# Prova scritta del 3.VI.2021 — Soluzioni

## Esercizio A

1. Calcola $\sup\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid (\omega+6)\cdot\alpha < \omega^2\cdot 3+\omega\cdot 8\}$.
2. Una scrittura in base $\beta \in \mathrm{Ord}$ di $\alpha \in \mathrm{Ord}$ è una somma finita
$$\alpha = \beta^{\gamma_1}\cdot\delta_1 + \cdots + \beta^{\gamma_n}\cdot\delta_n$$
con $\gamma_1 > \cdots > \gamma_n$ e $\delta_1 \ldots \delta_n < \beta$. Per esempio, la forma normale di Cantor è una scrittura in base $\omega$. Scrivi $\omega^2\cdot 3+\omega+9$ in base $\omega+5$.
3. Dimostra che, per ogni ordinale $\alpha > 0$, vale $\omega^{\omega_\alpha} = \omega_\alpha$.
4. Calcola la forma normale di Cantor di $(\omega_3+\omega\cdot 4)^{\omega_5+9}$.

1 Il sup è $\omega\cdot 3+7$

Dim. Sia $S$ l'insieme nel testo. Basta dimostrare che, per $\alpha$ ordinale, $\alpha \in S \iff \alpha \le \omega\cdot 3+7$

$\alpha \le \omega\cdot 3+7 \to (\omega+6)\cdot\alpha \le (\omega+6)(\omega\cdot 3+7) = \omega^2\cdot 3+\omega\cdot 7+6 < \omega^2\cdot 3+\omega\cdot 8$

$\alpha > \omega\cdot 3+7 \to \alpha \ge \omega\cdot 3+8 \to (\omega+6)\cdot\alpha \ge (\omega+6)(\omega\cdot 3+8)$

$= \omega^2\cdot 3+\omega\cdot 8+6 > \omega^2\cdot 3+\omega\cdot 8$ ☒

2 La scrittura cercata è $(\omega+5)^2\cdot 2+(\omega+5)(\omega+1)+4$

Dim.
$$(\omega+5)^2\cdot 2+(\omega+5)(\omega+1)+4$$
$$= (\omega^2+\omega\cdot 5+5)\cdot 2+(\omega^2+\omega+1)+4$$
$$= \omega^2\cdot 2+\omega\cdot 5+5+\omega^2+\omega+5+4$$
$$= \omega^2\cdot 3+\omega+9$$ ☒

3. Per la monotonia di $x \mapsto \omega^x$ vale $\omega_\alpha \le \omega^{\omega_\alpha}$, occorre dimostrare che $\omega^{\omega_\alpha} \le \omega_\alpha$. Per definizione
$$\omega^{\omega_\alpha} = \sup\{\omega^\beta \mid \beta < \omega_\alpha\} = \sup\{\omega^\beta \mid |\beta| < \aleph_\alpha\}$$
Basta quindi dimostrare che $|\beta| < \aleph_\alpha \to |\omega^\beta| < \aleph_\alpha$.
Sappiamo che $\omega^\beta$ è isomorfo a $S_\beta \overset{\text{def.}}{=} \{f : \beta \to \omega \mid |\mathrm{Supp} f| < \aleph_0\}$ con un opportuno ordinamento.

Ad ogni $f \in S_n$ associamo $f_{|\mathrm{supp}\, f} \in \mathcal{O}^{fin}(n \times w)$.

Questa corrispondenza è iniettiva, quindi

$$|w^n| = |S_n| \leq |\mathcal{O}_{fin}(n \times w)| = |n| \cdot \aleph_0 < \aleph_2$$

**4** $\quad (w_3 + w \cdot 4)^{w_5 + 9} = w^{w_5 + w_3 \cdot 9} + w^{w_5 + w_3 \cdot 8 + 1} \cdot 4$

*Dim*

$$(w_3 + w \cdot 4)^{w_5 + 9} = (w_3 + w \cdot 4)^{w_5} \cdot (w_3 + w \cdot 4)^9$$

