Prova scritta del 21·VII·2021 — Soluzioni

Esercizio A

Diciamo che un ordinale $\alpha > 0$ è *appiccicaticcio* se tutti gli ordinali della forma $\beta \cdot \alpha$, al variare di $\beta \in \mathrm{Ord} \setminus \{0\}$, sono potenze di α.

1. Dimostra che ω è appiccicaticcio.
2. Trova tutti gli ordinali appiccicaticci minori di ω^3.
3. Dimostra che la classe degli ordinali appiccicaticci è una classe propria.
4. Sia F la funzione classe che manda $\alpha \in \mathrm{Ord}$ nell'α-esimo ordinale appiccicaticcio, ossia, formalmente, la funzione definita, per ricorsione transfinita, dicendo che $F(\alpha)$ è il minimo ordinale appiccicaticcio maggiore di tutti gli elementi di $F[\alpha]$. Determina se F ha oppure no un punto fisso.

1. Occorre dimostrare che, dato $\beta \neq 0$, esiste γ tale che $\beta \cdot \omega = \omega^\gamma$. Detto δ l'esponente di testa della forma normale di Cantor di β, abbiamo $\omega^\delta \leq \beta < \omega^\delta \cdot n$ per qualche $n \in \omega$. Di conseguenza

$$\omega^{\delta+1} = \omega^\delta \cdot \omega \leq \beta \cdot \omega \leq \omega^\delta \cdot n \cdot \omega = \omega^{\delta+1}$$

abbiamo quindi l'asserto con $\gamma = \delta + 1$.

2. Gli ordinali richiesti sono quelli della forma $\omega \cdot n$, al variare di $n \in \omega \setminus \{0\}$. Dimostriamo (a) che $\omega \cdot n$ è appiccicaticcio, e (b) che gli altri ordinali $< \omega^3$ non lo sono.

(a) Dato $\beta \neq 0$, facendo riferimento al punto 1., abbiamo $\beta \cdot (\omega \cdot n) = (\beta \cdot \omega) \cdot n = \omega^{\delta+1} \cdot n$ dove δ è l'esponente di testa della forma normale di β. Ora, scrivendo $\delta = \omega \cdot \nu + \rho$ con $\rho < \omega$

$$(\omega \cdot n)^{\delta+1} = \underbrace{\left(\underbrace{(\omega \cdot n)^\omega}_{\omega^\omega}\right)^\nu}_{\omega \cdot n \cdot \omega \cdot n \cdot \omega \cdot n \cdot \ldots} \cdot \underbrace{(\omega \cdot n)^\rho}_{\omega} = \omega^{\omega\nu} \cdot \omega^\rho \cdot n = \omega^{\delta+1} \cdot n$$

Quindi $\beta \cdot (\omega \cdot n) = \omega^{\delta+1} \cdot n = (\omega \cdot n)^{\delta+1}$ è potenza di $\omega \cdot n$.

(b.1) Se $\omega^2 \leq \alpha < \omega^3$, allora α non è appiccicaticcio.

Dim. Prendiamo $\beta = \omega$, allora

$$\alpha^1 < \omega^3 \leq \beta \cdot \alpha < \beta \cdot \omega^3 = \omega^4 \leq \alpha^2$$

Quindi $\beta \cdot \alpha$ è strettamente compreso fra α^1 e α^2, e, per la monotonia dell'esponenziale, non è potenza di α.

(b.2) $n \in \omega \setminus \{0\}$ non è appiccicaticcio

Dim Basta prendere, per β, un numero primo che non divide n.

(b.3) $\alpha = \omega \cdot a + b$, con $a, b \in \omega \setminus \{0\}$, non è appiccicaticcio.

Dim Scegliamo $\beta = 2$.

$$\alpha^1 = \omega \cdot a + b < \omega \cdot a + 2b = \beta \cdot \alpha < \omega^2 \leq \alpha^2$$

e concludiamo per monotonia come in (b.1).

3. Ci basta dimostrare che per ogni ordinale α c'è un ordinale appiccicaticcio $\geq \alpha$. A questo scopo, dimostriamo che $\omega^{\omega^\alpha} \geq \alpha$ è appiccicaticcio.

