Università di Pisa
Corso di laurea in Matematica
Prova scritta di ETI del 7·II·2022

Tutte le risposte devono essere giustificate.

Hai a disposizione 2 ore e 30 minuti.

Esercizio A

Considera l'ordine parziale sull'insieme $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ delle successioni di numeri naturali definito da

$$\sigma \prec \tau \quad \leftrightarrow \quad |\{i \in \mathbb{N} \mid \tau_i \leqslant \sigma_i\}| < \aleph_0$$

1. Dimostra che esiste $S_{\omega+\omega} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $(S_{\omega+\omega}, \prec)$ è isomorfo a $\omega + \omega$.
2. Dimostra che ogni sottoinsieme numerabile di $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ha un maggiorante.
3. Dimostra che dato un qualunque ordinale numerabile α, esiste $S_\alpha \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $(S_\alpha, \prec)$ è isomorfo ad α.
4. Esiste $S_{\omega_1} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tale che $(S_{\omega_1}, \prec)$ sia isomorfo ad ω_1?

Esercizio B

Considera gli insiemi V_α della gerarchia di Von Neumann.

1. Dimostra che se $S \in V_\omega$ allora la chiusura transitiva di S è finita.
2. Dimostra che se la chiusura transitiva di S è finita allora $S \in V_\omega$.
3. Sia $\in^*$ la relazione su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita dicendo che $m \in^\star n$ se e solo se la cifra di 2^m nella scrittura binaria di n è 1. Dimostra che $(\mathbb{N}, \in^*)$ è isomorfo a $(V_\omega, \in)$. Ossia, formalmente, dimostra che esiste una bigezione $f\colon \mathbb{N} \to V_\omega$ tale che $m \in^* n$ se e solo se $f(m) \in f(n)$.
4. È vero l'assioma del rimpiazzamento relativizzato a $V_{\omega+\omega}$?

Esercizio C

Ricorda che il linguaggio formale della teoria degli insiemi contiene le sole relazioni $\in$ e $=$. Ossia, in una formula insiemistica è ammesso l'uso dei soli simboli logici, simboli di variabile, e delle relazioni $\in$ e $=$. Dati due insiemi S e T, diciamo che la formula $\phi(x, y)$ definisce $f\colon S \to T$ quando, per ogni x e y, vale $\phi(x, y)$ se e solo se $f(x) = y$.

1. Scrivi una formula insiemistica $\psi(x)$ che vale se e solo se $x \in \omega$, giustificando la tua risposta.
2. Scrivi una formula insiemistica che definisce una bigezione fra ω e $\omega \setminus \{0\}$, giustificando la tua risposta.
3. Considera due formule insiemistiche $\sigma(x)$ e $\tau(y)$ tali che $S := \{x \in \omega \mid \sigma(x)\}$ e $T := \{y \in \omega \mid \tau(y)\}$ sono entrambi infiniti. Dimostra che esiste una formula insiemistica $\phi(x, y)$ che definisce una bigezione fra S e T.
4. Data una formula insiemistica $\phi(x, y)$ che definisce una funzione iniettiva $S \to T$, ed una formula insiemistica $\psi(y, x)$ che definisce una funzione iniettiva $T \to S$, è vero che esiste una formula insiemistica che definisce una bigezione fra S e T?