Prova scritta del 23·VI·2021 — Soluzioni

ESERCIZIO A

Diciamo che gli ordinali α e β commutano se $\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

1. Trova infiniti ordinali che commutano con ω.
2. Trova tutti gli ordinali che commutano con ω.
3. Dimosta che per ogni α e β ordinali, $\alpha+\beta$ e $\alpha\cdot 2+\beta$ commutano.
4. Dato un ordinale $\alpha>0$, dimostra che esiste l'insieme degli ordinali β che commutano con α, e calcolane la cardinalità in funzione di α.

1. & 2. Gli ordinali che commutano con ω sono tutti e soli quelli della forma $\omega\cdot n$ con $n\in\omega$.

Dim Osserviamo innanzitutto che ω e $\omega\cdot n$ commutano:

$$\omega+\omega\cdot n=\omega(1+n)=\omega(n+1)=\omega\cdot n+\omega$$

Sia, ora, α un ordinale che commuta con ω, allora, scrivendo $\alpha=\omega\cdot\beta+r$ con $r<\omega$, abbiamo

$$\omega(1+\beta)+r=\omega+(\omega\beta+r)=(\omega\beta+r)+\omega=\omega(\beta+1)$$

Siccome il membro di destra, $\omega(\beta+1)$, è limite, $r=0$. Quindi $\omega(1+\beta)=\omega(\beta+1)$. Dalla monotonia $x\mapsto\omega\cdot x$ otteniamo $1+\beta=\beta+1$, e questo implica che β è finito: altrimenti $\beta=\omega+\gamma$ per qualche γ e $1+\beta=1+\omega+\gamma=\omega+\gamma=\beta<\beta+1$. In conclusione $\alpha=\omega\cdot\beta$ con $\beta<\omega$. ∎

3. Occorre dimostrare che

$$(\alpha+\beta)+(\alpha\cdot 2+\beta)=(\alpha\cdot 2+\beta)+(\alpha+\beta)$$

$$\alpha+(\beta+\alpha+\alpha+\beta) \qquad \alpha+(\alpha+\beta+\alpha+\beta)$$

A tal fine ci basta dimostrare

$$\beta+\alpha+\alpha+\beta=\alpha+\beta+\alpha+\beta$$

Distinguiamo tre casi:

1 - Se esiste γ tale che $\alpha < \omega^\gamma \leq \beta$ allora $\alpha + \beta = \beta$, quindi

$$\beta + \alpha + \alpha + \beta = \beta + \alpha + (\alpha + \beta) = \beta + \alpha + \beta = \beta + (\alpha + \beta) = \beta + \beta$$

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = (\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = \beta + \beta$$

2 - Se esiste γ tale che $\beta < \omega^\gamma \leq \alpha$ allora $\beta + \alpha = \alpha$, quindi

$$\beta + \alpha + \alpha + \beta = (\beta + \alpha) + \alpha + \beta = \alpha + \alpha + \beta$$

$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = \alpha + (\beta + \alpha) + \beta = \alpha + \alpha + \beta$$

3 - Altrimenti l'esponente di testa nella forma normale di α coincide con quello nella forma normale di β. Scriviamo

$$\alpha = \omega^\gamma \cdot m + \sigma \qquad \beta = \omega^\gamma \cdot n + \tau$$

con $m, n \in \omega \setminus \{0\}$ e $\sigma, \tau < \omega^\gamma$. Abbiamo allora

$$\sigma + \omega^\gamma = \tau + \omega^\gamma = \omega^\gamma$$

Quindi

$$\begin{aligned} \alpha + \beta + \alpha + \beta &= (\omega^\gamma \cdot m + \sigma) + (\omega^\gamma \cdot n + \tau) + (\omega^\gamma \cdot m + \sigma) + (\omega^\gamma \cdot n + \tau) \\ &= \omega^\gamma \cdot m + (\sigma + \omega^\gamma \cdot n) + (\tau + \omega^\gamma \cdot m) + (\sigma + \omega^\gamma \cdot n) + \tau \\ &= \omega^\gamma \cdot m + \omega^\gamma \cdot n + \omega^\gamma \cdot m + \omega^\gamma \cdot n + \tau \\ &= \omega^\gamma (m + n + m + n) + \tau \end{aligned}$$

$\beta + \alpha + \alpha + \beta =$ ... passaggi simili ... $= \omega^\gamma (n + m + m + n) + \tau$

4. La cardinalità cercata è $\aleph_0$ indipendentemente da $\alpha > 0$.

Dimostriamo intanto il lemma seguente

Lemma α e β commutano se e solo se esiste un ordinale γ ed esistono $m, n \in \omega$ tali che $\alpha = \gamma \cdot m$ e $\beta = \gamma \cdot n$.

