Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Prova scritta di ETI del 16·ix·2021

Il tuo elaborato manoscritto deve essere inviato al docente, sotto forma di scansioni o foto digitali, entro il tempo consentito. Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti, più 30 minuti addizionali, unicamente per la scansione e l'invio dell'elaborato.

Esercizio A

Date due relazioni di ordine (parziale o totale) $\preceq_1$ e $\preceq_2$ su un medesimo insieme X, diciamo che $\preceq_2$ estende $\preceq_1$ se $\forall a, b \in X\ a \preceq_1 b \to a \preceq_2 b$. Sia $A = \omega \times \{0, 1\}$ e sia $\preceq_A$ la relazione di ordine parziale su A definita da

$$(a_0, a_1) \preceq_A (b_0, b_1) \quad \stackrel{def}{\equiv} \quad a_0 \leqslant b_0 \wedge a_1 = b_1 \ .$$

1. Dimostra che ogni ordine totale che estende $(A, \preceq_A)$ è un buon ordine.
2. Trova tutti gli ordinali isomorfi a qualche ordine totale che estende $(A, \preceq_A)$.

Sia $B = \omega \times \omega$ e sia $\preceq_B$ la relazione di ordine parziale su B definita da

$$(a_0, a_1) \preceq_B (b_0, b_1) \quad \stackrel{def}{\equiv} \quad a_0 \leqslant b_0 \wedge a_1 \leqslant b_1$$

3. Dimostra che ogni ordine totale che estende $(B, \preceq_B)$ è un buon ordine.
4. Trova tutti gli ordinali isomorfi a qualche ordine totale che estende $(B, \preceq_B)$.

Esercizio B

Sia $F\colon V \to V$ una funzione classe biunivoca.

1. Dimostra che, se $\forall x, y\ x \in y \leftrightarrow F(x) \in F(y)$, allora $\forall x\ F(x) = x$.

Diciamo che $x \in_F y$ quando $x \in F(y)$. Rimpiazzando la relazione di appartenenza $\in$ con $\in_F$:

2. dimostra che lo schema di assiomi di separazione rimane valido,
3. l'assioma delle parti rimane necessariamente valido?
4. l'assioma di buona fondazione rimane necessariamente valido?

Esercizio C

Calcola la cardinalità degli insiemi seguenti:

1. $\{f\colon \omega_2 \to \omega_2 \mid \forall \alpha \in \omega_2\ f(\alpha) \leqslant \alpha\}$,
2. $\{f\colon \omega \to \omega_\omega \mid \forall n \in \omega\ f(n) < \omega_n\}$.
3. Dimostra che, se la cardinalità dell'insieme al punto 2 è $\aleph_{\omega_1}$, allora $2^{\aleph_1} > \aleph_2$.
4. Trova tutte le cardinalità

$$\left|\{f\colon \omega \to \omega \mid f \text{ è iniettiva e } f \subseteq S\}\right|$$

che si possono ottenere al variare di $S \in \mathcal{P}(\omega \times \omega)$.