Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 3·vii·2019

Questo compito consta di tre esercizi (il terzo è sul retro del foglio).

Indica il tuo nome, cognome, e numero di matricola su tutti i fogli del tuo elaborato. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.

Nel risolvere ogni punto di un esercizio, puoi assumere i risultati dei precedenti.



Esercizio A

A.1 – Sia $S \subseteq \mathbb{R}$ bene ordinato dall'ordine indotto dai numeri reali. Dimostrare che S è al più numerabile.

A.2 – Calcolare la cardinalità di $\{S \subseteq \mathbb{R} \mid S \text{ è bene ordinato}\}$.

A.3 – Calcolare la cardinalità di $\{S \subseteq \mathbb{Q} \mid S \text{ è bene ordinato}\}$.

A.4 – Calcolare la cardinalità di $\{S \subseteq \mathbb{R} \mid S \text{ è isomorfo a } \mathbb{R}\}$, dove diciamo che S è isomorfo a $\mathbb{R}$ quando esiste una bigezione $f\colon \mathbb{R} \to S$ tale che $\forall a, b \in \mathbb{R}\ a \leqslant b \leftrightarrow f(a) \leqslant f(b)$.

Esercizio B

B.1 – Esprimere in forma normale di Cantor l'ordinale $(\omega + 1)^7$.

B.2 – Determinare il minimo cardinale κ tale che $\kappa^{\aleph_0} = \kappa + \aleph_0$.

B.3 – Dimostrare che l'equazione al punto B.2 ha infinite soluzioni che sono cardinali singolari.

B.4 – Dimostrare che l'equazione al punto B.2 ha infinite soluzioni che sono cardinali regolari.

Esercizio C

Ricordiamo che un ordine parziale $\leqslant$ su S è una relazione che soddisfa le seguenti proprietà:
1. $\forall a \in S\ a \leqslant a$
2. $\forall a, b \in S\ (a \leqslant b \wedge b \leqslant a) \rightarrow a = b$
3. $\forall a, b, c \in S\ (a \leqslant b \wedge b \leqslant c) \rightarrow a \leqslant c$

C.1 – Dimostrare che se $\leqslant$ è un ordine parziale su S, allora esiste un ordine totale $\preceq$ su S che estende $\leqslant$ (vale a dire che $\forall a, b \in S\ a \leqslant b \rightarrow a \preceq b$).

C.2 – Dimostrare che un ordine totale $(S, \leqslant)$ è un buon ordine se e solo se ogni successione $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di elementi di S ha una sottosuccessione crescente (ossia esiste $I \subset \mathbb{N}$ numerabile tale che $\forall i, j \in I\ i \leqslant j \rightarrow a_i \leqslant a_j$).

C.3 – Diciamo che un ordine parziale $(S, \leqslant)$ è buono se ogni ordine totale che lo estende è un buon ordine. Dimostrare che un ordine parziale $(S, \leqslant)$ è buono se e solo se ogni sottoinsieme non vuoto A di S ha un numero finito e non nullo di elementi minimali (ossia elementi $a \in A$ tali che $\neg \exists b \in A \setminus \{a\}\ b \leqslant a$).

C.4 – Dimostrare che un ordine parziale $(S, \leqslant)$ è buono se e solo se ogni successione $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ di elementi di S ha una sottosuccessione crescente.