Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 20·II·2020

Indica il tuo nome, cognome, e numero di matricola su tutti i fogli del tuo elaborato. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.

Esercizio A

Siano X un insieme, $X^{\mathbb{N}}$ l'insieme delle successioni di elementi di X, e

$$\begin{aligned} \text{shift}\colon X^{\mathbb{N}} &\to X^{\mathbb{N}} \\ (a_i)_{i\in\mathbb{N}} &\mapsto (a_{i+1})_{i\in\mathbb{N}} \end{aligned}$$

Sia infine $\sim$ la relazione di equivalenza fra elementi di $X^{\mathbb{N}}$

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, m, n \in \mathbb{N} \ \text{shift}^m(a) = \text{shift}^n(b)$$

dove con shift^x si intende l'iterata x-esima di shift.

A.1 – Se $X = \mathbb{N}$, quali valori può assumere la cardinalità di una classe di equivalenza della relazione $\sim$?

A.2 – Se $X = \mathbb{N}$, quante sono le classi di equivalenza di $\sim$?

A.3 – Dimostra che, per ogni X infinito, esiste una funzione $\text{shift}^{0.5}\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$ tale che $\text{shift} = \text{shift}^{0.5} \circ \text{shift}^{0.5}$.

A.4 – Per quali X infiniti esistono funzioni $\text{shift}^q\colon X^{\mathbb{N}} \to X^{\mathbb{N}}$, per ogni razionale positivo q, tali che $\text{shift} = \text{shift}^1$ e $\text{shift}^a \circ \text{shift}^b = \text{shift}^{a+b}$ per ogni a, b?

Esercizio B

Nella soluzione di questo esercizio non puoi assumere l'assioma di scelta.

B.1 – Dimostra che, se esiste un buon ordinamento sull'insieme X, allora esiste un ordinamento totale sull'insieme delle parti di X.

B.2 – Dimostra che, per ogni insieme X, è ben definito l'ordinale $\Gamma(X)$ i cui elementi sono gli ordinali che possono essere messi in bigezione con un sottoinsieme di X.

B.3 – Dimostra l'assioma della scelta supponendo che, per ogni insieme X, l'esistenza di un buon ordinamento su X implichi l'esistenza di un buon ordinamento sull'insieme delle parti di X.
Suggerimento: costruisci, per ricorsione transfinita, una sequenza di buoni ordinamenti compatibili sui V_β con $\beta \leqslant \alpha$, sfruttando un singolo buon ordinamento su $\mathcal{P}(\Gamma(V_\alpha))$.

Esercizio C

Determina condizioni necessarie e sufficienti sugli ordinali α e β affiché:

C.1 – $\alpha + \beta$ sia un ordinale limite,

C.2 – $\alpha \cdot \beta$ sia un ordinale limite,

C.3 – α^β sia un ordinale limite.