\star c$.
3.3. $a \preceq s$, $t \preceq b$, $b \preceq c$: come prima $a \preceq s$ e $t \preceq c$, quindi $a \preceq^\star c$.
3.4. $a \preceq s$, $t \preceq b$, $b \preceq s$, $t \preceq c$: se ne avrebbe $t \preceq b \preceq s$, ma s e t non sono confrontabili, questo caso è quindi assurdo.

C.2 – Supponiamo che ogni successione abbia una sottosuccessione crescente, allora S non può avere successioni decrescenti infinite, poiché queste non hanno

sottosuccessioni crescenti, e quindi è bene ordinato. Supponiamo, per il vice versa, che S sia bene ordinato. Sia $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ una successione: vogliamo costruire una sottosuccessione $\{a_{j_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ crescente. Sia j_0 tale che a_{j_0} è minimo. Poi, ricorsivamente, sia j_{i+1} tale che $a_{j_{i+1}}$ è minimo fra gli a_k con $k > j_i$. Chiaramente, per ogni i, abbiamo $a_{j_i} \leqslant a_{j_{i+1}}$ per la minimalità di a_{j_i}, quindi la successione è crescente.

C.3 – Sia $\preceq$ un ordine totale che estende $\leqslant$, dimostriamo che è un buon ordine. Sia $A \subseteq S$. Chiamiamo B l'insieme finito e non vuoto degli elementi $\leqslant$-minimali di A. Sia m il minimo secondo $\preceq$ di B (che esiste perché B è finito). Allora, m è il minimo secondo $\preceq$ di A, perché ogni elemento di A è sopra un elemento $\leqslant$-minimale, e m è $\preceq$ ogni elemento $\leqslant$-minimale. Così abbiamo dimostrato che $\preceq$ è un buon ordine.

Vice versa, supponiamo che A non abbia elementi $\leqslant$-minimali, allora, detta $\preceq$ una qualunqe estensione di $\leqslant$, l'insieme A non può neanche avere un minimo per $\preceq$ (se x fosse questo minimo, siccome x non è $\leqslant$-minimale, esiste $y < x$, ma allora $y \prec x$, assurdo). Supponiamo allora che A abbia infiniti elementi minimali. Siano m_i, al variare di $i \in \mathbb{N}$, elementi minimali di A. Estendiamo $\leqslant$ a un ordine $\preceq$ tale che $a_{i+1} \prec a_i$ (questa estensione esiste perché gli elementi minimali non sono confrontabili, quindi si può procedere come al punto 1). Chiaramente $\preceq$ non è un buon ordine perché ammette una successione decrescente infinita.

C.4 – Se $\preceq$ estende $\leqslant$, una sottosuccessione $\leqslant$-crescente, è anche $\preceq$-crescente, quindi una direzione è immediata. D'altro canto, supponendo che $\leqslant$ sia buono, data la successione $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, procedendo come al punto 2, definiamo j_0 in modo tale che a_{j_0} sia un elemento minimale di $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$, e inoltre, ci siano infiniti i con $a_i \geqslant a_{j_0}$ (quest'ultima condizione si può imporre perché gli elementi minimali sono in quantità finita, e, per ogni i, a_i sta sopra almeno uno di essi). Ricorsivamente, prendiamo per $a_{j_{i+1}}$ un elemento minimale fra gli $a_k \geqslant a_{j_i}$ con $k > j_i$, tale che per infiniti h si abbia $a_h \geqslant a_{j_{i+1}}$. Si conclude come al punto 2, osservando che $a_{j_i} \leqslant a_{j_{i+1}}$