Dim È immediato che $\gamma \cdot m$ e $\gamma \cdot n$ commutano. Dimostriamo l'implicazione opposta.

Se $\alpha = \beta$ basta prendere $\gamma = \alpha = \beta$ e $m = n = 1$. Assumiamo quindi, senza perdita di generalità, $\beta < \alpha$. Procediamo per induzione transfinita (forma forte) su α. Scriviamo $\alpha = \beta\delta + \rho$ con $\rho < \beta$. Per ipotesi

$$\beta\delta + \rho + \beta = \alpha + \beta = \beta + \alpha = \beta + \beta\delta + \rho$$

Se δ fosse infinito $\beta + \beta\delta + \rho = \beta(1+\delta) + \rho = \beta\delta + \rho < \beta\delta + \rho + \beta$, quindi $\delta \in \omega$, e, di conseguenza

$$\underline{\beta\delta} + \rho + \beta = \beta(1+\delta) + \rho = \beta(\delta+1) + \rho = \underline{\beta\delta} + \beta + \rho$$

$$\Rightarrow \quad \rho + \beta = \beta + \rho$$

Per ipotesi induttiva, esistono γ e n, r tali che $\beta = \gamma n$ e $\rho = \gamma \cdot r$. Allora $\alpha = \beta\delta + \rho = \gamma \cdot n \cdot \delta + \gamma \cdot r = \gamma \cdot (\underbrace{n\delta + r}_{\in \omega})$. ∎

Tornando all'esercizio, notiamo che per ogni α e ogni $m \in \omega \setminus \{0\}$ esiste al più un γ tale che $\alpha = \gamma \cdot m$. Infatti

$$\gamma < \gamma' \Rightarrow \gamma \cdot m = \gamma \cdot (m-1) + \gamma \leq \gamma' \cdot (m-1) + \gamma < \gamma'(m-1) + \gamma' = \gamma' \cdot m$$

Per cui, fissato α, per ogni $m, n \in \omega$ esiste al più un β tale che $\alpha = \gamma \cdot m$ e $\beta = \gamma \cdot n$ per qualche γ. Per il lemma abbiamo quindi una corrispondenza biunivoca fra un sottoinsieme di $\omega \times \omega$ e gli ordinali che commutano con α. Per rimpiazzamento la collezione di questi ultimi è un insieme, e di cardinalità $\leq |\omega \times \omega| = \aleph_0$. D'altro canto ci sono almeno $\aleph_0$ ordinali che commutano con α, per esempio $\alpha \cdot n$ al variare di $n \in \omega$. ∎

Esercizio B

Ricorda che il linguaggio della teoria degli insiemi *puro* è costituito dai soli simboli di variabile, le relazioni di $=$ e $\in$, i quantificatificatori $\forall$ ed $\exists$ non limitati (per esempio la formula $\exists x\, y \in x$ è corretta, mentre non lo è $\exists x \in y\, z \in x$), i connettivi logici e le parentesi.

1. Siano x e y insiemi, con $y \neq \emptyset$. Esprimi $\bigcap y \subseteq \bigcup x$ mediante una formula insiemistica *pura*.
2. Dimostra che, se C è una classe propria, allora esiste una funzione classe surgettiva $F\colon C \to \mathrm{Ord}$ (*suggerimento: risolvi prima il caso in cui C è una classe di ordinali*).
3. Sia C una classe e $F\colon V \times V \to V$ una funzione classe. Dimostra che esiste la più piccola classe D che contiene C tale che $\forall x, y \in D\ F(x,y) \in D$.
4. Trova, se esiste, la minima classe di ordinali C con la proprietà che se D è una classe di ordinali che contiene C e $\forall \alpha, \beta \in D\ \alpha+\beta, \alpha\cdot\beta, \alpha^\beta \in D$, allora $D = \mathrm{Ord}$.