- $(w_3 + w \cdot 4)^{w_5} = w^{w_5}$

  infatti

  $$w^{w_5} = w^{w^{w_5}} = w^{w^{w_3 + w_5}} = w^{w_3 \cdot w_5} = w_3^{w_5} \leq (w_3 + w \cdot 4)^{w_5}$$

  e, allo stesso modo

  $$w^{w_5} = w_4^{w_5} \geq (w_3 + w \cdot 4)^{w_5}$$

- $(w_3 + w \cdot 4)^9 = w^{w_3 \cdot 9} + w^{w_3 \cdot 8 + 1} \cdot 4$

  Basta dimostrare per induzione su $n \in w$ che

  $$(w_3 + w \cdot 4)^{n+1} = w^{w_3 \cdot (n+1)} + w^{w_3 \cdot n + 1} \cdot 4$$

  - Passo base $(n = 0)$: immediato
  - Passo induttivo

  $$\begin{aligned}(w_3 + w \cdot 4)^{n+2} &= (w_3 + w \cdot 4)^{n+1} \cdot (w_3 + w \cdot 4) \\ &= (w^{w_3(n+1)} + w^{w_3 \cdot n + 1} \cdot 4) \cdot (w^{w_3} + w \cdot 4) \\ &= w^{w_3(n+2)} + w^{w_3(n+1)+1} \cdot 4\end{aligned}$$

Quindi

$$(w_3 + w \cdot 4)^{w_5 + 9} = w^{w_5} \cdot (w^{w_3 \cdot 9} + w^{w_3 \cdot 8 + 1} \cdot 4) = w^{w_5 + w_3 \cdot 9} + w^{w_5 + w_3 \cdot 8 + 1} \cdot 4$$

## Esercizio B

Diciamo che l'insieme ordinato $(S, <)$ *si immerge* in $(T, <)$ se esiste un morfismo di ordini iniettivo $S \to T$, e chiamiamo *immersione* un tale morfismo.

1. Trova un'immersione esplicita di $\omega^2$ in $(\mathbb{Q}, <)$, e una di $\omega^3$ in $(\mathbb{Q}, <)$.
2. Quali ordinali si immergono in $(\mathbb{Q}, <)$?
3. Sia $S$ non vuoto tale che $(S, <) \sim (S, <) \times \omega_1$, dove, nell'ordine lessicografico sul prodotto, domina la seconda componente, e, a parità, conta la prima. Dimostra che ogni ordinale $\alpha < \omega_2$ si immerge in $S$.
4. Qual'è la minima cardinalità possibile di un insieme ordinato in cui si immergono tutti gli ordinali minori di $\omega_2$?

1 Osserviamo intanto che $\mathbb{Q}^{\geq 0}$ si immerge in $[0,1[ \cap \mathbb{Q}$ mediante la funzione $f : x \mapsto 1 - \frac{1}{1+x}$. Sfruttiamo questa e l'immersione naturale $\omega \to \mathbb{Q}^{\geq 0}$ per costruire una famiglia di immersioni $g_n : \omega^n \to \mathbb{Q}^{\geq 0}$.

$$g_1(a) = a \qquad g_{n+1}(a_1, \dots a_{n+1}) = a_{n+1} + f \circ g_n(a_1 \dots a_n)$$

Per dimostrare induttivamente che tutte le $g_n$ sono immersioni basta osservare che la parte intera di $g_{n+1}(a_1, \dots a_{n+1})$ è $a_{n+1}$ mentre la parte frazionaria è $f \circ g_n(a_1, \dots a_n)$. Quindi

$$g_{n+1}(a_1, \dots a_{n+1}) > g_{n+1}(a'_1 \dots a'_{n+1}) \iff$$

$$p.int > p.int' \vee (p.int. = p.int' \wedge p.frac. > p.frac') \iff$$

$$a_{n+1} > a'_{n+1} \vee (a_{n+1} = a'_{n+1} \wedge f \circ g(a_1, \dots a_n) > f \circ g(a'_1 \dots a'_n)) \iff$$

$$a_{n+1} > a'_{n+1} \vee (a_{n+1} = a'_{n+1} \wedge (a_1, \dots a_n) >_{\omega^n} (a'_1 \dots a'_n))$$

