Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Prova scritta di ETI del 3·vi·2021

Il tuo elaborato manoscritto deve essere inviato al docente, sotto forma di scansioni o foto digitali, entro il tempo consentito. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti, più 30 minuti addizionali, unicamente per la scansione e l'invio dell'elaborato.

Esercizio A

1. Calcola $\sup\{\alpha \in \mathrm{Ord} \mid (\omega+6)\cdot\alpha < \omega^2\cdot 3 + \omega\cdot 8\}$.
2. Una scrittura in base $\beta \in \mathrm{Ord}$ di $\alpha \in \mathrm{Ord}$ è una somma finita
$$\alpha = \beta^{\gamma_1}\cdot\delta_1 + \cdots + \beta^{\gamma_n}\cdot\delta_n$$
con $\gamma_1 > \cdots > \gamma_n$ e $\delta_1 \ldots \delta_n < \beta$. Per esempio, la forma normale di Cantor è una scrittura in base ω. Scrivi $\omega^2\cdot 3 + \omega + 9$ in base $\omega + 5$.
3. Dimostra che, per ogni ordinale $\alpha > 0$, vale $\omega^{\omega_\alpha} = \omega_\alpha$.
4. Calcola la forma normale di Cantor di $(\omega_3 + \omega\cdot 4)^{\omega_5+9}$.

Esercizio B

Diciamo che l'insieme ordinato $(S,<)$ *si immerge* in $(T,<)$ se esiste un morfismo di ordini iniettivo $S \to T$, e chiamiamo *immersione* un tale morfismo.

1. Trova un'immersione esplicita di ω^2 in $(\mathbb{Q},<)$, e una di ω^3 in $(\mathbb{Q},<)$.
2. Quali ordinali si immergono in $(\mathbb{Q},<)$?
3. Sia S non vuoto tale che $(S,<) \sim (S,<)\times\omega_1$, dove, nell'ordine lessicografico sul prodotto, domina la seconda componente, e, a parità, conta la prima. Dimostra che ogni ordinale $\alpha < \omega_2$ si immerge in S.
4. Qual'è la minima cardinalità possibile di un insieme ordinato in cui si immergono tutti gli ordinali minori di ω_2?

Esercizio C

1. Che cardinalità può avere un insieme di palle aperte e disgiunte in $\mathbb{R}^2$?
2. Che cardinalità può avere un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$ tale che ogni punto $p \in S$ è isolato, ossia esiste una palla aperta di centro p che non contiene altri punti di S? E se, invece, richiediamo soltanto che per ogni $p \in S$ esista una palla aperta, di centro p, che interseca S in un insieme al più numerabile?
3. Un otto è un insieme di punti in $\mathbb{R}^2$ che formano due circonferenze tangenti esternamente. Che cardinalità può avere un insieme di otto disgiunti in $\mathbb{R}^2$?
4. Sia S un'intersezione numerabile di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$. Dimostra che se $\aleph_0 < |S|$ allora $|S| = 2^{\aleph_0}$.