1. $\forall a \left(\forall b\ b \in y \to a \in b\right) \to \exists c\ c \in x \wedge a \in c$

2. Seguendo il suggerimento, consideriamo prima il caso di una sottoclasse C degli ordinali. Per ogni $\alpha \in C$ sia

$$C_\alpha \overset{\text{def.}}{=} \{\beta \in \alpha \mid \beta \in C\}$$

C_α è un insieme per l'assioma di separazione. Definiamo

$$\gamma = F_C(\alpha) \overset{\text{def.}}{\equiv} \gamma \sim C_\alpha \subseteq \mathrm{Ord}$$

Dimostriamo che F_C è iniettiva: se $\alpha, \alpha' \in C$ e $\alpha < \alpha'$, C_α è un segmento iniziale proprio di $C_{\alpha'}$, dunque $F_C(\alpha) < F_C(\alpha')$.
Dimostriamo che F_C è illimitata: se $\forall \alpha \in C\ F_C(\alpha) < \sigma$ allora $F_C[C] \subseteq \sigma$ è un insieme, e $C = F_C^{-1}[F_C[C]]$ è un insieme.
Ora, dato $\gamma \in \mathrm{Ord}$, esiste $\alpha \in C$ tale che $F_C(\alpha) > \gamma$. Quindi γ è un segmento iniziale proprio di $F_C(\alpha)$, e, di conseguenza, esiste un segmento iniziale proprio $(C_\alpha)_\beta$ di C_α isomorfo a γ. Osservando che $(C_\alpha)_\beta = C_\beta$ abbiamo $\gamma = F_C(\beta)$. caso particolare
Per il caso generale, osserviamo che la funzione classe $\mathrm{rank}\colon V \to \mathrm{Ord}$, che associa ad ogni insieme il suo rango,

manda la classe propria C in una classe propria di ordinali $\mathrm{rank}[C]$. Infatti, se $\mathrm{rank}[C]$ fosse un insieme, detto $\alpha = \sup(\mathrm{rank}[C])$, tutti gli elementi di C apparterrebbero a V_α, e $C = \{x \in V_\alpha \mid x \in C\}$ sarebbe un insieme. La funzione classe $F : C \to Ord$

$$y = F(x) \overset{def.}{\iff} y = F_{\mathrm{rank}[C]}(\mathrm{rank}(x))$$

soddisfa quindi la richiesta dell'esercizio ∎

3. Osserviamo intanto che, dato un insieme S, esiste il più piccolo insieme $\bar{S} \supseteq S$ tale che $\forall x,y \in \bar{S}\ F(x,y) \in \bar{S}$. Consideriamo, infatti, la successione definita per ricorrenza

$$S_0 = S \qquad S_{n+1} = S_n \cup \{F(x,y) \mid x,y \in S_n\}$$

e definiamo $\bar{S} = \bigcup \{S_n \mid n \in \omega\}$. Si vede per induzione che $\forall m,n \in \omega\ m \leq n \to S_m \subseteq S_n$. Quindi, presi $x,y \in \bar{S}$, esistono $m,n \in \omega$ tali che $x \in S_m$ e $y \in S_n$, per cui $x,y \in S_{\max(m,n)}$ e $F(x,y) \in S_{\max(m,n)+1} \subseteq \bar{S}$. D'altro canto, dato $t \supseteq S$ tale che $\forall x,y \in t\ f(x,y) \in t$, abbiamo $S_n \subseteq t \to S_{n+1} \subseteq t$, segue quindi per induzione che $\bar{S} \subseteq t$, ossia $\bar{S}$ è minimale.

Definiamo ora la classe D

$$x \in D \overset{def.}{\iff} \underbrace{\exists S \subseteq C\ x \in \bar{S}}_{\exists S\ (\forall a \in S\ a \in C) \wedge x \in \bar{S}}$$

Dati $x,y \in D$, esistono $S_x, S_y \subseteq C$ tali che $x \in \bar{S}_x$ e $y \in \bar{S}_y$. Detto $S = S_x \cup S_y$, per la minimalità di $\bar{S}_x$ e $\bar{S}_y$ rispettivamente, abbiamo $\bar{S}_x, \bar{S}_y \subseteq \bar{S}$. Quindi $x,y \in \bar{S}$ e $F(x,y) \in \bar{S}$.

