Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Prova scritta di ETI del 23·vi·2021

Il tuo elaborato manoscritto deve essere inviato al docente, sotto forma di scansioni o foto digitali, entro il tempo consentito. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti, più 30 minuti addizionali, unicamente per la scansione e l'invio dell'elaborato.

Esercizio A

Diciamo che gli ordinali α e β commutano se $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

1. Trova infiniti ordinali che commutano con ω.
2. Trova tutti gli ordinali che commutano con ω.
3. Dimosta che per ogni α e β ordinali, $\alpha + \beta$ e $\alpha \cdot 2 + \beta$ commutano.
4. Dato un ordinale $\alpha > 0$, dimostra che esiste l'insieme degli ordinali β che commutano con α, e calcolane la cardinalità in funzione di α.

Esercizio B

Ricorda che il linguaggio della teoria degli insiemi *puro* è costituito dai soli simboli di variabile, le relazioni di $=$ e $\in$, i quantificatificatori $\forall$ ed $\exists$ non limitati (per esempio la formula $\exists x\ y \in x$ è corretta, mentre non lo è $\exists x \in y\ z \in x$), i connettivi logici e le parentesi.

1. Siano x e y insiemi, con $y \neq \emptyset$. Esprimi $\bigcap y \subseteq \bigcup x$ mediante una formula insiemistica *pura*.
2. Dimostra che, se C è una classe propria, allora esiste una funzione classe surgettiva $F\colon C \to \mathrm{Ord}$ (*suggerimento: risolvi prima il caso in cui* C *è una classe di ordinali*).
3. Sia C una classe e $F\colon V \times V \to V$ una funzione classe. Dimostra che esiste la più piccola classe D che contiene C tale che $\forall x, y \in D\ F(x, y) \in D$.
4. Trova, se esiste, la minima classe di ordinali C con la proprietà che se D è una classe di ordinali che contiene C e $\forall \alpha, \beta \in D\ \alpha + \beta, \alpha \cdot \beta, \alpha^\beta \in D$, allora $D = \mathrm{Ord}$.

Esercizio C

1. Determina la cardinalità dell'insieme delle rette in $\mathbb{R}^2$.
2. Sapendo che un insieme S di rette in $\mathbb{R}^2$ ha cardinalità $\kappa \geqslant \aleph_0$, cosa si può dire della cardinalità dell'insieme delle intersezioni delle rette di S?
3. Dimostra che esiste un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ che interseca ogni retta in esattamente due punti (*suggerimento: bene ordina le rette*).
4. Diciamo che un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^2$ è sottile se, per ogni punto p di S, esiste una retta che interseca S solo in p. Dimostra che esiste una partizione di $\mathbb{R}^2$ in tre insiemi sottili.