Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Prova scritta di ETI del 21·vii·2021

Il tuo elaborato manoscritto deve essere inviato al docente, sotto forma di scansioni o foto digitali, entro il tempo consentito. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti, più 30 minuti addizionali, unicamente per la scansione e l'invio dell'elaborato.

Esercizio A

Diciamo che un ordinale $\alpha > 0$ è *appiccicaticcio* se tutti gli ordinali della forma $\beta \cdot \alpha$, al variare di $\beta \in \mathrm{Ord} \setminus \{0\}$, sono potenze di α.

1. Dimostra che ω è appiccicaticcio.
2. Trova tutti gli ordinali appiccicaticci minori di ω^3.
3. Dimostra che la classe degli ordinali appiccicaticci è una classe propria.
4. Sia F la funzione classe che manda $\alpha \in \mathrm{Ord}$ nell'α-esimo ordinale appiccicaticcio, ossia, formalmente, la funzione definita, per ricorsione transfinita, dicendo che $F(\alpha)$ è il minimo ordinale appiccicaticcio maggiore di tutti gli elementi di $F[\alpha]$. Determina se F ha oppure no un punto fisso.

Esercizio B

Sia $X \subseteq \mathbb{N}$. Consideriamo la funzione

$$\begin{aligned} \text{differenza}\colon \{(a,b) \in X^2 \mid a < b\} &\to \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ (a,b) &\mapsto b - a \end{aligned}$$

Diciamo che X è:
parsimonioso se la funzione differenza è iniettiva;
meticoloso se la funzione differenza è surgettiva;
minuzioso se la funzione differenza è biunivoca.

1. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi parsimoniosi.
2. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi meticolosi.
3. Dimostra che esiste un insieme minuzioso.
4. Trova la cardinalità dell'insieme degli insiemi minuziosi.

Esercizio C

La classe C è:
transitiva se $\forall x \in C\ x \subseteq C$;
estensionale se $\forall x, y \in C\ \ x \cap C = y \cap C \to x = y$, dove $a \cap C \stackrel{def}{=} \{b \in a \mid b \in C\}$.
Una funzione classe $F\colon C \to D$ è un isomorfismo se è bigettiva e soddisfa la formula $\forall x, y \in C\ x \in y \leftrightarrow F(x) \in F(y)$. Diciamo che C e D sono classi isomorfe se esiste un isomorfismo $F\colon C \to D$.

1. Dimostra che se C è una classe transitiva e non vuota, allora $\emptyset \in C$.
2. Dimostra che esiste una classe propria estensionale che non è transitiva.
3. Dimostra che se C e D sono classi transitive isomorfe, allora coincidono, ossia, formalmente, $\forall x\ x \in C \leftrightarrow x \in D$.
4. Dimostra che se C è una classe estensionale, allora esiste una classe transitiva D isomorfa a C.