Siccome $S \subseteq C$ abbiamo quindi $F(x,y) \in D$.

Per dimostrare la minimalità di D ci basta dire che, data una classe $E \supseteq C$ tale che $\forall x,y \in E\ F(x,y) \in E$, e dato un insieme $S \subseteq C$, vale $\bar{S} \subseteq E$. Se così non fosse, $t = \{x \in \bar{S} \mid x \in E\} \supseteq S$ soddisferebbe $\forall x,y \in t\ F(x,y) \in t$ contraddicendo la minimalità di $\bar{S}$. ☐

4. La classe richiesta è C definita da

$$x \in C \overset{\text{def.}}{\equiv} x = 0 \ \vee\ x = w \ \vee\ \exists \alpha \in \mathrm{Ord}\ x = \xi_\alpha$$

Vediamo che, data una classe D come nel testo, $D = \mathrm{Ord}$.

Sia, per assurdo, $\alpha > 0$ il minimo ordinale $\notin D$. Scrivendo $\alpha = w^{\beta_1} k_1 + \dots + w^{\beta_n} k_n$ in forma normale di Cantor, notiamo che $n = 1$. Altrimenti avremmo $w^{\beta_1} k_1 < \alpha$, quindi $w^{\beta_1} k_1 \in D$, e similmente $w^{\beta_2} k_2 + \dots + w^{\beta_n} k_n \in D$, da cui $\alpha \in D$ ↯.

Ora $\alpha = w^{\beta_1} k_1$, e osserviamo che $k_1 = 1$, altrimenti $w^{\beta_1} < \alpha$ e $w^{\beta_1}(k_1 - 1) < \alpha$, quindi $\alpha = w^{\beta_1} + w^{\beta_1}(k_1 - 1) \in D$ ↯.

In conclusione $\alpha = w^{\beta_1}$. Per la monotonia di $x \mapsto w^x$, $\beta_1 \leq \alpha$. Se avessimo $\beta_1 < \alpha$, allora $\beta_1 \in D$ e $\alpha = w^{\beta_1} \in D$ ↯. Per cui $\alpha = \beta_1$, ossia $\alpha = w^\alpha$, quindi α è uno ε-number, e pertanto $\alpha \in C \in D$ ↯.

Per dimostrare la minimalità di C, ci basta mostrare che per ogni $\sigma \in C$ la classe $\mathrm{Ord} \setminus \{\sigma\}$ è chiusa per somme, prodotti e potenze.

Caso $\sigma = 0$. immediato

Caso $\sigma = \omega$. Se $\alpha \geq \omega+1$ o $\beta \geq \omega+1$ allora $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\alpha^\beta \geq \omega+1$, salvo i casi $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \beta = 0$, $\alpha^0 = 1^\beta = 1$. Però se $\alpha, \beta < \omega$, allora $\alpha+\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\alpha^\beta < \omega$.

Caso $\sigma = \xi_\gamma$ Come nel caso precedente, dobbiamo vedere che se $\alpha, \beta < \xi_\gamma$, allora $\alpha+\beta, \alpha\cdot\beta, \alpha^\beta < \xi_\gamma$. Detto γ il massimo fra α e β, assumendo $2 \leq \gamma$, abbiamo

$$\alpha+\beta \leq \gamma+\gamma \leq \gamma\cdot 2$$

$$\alpha\cdot\beta \leq \gamma\cdot\gamma = \gamma^2$$

$$\alpha^\beta \leq \gamma^\gamma \leq \omega^{\gamma\cdot\gamma} \leq \omega^{\omega^{\gamma\cdot 2}} \leq \omega^{\omega^{\gamma+1}} < \xi_\gamma$$

Per dimostrare l'ultima disuguaglianza, osserviamo che $\gamma+1 < \xi_\gamma$, poiché $\gamma < \xi_\gamma$ e ξ_γ è limite, quindi basta vedere che se $\delta < \xi_\gamma$ allora $\omega^\delta < \xi_\gamma$.

