Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 16·ix·2019

Indica il tuo nome, cognome, e numero di matricola su tutti i fogli del tuo elaborato.
Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.

Esercizio A

Sia X un insieme di cardinalità $\aleph_\alpha$.
Calcola la cardinalità degli insiemi seguenti.

A.1 – L'insieme delle relazioni di equivalenza su X.
A.2 – L'insieme dei buoni ordinamenti su X.
A.3 – L'insieme delle classi di isomorfismo di buoni ordinamenti su X.
A.4 – L'insieme delle operazioni associative $X \times X \to X$.

Esercizio B

Se α e β sono ordinali, definiamo la somma di Hessenberg $\alpha \oplus \beta$ come il minimo ordinale maggiore di tutti gli ordinali della forma $\alpha' \oplus \beta$ e $\alpha \oplus \beta'$ con $\alpha' < \alpha$ e $\beta' < \beta$.

B.1 – Dimostra che la somma di Hessenberg è commutativa.
B.2 – Supponendo $n \in \mathbb{N}$, calcola $\omega \oplus n$.
B.3 – Dimostra che la somma di Hessenberg è associativa.
B.4 – Calcola $(\omega + 2) \oplus (\omega + 3)$.

Esercizio C

Denotiamo con X^{fin} l'insieme delle parti finite di X. Diciamo che un insieme X è n-ciovino, per $n \in \mathbb{N}$, se esiste una funzione $f\colon X^{\text{fin}} \to X^{\text{fin}}$ con la proprietà che per ogni $A \subseteq X$ con $|A| = n$ esiste un $B \subsetneq A$ tale che $A \subseteq f(B)$.

C.1 – Dimostra che, se $|X| \leqslant \aleph_0$, allora X è 2-ciovino.
C.2 – Dimostra che, se X è 2-ciovino, allora $|X| \leqslant \aleph_0$.
C.3 – Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostra che, se $|X| \leqslant \aleph_n$, allora X è $(n+2)$-ciovino.
C.4 – Sia $n \in \mathbb{N}$. Dimostra che, se X è $(n+2)$-ciovino, allora $|X| \leqslant \aleph_n$.