Abbiamo quindi trovato le seguenti immersioni:

$$g_2 : \omega \times \omega \to \mathbb{Q} \qquad (b, a) \mapsto a + 1 - \frac{1}{1+b}$$

$$g_3 : \omega \times \omega \times \omega \to \mathbb{Q} \qquad (c, b, a) \mapsto a + 1 - \frac{1}{2 + b - \frac{1}{1+c}}$$

2 Dimostriamo che $\alpha \in Ord$ si immerge in $\mathbb{Q}$ se e solo se $\alpha$ è al più numerabile.

Intanto, se $|\alpha| > \aleph_0$, allora non ci sono funzioni iniettive $\alpha \to \mathbb{Q}$ poiché $|\mathbb{Q}| = \aleph_0$, quindi $\alpha$ non si immerge in $\mathbb{R}$. Fissiamo ora $\alpha$ al più numerabile. Se $\alpha = 0$ allora si immerge banalmente in $\mathbb{R}$. Altrimenti l'ordine totale $(\mathbb{R}, <) \times \alpha$ è denso e senza estremi, esiste quindi un isomorfismo $f : (\mathbb{R}, <) \times \alpha \to (\mathbb{R}, <)$. La funzione

$$\alpha \to (\mathbb{R}, <) \qquad x \longmapsto f(0, x)$$

è un'immersione di $\alpha$ in $\mathbb{R}$. ∎

3. Procediamo per induzione transfinita.

- $\alpha = 0$ si immerge banalmente in $(S, <)$
- Caso successore. Se $f : \alpha \to (S, <)$ è un'immersione di $\alpha$ in $(S, <)$, allora $g : \alpha + 1 \to (S, <) \times \omega$, definita da

$$g(x) = \begin{cases} (f(x), 0) & \text{se } x \in \alpha \\ (s_0, 1) & \text{se } x = \alpha \end{cases}$$

dove $s_0$ è un qualunque elemento di $S$, è un'immersione. Siccome $(S, <) \times \omega \simeq (S, <)$ concludiamo che $\alpha + 1$ si immerge in $(S, <)$.

- Caso limite. Sia $\lambda < \omega_2$ limite. Costruiamo un insieme ordinato $(T, <)$ con le seguenti proprietà
  ① $(T, <)$ è isomorfo ad un ordinale $\geq \lambda$
  ② $(T, <)$ si immerge in $(S, <)$

Questo basta per concludere.

Siccome $|\lambda| \leq \aleph_1$, esiste una funzione $f : \omega_1 \to \lambda$ surgettiva, e, siccome $\lambda$ è limite $\lambda = \sup \{ f(\alpha) \mid \alpha \in \omega_1 \}$. Definiamo:

$$T = \{ (\beta, \alpha) \mid \beta \in f(\alpha) \wedge \alpha \in \omega_1 \} \subseteq \lambda \times \omega_1$$

che è ben ordinato dal buon ordine di $\lambda \times \omega_1$.

(1) Per ogni $\gamma < \lambda$, esiste $\alpha \in \omega_1$ tale che $\gamma = f(\alpha)$, quindi la funzione $x \mapsto (x, \alpha)$ è crescente $\gamma \to T$. Ne segue che l'ordinale di $T$ è $>$ di ogni $\gamma < \lambda$, quindi $\geq \lambda$.

(2) Per ipotesi induttiva, per ogni $\alpha \in \omega_1$, esiste un'immersione $g_\alpha : f(\alpha) \to S$ di $f(\alpha)$ in $(S, <)$. Allora

$$g : T \to S \times \omega_1, \qquad (\beta, \alpha) \mapsto (g_\alpha(\beta), \alpha)$$

è un'immersione di $(T, <)$ in $(S, <) \times \omega_1 \sim (S, <)$.

