Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 27·i·2020

Indica il tuo nome, cognome, e numero di matricola su tutti i fogli del tuo elaborato. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.



Esercizio A

Siano $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diciamo che $f \sim g$ se esiste $\epsilon > 0$ tale che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in [-\epsilon, \epsilon]$. Chiamiamo germi le classi di equivalenza indotte dalla relazione $\sim$. Calcola la cardinalità degli insiemi seguenti.

A.1 – L'insieme dei germi.
A.2 – L'insieme dei germi che hanno un rappresentate continuo.
A.3 – L'insieme delle funzioni biunivoche $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$.
A.4 – L'insieme dei sottogruppi del gruppo delle funzioni biunivoche $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ con l'operazione di composizione.

Esercizio B

Se α e β sono ordinali, diciamo che $\alpha \mid \beta$ se esiste un ordinale γ tale che $\alpha\gamma = \beta$.

B.1 – Calcola $(2 \cdot \omega^2 + \omega \cdot 3 + 7)^3$ in forma normale di Cantor.
B.2 – Quali ordinali α soddisfano $\alpha \mid \omega^2 + \omega \cdot 12$?
B.3 – Dimostra che, dati α e β ordinali, esiste un ordinale γ tale che $\delta \mid \alpha$ e $\delta \mid \beta$ se e solo se $\delta \mid \gamma$.
B.4 – Per quali ordinali α l'insieme $\{\beta \,:\, \beta \mid \alpha\} \cup \{0\}$ è un ordinale?

Esercizio C

Un grafo (G, E) è il dato di un insieme G e di una relazione simmetrica $E \subseteq G \times G$. Diciamo che $a \in G$ è connesso a $b \in G$ se $a = b$ oppure esistono $x_1, x_2 \dots x_n \in G$, con $x_1 = a$ e $x_n = b$, tali che (x_1, x_2), $(x_2, x_3), \dots \in E$. Il grafo (G, E) è connesso se tutti gli $a, b \in G$ sono connessi.

C.1 – Dimostra che, se (G, E) è connesso, esiste una relazione simmetrica $E' \subseteq E$, minimale per inclusione, tale che (G, E') è connesso.

Un grafo orientato (G, E) è definito come un grafo salvo che E non è necessariamente simmetrica. Il grafo orientato (G, E) è fortemente connesso se, per ogni $a, b \in G$, a è connesso a b e b è connesso ad a.

C.2 – Se il grafo orientato (G, E) è fortemente connesso, esiste necessariamente una relazione $E' \subseteq E$, minimale per inclusione, tale che (G, E') è fortemente connesso?