$$\delta < \xi_\gamma \Rightarrow \omega^\delta < \omega^{\xi_\gamma} = \xi_\gamma.$$

Esercizio C

1. Determina la cardinalità dell'insieme delle rette in $\mathbb{R}^2$.
2. Sapendo che un insieme S di rette in $\mathbb{R}^2$ ha cardinalità $\kappa \geqslant \aleph_0$, cosa si può dire della cardinalità dell'insieme delle intersezioni delle rette di S?
3. Dimostra che esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che interseca ogni retta in esattamente due punti (*suggerimento: bene ordina le rette*).
4. Diciamo che un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$ è sottile se, per ogni punto p di S, esiste una retta che interseca S solo in p. Dimostra che esiste una partizione di $\mathbb{R}^2$ in tre insiemi sottili.

1. La cardinalità cercata è $2^{\aleph_0}$.

Dim Sia S l'insieme delle rette in $\mathbb{R}^2$.

$$f : \mathbb{R} \to S$$

$$k \mapsto \{(x, k) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

è iniettiva, quindi $|S| \geq |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

D'altro canto ogni retta può essere scritta nella forma $\{(x,y) \mid ax+by=c\}$ con $(a,b) \neq (0,0)$, quindi

$$g : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0)\} \times \mathbb{R} \longrightarrow S$$
$$(a,b,c) \longmapsto \{(x,y) \mid ax+by+c\}$$

è surgettiva, e, di conseguenza, $|S| \leq |\mathbb{R}^3| = 2^{\aleph_0}$

2. Sia T l'insieme delle intersezioni fra le rette di S, allora $|T|$ può valere 0, 1, o k.

Dim. Per cominciare, notiamo che, ad ogni coppia di rette, corrisponde al più un'intersezione. Abbiamo pertanto

$$f : \{\{r_1, r_2\} \in S \mid r_1 \neq r_2 \wedge r_1 \cap r_2 \neq \emptyset\} \longrightarrow T$$

surgettiva. Quindi $|T| \leq |\operatorname{dom} f| \leq |\mathcal{P}^{fin}(S)| = |S|$.

Per avere un controllo dal basso sulla cardinalità di T, consideriamo inizialmente il caso che ogni retta contenga almeno due punti di T. In questo caso la funzione

$$g : \{\{p_1, p_2\} \subseteq T \mid p_1 \neq p_2 \wedge \exists r \in S \; p_1, p_2 \in r\} \longrightarrow S$$
$$\{p_1, p_2\} \longmapsto r \text{ tale che } p_1, p_2 \in r$$

è surgettiva, quindi $|S| \leq |\operatorname{dom} g| \leq |\mathcal{P}^{fin}(T)| = |T|$, e, per la disuguaglianza precedente $|T| = |S| = k$.

Se, invece, esiste $r \in S$ che contiene al più un punto di T, si danno due possibilità. O $r \cap T = \emptyset$, e, in questo caso, tutte le rette di S sono parallele a r, quindi $|T| = 0$.

Oppure $r \cap S = \{p\}$, per un certo p. In questo caso possiamo suddividere S in $S = \{r\} \sqcup S_{\parallel} \sqcup S_x$ dove $S_{\parallel}$ è l'insieme delle rette di $S \setminus \{r\}$ parallele a r, e S_x l'insieme di quelle che passano per p. Se $|S_{\parallel}| = 0$, allora le rette di S formano una stella centrata in p, quindi $T = \{p\}$ e $|T| = 1$. Rimane il caso $|S_{\parallel}|, |S_x| > 0$. Osserviamo che o $|S_{\parallel}| = k$ o $|S_x| = k$. Se $|S_{\parallel}| = k$, detta t una retta passante per p diversa da r, ciascuna delle rette di $S_{\parallel}$ interseca t in un punto diverso, abbiamo quindi almeno k intersezioni, per cui $|T| = k$. Se $|S_x| = k$, detta t una retta parallela a r diversa da r, ciascuna delle rette di S_x interseca t in un punto diverso, e, come nel caso precedente, $|T| = k$. ☒