4. Siccome $\omega_1 < \omega_2$, la cardinalità non può essere $< \aleph_1$. Troviamo un insieme ordinato $(S, <)$ che soddisfa le ipotesi del punto precedente con $|S| = \aleph_1$. La cardinalità cercata è quindi $\aleph_1$. Sia

$$S = \{ f : \omega \to \omega_1 \mid |\mathrm{Supp}(f)| < \aleph_0 \}$$

per $f, g \in S$ $\quad f < g \iff \exists n \in \omega \left( f(n) < g(n) \wedge \forall m < n \; f(m) = g(m) \right)$

ossia, detto $n$ il minimo per cui $f(n) = g(n)$, allora $f(n) < g(n)$.

Allora il seguente è un isomorfismo fra $(S, <)$ e $(S, <) \times \omega$

$$f \longmapsto \left( \underbrace{n \mapsto f(n+1)}_{\text{la funzione } \tilde{f} \text{ definita da } \tilde{f}(n) = f(n+1)}, \; f(0) \right)$$

Inoltre $|S| = \aleph_1$, poiché la seguente è iniettiva

$$S \longrightarrow \mathcal{P}^{fin}(\omega \times \omega_1)$$
$$f \longmapsto f_{|supp(f)}$$

e $|\mathcal{P}^{fin}(\omega \times \omega_1)| = |\omega \times \omega_1| = \aleph_0 \cdot \aleph_1 = \aleph_1$ ☐

Esercizio C

1. Che cardinalità può avere un insieme di palle aperte e disgiunte in $\mathbb{R}^2$?
2. Che cardinalità può avere un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$ tale che ogni punto $p \in S$ è isolato, ossia esiste una palla aperta di centro p che non contiene altri punti di S? E se, invece, richiediamo soltanto che per ogni $p \in S$ esista una palla aperta, di centro p, che interseca S in un insieme al più numerabile?
3. Un otto è un insieme di punti in $\mathbb{R}^2$ che formano due circonferenze tangenti esternamente. Che cardinalità può avere un insieme di otto disgiunti in $\mathbb{R}^2$?
4. Sia S un'intersezione numerabile di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$. Dimostra che se $\aleph_0 < |S|$ allora $|S| = 2^{\aleph_0}$.

1 Ogni cardinalità $\leq \aleph_0$.

Infatti è facile costruire insiemi di ciascuna di queste cardinalità: si prendono, per esempio, palle di raggio $\frac{1}{3}$ e centro $(n, 0)$ con $n$ intero. D'altro canto, ogni palla aperta contiene un punto a coordinate razionali. Quindi, dato $S$ insieme di palle aperte e disgiunte di $\mathbb{R}^2$, possiamo considerare una funzione di scelta $S \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ che manda ogni $B \in S$ in un suo punto razionale, questa è automaticamente iniettiva poiché le palle di $S$ sono disgiunte, per cui $|S| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$. ☐

2 La risposta ad entrambe le domande è: ogni cardinalità $\leq \aleph_0$.

È facile esibire insiemi di cardinalità finita e numerabile

che soddisfano la richiesta della prima domanda, quindi, a fortiori, anche della seconda: basta, per esempio, usare punti del tipo $(n, 0)$ con $n$ intero.

Per la direzione opposta, ci basta dimostrare che un insieme che soddisfa l'ipotesi della seconda domanda è al più numerabile.

Indichiamo con $B_\rho(x,y)$ la palla di raggio $\rho$ e centro $(x,y)$.

Sia $$T = \{ (\rho, x, y) \in \mathbb{Q}^{>0} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid |B_\rho(x,y) \cap S| \leq \aleph_0 \}$$

Siccome $T \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$, abbiamo $|T| \leq \aleph_0$, quindi detto

$$S' = \bigcup \{ B_\rho(x,y) \cap S \mid (\rho, x, y) \in T \}$$

abbiamo $|S'| \leq \aleph_0$ in quanto $S'$ è unione al più numerabile di insiemi al più numerabili.