Sia $\beta > 0$, γ l'esponente di testa di β, ossia $\omega^\gamma \leq \beta < \omega^{\gamma+1}$, e scriviamo $\gamma = \omega^\alpha \cdot \nu + \rho$ con $\rho < \omega^\alpha$. Allora:

$$\beta \cdot \omega^{\omega^\alpha} = \omega^{\gamma + \omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha \nu + \rho + \omega^\alpha} = \omega^{\omega^\alpha \cdot (\nu+1)} = \left(\omega^{\omega^\alpha}\right)^{\nu+1}$$

4. Per quanto dimostrato al punto 3, $\varepsilon_0 = \omega^{\varepsilon_0} = \omega^{\omega^{\varepsilon_0}}$ è un ordinale appiccicaticcio. Quindi $\varepsilon_0 = F(\alpha)$. Dimostriamo che $\alpha = \varepsilon_0$, quindi ε_0 è un punto fisso di F.

$\alpha \leq \varepsilon_0$. Infatti F è crescente, quindi $\alpha \leq F(\alpha) = \varepsilon_0$.

$\varepsilon_0 \leq \alpha$ Sia $G(\nu) = F^{-1}(\omega^{\omega^\nu})$, ben definita perché ν^{ω^ν} è appiccicaticcio e crescente perché F è crescente.

Allora $\varepsilon_0 \leq G(\varepsilon_0) = F^{-1}(\omega^{\omega^{\varepsilon_0}}) = F^{-1}(\varepsilon_0) = \alpha$.

Nota Non è possibile risolvere questa domanda facendo appello alla continuità di F. Infatti, abbiamo visto nel punto 2. che $F(0) = \omega$, $F(1) = \omega \cdot 2$, ... $F(n) = \omega \cdot (n+1)$ per $n \in \omega$. Tuttavia $\sup\{F(n) \mid n \in \omega\} = \omega^2$ non è appiccicaticcio, di conseguenza F non è continua.

Esercizio B

Sia $X \subseteq \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} \text{differenza}\colon \{(a,b) \in X^2 \mid a < b\} &\to \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ (a,b) &\mapsto b - a \end{aligned}$$

Diciamo che X è:
parsimonioso se la funzione differenza è iniettiva;
meticoloso se la funzione differenza è surgettiva;
minuzioso se la funzione differenza è biunivoca.

1. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi parsimoniosi.
2. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi meticolosi.
3. Dimostra che esiste un insieme minuzioso.
4. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi minuziosi.

1. La cardinalità cercata è $2^{\aleph_0}$.

Intanto $|\{\text{ins. parsimoniosi}\}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

Per trovare $2^{\aleph_0}$ insiemi parsimoniosi basta osservare che un sottoinsieme di un insieme parsimonioso è parsimonioso, perché una restrizione di una funzione iniettiva è iniettiva. Di conseguenza, basta trovare un in-

sieme parsimonioso e numerabile. Per esempio, l'insieme delle potenze di 2.

2. La cardinalità cercata è $2^{\aleph_0}$.

Come prima, $|\{\text{ins. meticolosi}\}| \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$.

Per la direzione opposta, osserviamo che un soprainsieme di un insieme meticoloso è meticoloso, perché un'estensione di una funzione surgettiva (con il medesimo codominio) è surgettiva. Basta quindi trovare un insieme meticoloso S co-numerabile, tale che, cioè, $|\mathbb{N} \setminus S| = \aleph_0$. Per esempio, l'insieme dei numeri della forma $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$, infatti, per $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, abbiamo $n = x_n - x_{n-1}$.

3. Costruiamo per ricorsione una successione $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ in modo tale che l'insieme $X = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ sia minuzioso.

Al passo n della costruzione fissiamo a_{2n} e a_{2n+1}:

1. Se $n > 0$, sia $x_n = \max(\{a_i - a_j \mid 0 \leq j < i < 2n\})$
2. Poniamo $a_{2n} = a_{2n-1} + x_n + 1$ se $n > 0$ e $a_0 = 0$.
3. Sia $y_n = \min(\mathbb{N}^{>0} \setminus \{a_i - a_j \mid 0 \leq j < i \leq 2n\})$
4. Poniamo $a_{2n+1} = a_{2n} + y_n$

Dobbiamo dimostrare che per ogni $k > 0$ esiste un'unica coppia $(i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tale che $a_j - a_i = k$.