3. Sia $\aleph_k = 2^{\aleph_0}$, consideriamo una bigezione

$$\begin{array}{ccc} \omega_k & \longrightarrow & \text{rette di } \mathbb{R}^2 \\ \alpha & \longmapsto & r_\alpha \end{array}$$

Costruiremo, per ricorsione transfinita, una sequenza di insiemi $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \omega_k}$ tale che:

① $\forall \alpha, \beta \quad \alpha < \beta \to S_\alpha \subseteq S_\beta$

② $\forall \alpha$ S_α non contiene terne di punti allineati

③ $\forall \alpha \quad |S_\alpha \cap r_\alpha| = 2$

Fatto questo, l'insieme cercato è $S = \bigcup \{S_\alpha \mid \alpha \in \omega_k\}$.

Infatti, data una qualunque retta r_α, abbiamo

$|S \cap r_\alpha| \geq |S_\xi \cap r_\alpha| = 2$, e, d'altro canto, se $|S \cap r_\alpha| \geq 3$, allora esisterebbe un β tale che $|S_\beta \cap r_\alpha| \geq 3$, contraddicendo il fatto che S_β non contiene terne di punti allineati.

Costruzione di S_α. Fissiamo una funzione di scelta f sulle parti non vuote di $\mathbb{R}^2$. Costruiamo la successione $\{S_\alpha\}_{\alpha \in \omega_\kappa}$ a passi. L'idea è che al passo α-esimo, si costruisce S_α aggiungendo all'unione degli S_β precedenti zero, uno, o due punti della retta r_α, in modo tale che $|S_\alpha \cap r_\alpha| = 2$. Occorre, però, prestare attenzione a non creare terne di punti allineati, quindi i punti aggiuntivi vanno scelti fuori da ogni possibile allineamento dei precedenti.

Formalmente S_α è definito come segue

- Sia $T_\alpha = \bigcup \{S_\beta \mid \beta < \alpha\}$ — unione dei precedenti
- Se $|T_\alpha \cap r_\alpha| = 2$, $S_\alpha = T_\alpha$ — {punti di r_α che formerebbero un allineamento con due punti di T_α
- Sia $A_\alpha = \{p \in r_\alpha \mid \exists q_1, q_2 \in T_\alpha \; q_1 \neq q_2 \wedge p, q_1, q_2 \text{ sono allineati}\}$
- Se $|T \cap r_\alpha| = 1$, $S_\alpha = T_\alpha \cup \{f(r_\alpha \setminus (T_\alpha \cup A_\alpha))\}$
- Se $|T \cap r_\alpha| = 0$, $r = f(r_\alpha \setminus (T_\alpha \cup A_\alpha))$

$$q = f(r_\alpha \setminus (T_\alpha \cup A_\alpha \cup \{r\}))$$

$$S_\alpha = T_\alpha \cup \{p, q\}$$

La definizione è ben data, ossia gli insiemi cui è applicata f non sono vuoti, perché $|T_\alpha| \leq |\alpha| \cdot 2 < \aleph_\kappa$ e $|A_\alpha| \leq |T_\alpha^2| < \aleph_\kappa$ mentre $|r_\alpha| = \aleph_\kappa$. La verifica di ①, ②, ③ è immediata. ∎

4. La tecnica ricorda quella del punto precedente. Noi vogliamo colorare i punti di $\mathbb{R}^2$ con tre colori; formalmente: trovare una partizione $\mathbb{R}^2 = R \cup V \cup B$, in maniera tale che R, V, e B siano sottili. A tale scopo fissiamo una bigezione $w_K \to \mathbb{R}^2$, con $\aleph_K = 2^{\aleph_0}$, che manda $\alpha \in w_K$ in p_α. Al passo α vorremmo scegliere il colore del punto p_α, formalmente, quindi, costruiamo una funzione $\text{colore} : w_K \to \{0,1,2\}$

Definiamo poi $R = \{ p_\alpha \mid \text{colore}(\alpha) = 0 \}$

$V = \{ p_\alpha \mid \text{colore}(\alpha) = 1 \}$

$B = \{ p_\alpha \mid \text{colore}(\alpha) = 2 \}$

Questo però non basta: costruiremo anche una sequenza $\{r_\alpha\}_{\alpha \in w_K}$ di rette che servono per testimoniare che R, V e B sono sottili. Riassumendo, per ogni $\alpha \in w_K$ vogliamo che valgano:

