Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 24·vii·2019

Indica il tuo nome, cognome, e numero di matricola su tutti i fogli del tuo elaborato. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.

Esercizio A

Ricordiamo che un sottoinsieme X di $\mathbb{R}^n$ (rispettivamente $\mathbb{Q}^n$) si dice *convesso* se per ogni $a, b \in X$, e per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ (rispettivamente $\lambda \in \mathbb{Q}$), con $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, il punto $\lambda a + (1-\lambda)b$ appartiene a X.

Calcola la cardinalità degli insiemi seguenti.

A.1 – L'insieme degli intervalli aperti di $\mathbb{R}$.
A.2 – L'insieme dei sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}$.
A.3 – L'insieme dei sottoinsiemi convessi di $\mathbb{Q}$.
A.4 – L'insieme dei sottoinsiemi convessi di $\mathbb{R}^2$.

Esercizio B

Se α e β sono ordinali, con $\beta < \alpha$, denotiamo con $\alpha - \beta$ l'unico ordinale γ tale che $\alpha = \beta + \gamma$. Chiamiamo *coda* di α il minimo ordinale della forma $\alpha - \beta$ con $\beta < \alpha$.

Calcola la coda dei seguenti ordinali.

B.1 – ω e $\omega + 7$
B.2 – ω^3 e ω_ω
B.3 – $\omega_\omega + \omega^\omega \cdot 42$
B.4 – $\alpha \cdot \beta$ in funzione di α, β e le loro code.

Esercizio C

Sia α un cardinale, definiamo la *radice buffa* di α, denotata $\sqrt[\ddot\smile]{\alpha}$, come il minimo cardinale β tale che $\alpha^{\aleph_0} = \beta^{\aleph_0}$.

C.1 – Dimostra che, se γ è un cardinale infinito, allora $(\sqrt[\ddot\smile]{\alpha})^\gamma = \alpha^\gamma$ per ogni α.
C.2 – Calcola $\sqrt[\ddot\smile]{\aleph_1}$.
C.3 – Calcola $\sqrt[\ddot\smile]{\aleph_2}$ assumendo che l'ipotesi del continuo sia vera, e assumendo che l'ipotesi del continuo sia falsa.
C.4 – Dimostra che, per infiniti k infiniti, l'equazione $\sqrt[\ddot\smile]{\alpha} = k$ non ha soluzioni α.