Esistenza. Sia k minimo tale che $\forall i, j \; a_j - a_i \neq k$. Siccome gli $h < k$ sono in quantità finita, possiamo tro

varre un n tale che $\forall h < k \; \exists i, j < 2n \;\; a_j - a_i = h$.

Di conseguenza $k = y_n = a_{2n+1} - a_{2n}$ ↝

<u>Unicità</u> Supponiamo $a_i - a_j = a_{i'} - a_{j'}$ con $i > j$, $i' > j'$ e $(i,j) \neq (i',j')$. Se avessimo $i = i'$, allora avremmo $a_j = a_{j'}$ quindi $j = j'$, assumiamo quindi, per assurdo, $i \neq i'$, e, senza perdita di generalità, $i > i'$.

- Caso i pari. Se $i = 2n$, $a_i - a_j \geq a_i - a_{i-1} = x_{n+1} > a_{i'} - a_{j'}$ ↝
- Caso i dispari e $j, i' < i-1$. Se $i = 2n+1$ allora

  $a_i - a_j > a_{2n} - a_{2n-1} = x_{n+1} > a_{i'} - a_{j'}$ ↝
- Caso i dispari e $j = i-1$. Se $i = 2n+1$ $a_{i'} - a_{j'} = a_i - a_j = y_n$ ↝
- Caso i dispari e $i' = i-1$. Se $i = 2n+1$ $a_j - a_{j'} = a_i - a_{i'} = y_n$ ↝

4. La cardinalità cercata è $2^{\aleph_0}$.

Come in 1. e 2. la cardinalità è al più $2^{\aleph_0}$. Modifichiamo la costruzione al punto 3 in modo tale da ottenere una funzione iniettiva

$$\{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \{\text{successioni crescenti}\}$$
$$(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \longmapsto (a^{\sigma}_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

che manda ogni successione binaria σ in una successione a^{σ} tale che $\{a^{\sigma}_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sia minuzioso. Osserviamo che la dimostrazione al punto 3. rimane valida se si rimpiazza il primo passo della costruzione

1. Sia $x_n = \max\left(\{a_i - a_j \mid 0 \leq j < i < 2n\}\right)$

con una qualunque scelta di $x_n \geq \max(\{a_i - a_j \mid \dots\})$.

Ricalchiamo quindi la costruzione di a_n modificando il primo passo come segue. Data $\sigma = (\sigma_n)_{n \in \omega}$

Al passo n della costruzione fissiamo a^σ_{2n} e a^σ_{2n+1}:

1. Se $n > 0$, sia $x_n = 2 \cdot \max(\{a^\sigma_i - a^\sigma_j \mid 0 \leq j < i < 2n\}) + \sigma_{n-1}$
2. Poniamo $a^\sigma_{2n} = a^\sigma_{2n-1} + x_n + 1$ se $n > 0$ e $a_0 = \emptyset$.
3. Sia $y_n = \min(N^{>0} \setminus \{a^\sigma_i - a^\sigma_j \mid 0 \leq j < i \leq 2n\})$
4. Poniamo $a^\sigma_{2n+1} = a^\sigma_{2n} + y_n$

Per quanto detto a^σ è minuziosa, inoltre

$$\sigma_n = \begin{cases} 0 & \text{se } a^\sigma_{2n+2} - a^\sigma_{2n+1} \text{ è dispari} \\ 1 & \text{se } a^\sigma_{2n+2} - a^\sigma_{2n+1} \text{ è pari} \end{cases}$$

di conseguenza la funzione $\sigma \mapsto a^\sigma$ è iniettiva.

Esercizio C

La classe C è:
transitiva se $\forall x \in C\ x \subseteq C$;
estensionale se $\forall x, y \in C\ x \cap C = y \cap C \to x = y$, dove $a \cap C \stackrel{def}{=} \{b \in a \mid b \in C\}$.
Una funzione classe $F\colon C \to D$ è un isomorfismo se è bigettiva e soddisfa la formula $\forall x, y \in C\ x \in y \leftrightarrow F(x) \in F(y)$. Diciamo che C e D sono classi isomorfe se esiste un isomorfismo $F\colon C \to D$.