Ci basta quindi dimostrare $S' = S$, ossia che ogni punto $p \in S$ è contenuto in una palla $B_\rho(x,y)$ di centro e raggio razionali tale che $|B_\rho(x,y) \cap S| \leq \aleph_0$. Sappiamo che $p$ è contenuto in una palla $B_r(p)$ tale che $|B_r(p) \cap S| \leq \aleph_0$. Prendiamo $(x,y)$ a distanza $< \frac{1}{3} r$ da $p$ e $\frac{1}{3} r < \rho < \frac{2}{3} r$, in questo modo $p \in B_\rho(x,y)$ e $B_\rho(x,y) \subseteq B_r(p)$. □

-3- Ogni cardinalità $\leq \aleph_0$

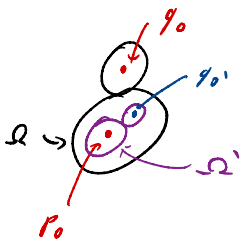
Come alle domande precedenti, è facile costruire insiemi finiti e numerabili di otto disgiunti.

Sia $S$ un insieme di otto disgiunti. Dimostriamo che $|S| \leq \aleph_0$.

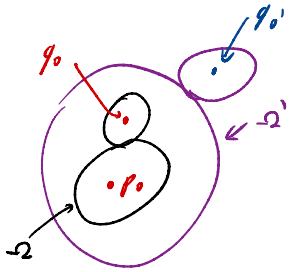
A ciascun otto di $S$ associamo una coppia di punti a coordinate



razionali, uno in ciascuno dei cerchi delimitati dalle due circonferenze dell'otto. Vediamo che questa funzione $S \to \mathbb{Q}^4$ è iniettiva. Supponiamo che ad un certo otto $O$ siano associati $p_0, q_0 \in \mathbb{Q}^2$. Sia $\Omega$ la circonferenza di $O$ in cui si trova $p_0$. Consideriamo un altro otto $O'$ e supponiamo che $p_{0'} = p_0$. Sia $\Omega'$ la circonferenza di $O'$ in cui si trova $p_{0'}$ $(= p_0)$. Allora si possono dare due casi:




- Se $\Omega'$ è contenuta nel cerchio delimitato da $\Omega$, allora tutto $O'$ è in questo cerchio, quindi anche $q_{0'}$, che quindi non può coincidere con $q_0$.




- Se $\Omega$ è nel cerchio delimitato da $\Omega'$ si realizza la situazione simmetrica e tutto $O$ è in $\Omega'$, per cui di nuovo $q_0 \neq q_{0'}$ ☐

_4_ Sia $S = \bigcap \{O_i \mid i \in \omega\}$, con $|S| > \aleph_0$. Il nostro scopo è trovare una mappa

$$f : \bigcup \{\{0,1\}^n \mid n \in \omega\} \to \{]a,b[ \mid a,b \in \mathbb{R}\}$$

sequenza finita di bit → intervalli aperti

avente le seguenti proprietà

① $\forall\, ]a,b[ \in \mathrm{Im}(f) \quad |]a,b[ \cap S| > \aleph_0$

② $\forall n \in \omega \; \forall \sigma \in \{0,1\}^{n+1} \; f(\sigma) \subseteq O_n$

③ $\forall n \in \omega \; \forall \sigma, \tau \in \{0,1\}^n \quad \sigma \neq \tau \to f(\sigma) \cap f(\tau) = \emptyset$.

(4) $\forall n \in \omega \; \forall \sigma \in \{0,1\}^{n+1} \; \overline{f(\sigma)} \in f(\sigma|_n)$ dove $\overline{]a,b[} \stackrel{def.}{=} [a,b]$.

Fatto questo, è facile definire una funzione iniettiva

$$g : \{0,1\}^\omega \longrightarrow S$$
$$\sigma \longmapsto g(\sigma) \in \bigcap \{ f(\sigma|_n) \mid n \in \omega \} \neq \emptyset$$

per cui $|S| \geq |\{0,1\}^\omega| = 2^{\aleph_0}$.

Costruiamo $f(\sigma)$ per ricorsione sulla lunghezza $n$ di $\sigma \in \{0,1\}^n$.

