Università di Pisa

Corso di laurea in Matematica

Prova scritta di ETI del 17·I·2022

Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.



Esercizio A

Sia F la funzione classe che manda un cardinale α nel minimo β tale che $\alpha < \alpha^\beta$.

1. Assumendo l'ipotesi generalizzata del continuo ($2^k = k^+$) calcola $F(\aleph_7)$.
2. Dimostra che l'immagine di F è una classe propria.
3. Dimostra che se $\beta = F(\alpha)$ allora β è regolare
4. Dimostra che β è nell'immagine di F se e solo se β è regolare.

Esercizio B

Dato un insieme ordinato $(S, <)$ indichiamo con $\tau(S, <)$ l'insieme degli ordinali isomorfi a qualche sottoinsieme bene ordinato di $(S, <)$.

1. Dimostra che $\tau(S, <)$ è un ordinale.
2. Calcola $\tau(\epsilon_0, \prec)$ dove $\prec$ denota l'ordinamento *opposto* a quello usuale: $\alpha \prec \beta$ se e solo se $\beta < \alpha$.
3. Calcola $\tau(\mathbb{Z}^2, <)$ dove $<$ denota l'ordinamento lessicografico.
4. Calcola $\tau(\mathbb{Z}[x], <)$ dove $\mathbb{Z}[x]$ è l'insieme dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{Z}$ nella indeterminata x, e $p < q$ se e solo se $\exists N \in \mathbb{Z}\ \forall x > N\ p(x) < q(x)$.

Esercizio C

Dato $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$ scriviamo $A_{<x} = \{y \in A \mid y < x\}$ e $A_{>x} = \{y \in A \mid y > x\}$.

1. Dimostra che $\operatorname{cof}|\mathbb{R}| > \aleph_0$.
2. Dimostra che se $\kappa < |\mathbb{R}|$ e $\operatorname{cof}\kappa = \aleph_0$, allora esiste $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $|A| = \kappa$ e $\forall x \in \mathbb{R}\ |A_{<x}| \neq |A_{>x}|$.
3. Dimostra che se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{cof}|A| > \aleph_0$ allora esiste $x \in \mathbb{R}$ tale che $|A_{<x}| = |A_{>x}|$.
4. Dimostra che se $A \subseteq \mathbb{R}$ e $\operatorname{cof}|A| > \aleph_0$ allora esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $|A_{<r}| = |A_{>r}|$.