1. Dimostra che se C è una classe transitiva e non vuota, allora $\emptyset \in C$.
2. Dimostra che esiste una classe propria estensionale che non è transitiva.
3. Dimostra che se C e D sono classi transitive isomorfe, allora coincidono, ossia, formalmente, $\forall x\ x \in C \leftrightarrow x \in D$.
4. Dimostra che se C è una classe estensionale, allora esiste una classe transitiva D isomorfa a C.

1. Dimostriamo per $\in$-induzione che per ogni x vale

$$P(x) \stackrel{def.}{\equiv} x \in C \to \emptyset \in C$$

Fissando poi un $x \in C$, che c'è per ipotesi, otteniamo $\emptyset \in C$.
L'ipotesi induttiva è $\forall y \in x\ P(y)$, dobbiamo dedurre

che vale $P(x)$. Si danno due casi

1. Se $x=\emptyset$, allora $P(x)$ è $\emptyset \in C \to \emptyset \in C$, immediata
2. Se $x \neq \emptyset$, allora esiste $y \in x$. Per la transitività di C, $x \in C \to y \in C$. Per ipotesi induttiva $y \in C \to \emptyset \in C$. Quindi $x \in C \to \emptyset \in C$.

2. Consideriamo la classe $C = Ord \setminus \{0\}$.
C è estensionale perché dati $\alpha, \beta \in C$ con $\alpha \neq \beta$, supponendo senza perdita di generalità $\alpha < \beta$, abbiamo $\alpha \notin \alpha \cap C$ e $\alpha \in \beta \cap C$, quindi $\alpha \cap C \neq \beta \cap C$.
C non è transitiva perché $0 \in 1 \in C$ ma $0 \notin C$.

3. Sia $F : C \to D$ un isomorfismo. Dimostriamo, per $\in$-induzione, che $\forall x \in C \; F(x) = x$, da questo segue immediatamente la tesi. Supponiamo, per ipotesi induttiva, che $\forall y \in x \; F(y) = y$, vogliamo dedurre $F(x) = x$.

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \{ z \in D \mid z \in F(x) \} && \text{siccome } D \text{ è transitiva} \\
&= \{ F(y) \mid y \in C \wedge F(y) \in F(x) \} && \text{per la suriettività di } F \\
&= \{ F(y) \mid y \in C \wedge y \in x \} && \text{perché } F \text{ è un isomorfismo} \\
&= \{ F(y) \mid y \in x \} && \text{siccome } C \text{ è transitiva} \\
&= \{ y \mid y \in x \} = x && \text{per ipotesi induttiva.}
\end{aligned}
$$

4. Costruiremo, per ricorsione transfinita, una successione di funzioni $f_\alpha : V_\alpha \cap C \to V$, per $\alpha \in Ord$, in modo tale che siano soddisfatte le condizioni seguenti:

1. per ogni α, $f_\alpha[V_\alpha \cap C]$ è un insieme transitivo

2. per ogni α, $f_\alpha : V_\alpha \cap C \to f_\alpha[V_\alpha \cap C]$ è un isomorfismo

3. per ogni $\alpha < \beta$, $\alpha < \beta \to f_\alpha \subseteq f_\beta$

Definiamo, ora, D come l'unione su α di $f_\alpha[V_\alpha \cap C]$, formalmente $x \in D \overset{def.}{\equiv} \exists \alpha \; x \in f_\alpha[V_\alpha \cap C]$.

Inizialmente, assumiamo le condizioni 1, 2, 3, e dimostriamo che D è una classe transitiva e $F : C \to D$, definita come l'unione su α delle f_α, è un isomorfismo.