- Per $n=0$, dobbiamo definire $f(\emptyset)$ rispettando la condizione $|f(\emptyset) \cap S| > \aleph_0$. Siccome $S = \bigcup \{ S \cap ]-k,k[ \mid k \in \omega \}$, ci deve essere $k \in \omega$ tale che $|]-k,k[ \cap S| > \aleph_0$. Poniamo quindi $f(\emptyset) = ]-k,k[$.
- Supponiamo, ora, di avere $\sigma : n+1 \to \{0,1\}$ e definiamo $f(\sigma)$. Sia $]a,b[ = f(\sigma|_n)$, per cui possiamo assumere che $|]a,b[ \cap S| > \aleph_0$. Consideriamo l'aperto $O = ]a,b[ \cap O_n$. Siccome $S \subseteq O_n$, abbiamo $|O \cap S| > \aleph_0$. Ora, un aperto è unione numerabile di intervalli aperti — basta prendere gli intervalli aventi estremi razionali in esso contenuti — per cui esiste $]a',b'[ \subseteq O$ con $|]a',b'[ \cap S| > \aleph_0$.

Dimostriamo che c'è un $c$ con $a' < c < b'$ tale che $|]a',c[ \cap S|$ e $|]c,b'[ \cap S|$ sono entrambe $> \aleph_0$. Se così non fosse, per ogni $c \in ]a,b[$ avremmo che una delle cardinalità è $\leq \aleph_0$.

Siano $L = \bigcup \{ ]a',c[ \cap S \mid c \in \mathbb{Q} \wedge |]a',c[ \cap S| \leq \aleph_0 \}$

$R = \bigcup \{ ]c,b'[ \cap S \mid c \in \mathbb{Q} \wedge |]c,b'[ \cap S| \leq \aleph_0 \}$

$L$ ed $R$ sono unioni numerabili di insiemi numerabili, quindi $|L \cup R| \leq \aleph_0$. Ne segue che esistono $x, y \in S \cap ]a', b'[$ con $x < y$ e $x, y \notin L \cup R$. Sia $z \in ]x, y[ \cap \mathbb{Q}$. Per ipotesi assurda o $|]a', z[ \cap S| \leq \aleph_0$, ma in questo caso avremmo $x \in L$ ~~~ o $|]z, b'[ \cap S| \leq \aleph_0$, ma in questo caso avremmo $y \in R$ ~~~. Abbiamo quindi ottenuto due intervalli $]a', c[$ e $]c, b'[$ disgiunti che sono entrambi sottoinsiemi di $O_n$ e tali che $|]a', c[ \cap S| > \aleph_0$ e $|]c, b'[ \cap S| > \aleph_0$.

Se quindi ponessimo

$$f(\sigma) = \begin{cases} ]a', c[ & \text{se } \sigma(n) = 0 \\ ]c, b'[ & \text{se } \sigma(n) = 1 \end{cases}$$

le condizioni ①, ②, ③ sarebbero soddisfatte, dobbiamo però assicurarci anche di ④.

Per questo ci basta osservare che, se $|]x, y[ \cap S| > \aleph_0$, allora esistono $x', y' \in ]x, y[$ tali che $|]x', y'[ \cap S| > \aleph_0$, infatti $]x, y[$ è l'unione numerabile di $]x + \frac{1}{n}, y - \frac{1}{n}[$ per $n$ intero positivo. Quindi possiamo rimpiazzare gli intervalli $]a', c[$ e $]c, b'[$ con opportuni $]a'', c''[$ e $]c'', b''[$ tali che $[a'', c''] \subseteq ]a', c[$ e $[c'', b''] \subseteq ]c, b'[$. ∎

## Nota riguardo alla valutazione del compito

Ciascuna delle 12 domande A1, A2, ..., C4 contribuisce in maniera uguale al punteggio. Per prendere 18 occorrono $4\frac{1}{2}$ domande risolte: per esempio A1, 2, B1, C1 ed il caso dei

punti isolati in c2. Il 30 si prende con 8 domande, per esempio tutto A, B1,2 e C1,2. Le risposte ad una domanda che assumono il risultato di una domanda precedente, per esempio A4 dando per buono A3 o B4 dando per buono B3, sono considerate corrette.