(1) $p_\alpha \in r_\alpha$

(2) $\forall \beta < \alpha \quad p_\beta \notin r_\alpha$

(3) $\forall \beta < \alpha \quad p_\alpha \in r_\beta \to \text{colore}(\alpha) \neq \text{colore}(\beta)$

(4) $\forall \beta, \gamma < \alpha \quad \beta < \gamma \to r_\alpha \cap r_\beta \cap r_\gamma \subseteq \{p_\alpha\}$

La condizione (4) è tecnica: serve per far funzionare la costruzione.

Supponiamo, intanto, di aver ultimato la costruzione, e

verifichiamo che R, V e B hanno le proprietà richieste. Segue immediatamente dalla definizione che R, V e B sono disgiunti e $\mathbb{R}^2 = R \cup V \cup B$. Per simmetria, ci basta ora verificare che R è sottile. Dato $p_\alpha \in R$, asseriamo che $r_\alpha \cap R = \{p_\alpha\}$. Intanto $p_\alpha \in r_\alpha$ per ①, quindi $r_\alpha \cap R \supseteq \{p_\alpha\}$. Supponiamo, per assurdo, che $p_\beta \in r_\alpha \cap R$ con $\beta \neq \alpha$. Allora si potrebbero dare due casi: se $\beta < \alpha$ è contraddetta la ②, e se $\alpha < \beta$, $\text{colore}(\alpha) = \text{colore}(\beta) = r$ poiché $p_\alpha, p_\beta \in R$, quindi è contraddetta la ③ (con α e β scambiati).

Costruzione Fissiamo una funzione di scelta f sugli insiemi non vuoti di rette. Al passo α:

- Sia $P_\alpha = \{p_\beta \mid \beta < \alpha\} \cup \{r_\beta \cap r_\gamma \mid \beta < \gamma < \alpha\} \setminus \{p_\alpha\}$
- $r_\alpha = f(\{\text{rette } r \mid p_\alpha \in r \wedge r \cap P_\alpha = \emptyset\})$
- Sia $C_\alpha = \{\text{colore}(\beta) \mid \beta < \alpha \wedge p_\alpha \in r_\beta\}$
- $\text{colore}(\alpha) = \min(\{0,1,2\} \setminus C_\alpha)$

Dobbiamo, intanto, dimostrare che la costruzione è ben data. Per verificare che f è applicata ad un insieme non vuoto, basta osservare che le rette escluse in quanto intersecano P_α sono al più $|P_\alpha| < 2^{\aleph_0}$, perché $|\alpha| < 2^{\aleph_0}$. Per verificare che min è fatto su un insieme non vuoto, supponiamo, per assurdo, che $1,2,3 \in C_\alpha$. Allora esistono $\beta < \gamma < \delta < \alpha$ con $p_\alpha \in r_\beta \cap r_\gamma \cap r_\delta$, contraddicendo la ④

per il passo $\delta < \alpha$. Questo è il punto in cui serve (4)!

Verifichiamo ora (1) ... (4).

(1), (2) e (4) seguono dalla scelta di r_α. Abbiamo, infatti, scelto una retta r tale che p_α er (1), escludendo le rette che passano per qualche p_β con $\beta < \alpha$ (2), e quelle che passano per una intersezione $r_\eta \cap r_\gamma$ con $\eta < \gamma < \alpha$ a meno che questa non sia p_α (4).

(3) segue dalla scelta di colore(α), perché sono stati esclusi i colore(η) tali che $\eta < \alpha$ e $p_\alpha \in r_\eta$. ∎

Nota riguardo alla valutazione del compito

Ciascuna delle 12 domande A1, A2, ..., C4 contribuisce in maniera uguale al punteggio. Per prendere 18 occorrono 5 domande risolte: le più facili si sono rivelate A1, 2, 3, B1 e C1. Il 30 si prende con 9 domande, per esempio tutto A, B1,2 e C1,2 e una fra B3 e C3. Le risposte ad una domanda che assumono il risultato di una domanda precedente sono considerate corrette.