- D è transitiva. Se $x \in y \in D$, allora esiste α tale che $y \in f_\alpha[V_\alpha \cap C]$, quindi, per 1., $x \in f_\alpha[V_\alpha \cap C]$ e $x \in D$.
- F è una funzione classe biunivoca $C \to D$. F è una funzione classe per 3, surgettiva per la definizione di D, e iniettiva perché unione di funzioni iniettive.
- F è un isomorfismo. Siano $x, y \in C$, e sia α un ordinale maggiore del rango di x e di y. Allora

$$x \in y \overset{2.}{\iff} f_\alpha(x) \in f_\alpha(y) \iff F(x) \in F(y)$$

Costruiamo, ora, le funzioni f_α.

a. Per $\alpha = 0$, $f_0 = \emptyset$.

b. Per $\alpha = \beta + 1$ successore.

$$f_{\beta+1} : V_{\beta+1} \cap C \longrightarrow V$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f_\beta(x) & \text{se } x \in V_\beta \\ f_\beta[x \cap C] & \text{altrimenti} \end{cases}$$

c. Per $\alpha = \lambda$ limite $\quad f_\lambda = \bigcup \{ f_\alpha \mid \alpha < \lambda \}$

Affinché la costruzione sia corretta — tecnicamente affinché gli insiemi f_α siano funzioni — occorre che la condizione 3. sia soddisfatta al passo limite.

Dimostriamo 3 per induzione transfinita su β. Il caso $\beta = 0$ è vero a vuoto. Nel caso $\beta = \gamma + 1$, se $\alpha = \gamma$ allora $f_\alpha \subseteq f_\beta$ per definizione, altrimenti $f_\alpha \subseteq f_\gamma$ per ipotesi induttiva e $f_\gamma \subseteq f_\beta$ per definizione. Il caso limite è immediato.

Dimostriamo ora la seguente proprietà

$$(*) \qquad \forall x \in V_\alpha \cap C \qquad f_\alpha(x) = f_\alpha[x \cap C]$$

Detto ρ il rango di x,

$$f_\alpha(x) \overset{(3.)}{=} f_{\rho+1}(x) \overset{\text{def.}}{=} f_\rho[x \cap C] \overset{(3.)}{=} f_\alpha[x \cap C]$$

Per dimostrare 2. occorre dimostrare l'iniettività di f_α e la proprietà seguente

$$(**) \qquad \forall x, y \in V_\alpha \cap C \qquad f_\alpha(x) \in f_\alpha(y) \leftrightarrow x \in y$$

Procediamo per induzione transfinita. Il caso $\alpha = 0$ è vero a vuoto. Nel caso $\alpha = \beta + 1$, dati $x, y \in V_{\beta+1} \cap C$

$$f_{\beta+1}(x) = f_{\beta+1}(y) \overset{(*)}{\leftrightarrow} f_{\beta+1}[x \cap C] = f_{\beta+1}[y \cap C] \leftrightarrow f_\beta[x \cap C] = f_\beta[y \cap C]$$

poiché gli elementi di x e y appartengono a V_β

$\updownarrow$ iniettività di f_β

$$x = y \leftrightarrow x \cap C = y \cap C$$

estensionalità di C

quindi $f_{\beta+1}$ è iniettiva. Inoltre vale $(**)$ poiché

$f_{\alpha+1}(x) \in f_{\alpha+1}(y) \overset{(*)}{\leftrightarrow} f_{\alpha+1}(x) \in f_{\alpha+1}[y \cap C] \leftrightarrow \exists z \in y \cap C \; f_{\alpha+1}(x) = f_{\alpha+1}(z)$

[iniettività di $f_{\alpha+1}$

poiché $x \in C$

$x \in y \leftrightarrow x \in y \cap C \leftrightarrow \exists z \in y \cap C \; x = z$

Nel caso limite la proprietà 2. è immediata, ricordando che un'unione crescente di funzioni iniettive è iniettiva.

Resta da dimostrare la 1. Assumiamo $x \in y \in f_\alpha[V_\alpha \cap C]$, sia $y = f_\alpha(z)$ con $z \in C \cap V_\alpha$, allora $x \in f_\alpha(z) = f_\alpha[z \cap C]$, ossia esiste $t \in z \cap C$ tale che $x = f_\alpha(t)$, siccome $t \in z \in V_\alpha$, abbiamo anche $t \in V_\alpha$ e, di conseguenza $x \in f_\alpha[V_\alpha \cap C]$.

Nota: L'enunciato della domanda 4. è altresì noto come lemma del collasso di Mostowski.

Nota riguardo alla valutazione del compito

Ciascuna delle 12 domande A1, A2, ..., C4 contribuisce in maniera uguale al punteggio. Per prendere 18 occorrono 5 domande risolte. Il 30 si prende con 8 domande.